Συνδυασμός Ασαφών Σχέσεων με τη μέθοδο Mamdani

Μιχ. Σπηλιώτης, Αναπληρωτής Καθηγητής
ΔΠΘ

Συνδυασμός Ασαφών Σχέσεων

Για n αριθμό κανόνων, η ασαφής σχέση R_i δημιουργείται από τη συνεπαγωγή $A_i \rightarrow B_i$ (i = 1,…, n). Η συνδυασμένη ασαφής σχέση R δίνεται με τη μέθοδο:

- Mamdani:

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n = \bigcup_{i=1}^{n} R_i \qquad (1)$$

- Zadeh:

$$R = R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n = \bigcap_{i=1}^{n} R_i \qquad (2)$$

Η διαφορά στα ερμηνευμένα αποτελέσματα εξαιτίας της διαφορετικής μεθόδου κανόνων μετατροπής σε ασαφείς σχέσεις έγκειται στα εξής:

- Στη μέθοδο **Mamdani**, η ασαφής σχέση R = A → B δίνεται από τη συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_R(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)$$

Αντικαθιστώντας $\mu_A(x) = 0$, λαμβάνουμε $\mu_R(x, y) = 0$ ανεξάρτητα από την τιμή $\mu_B(y)$. Επομένως, ερμηνεύουμε το συνδετικό «αλλιώς» ως «Ή». Το $\mu_A(x) = 0$ σημαίνει ότι ο κανόνας A → B είναι μηδέν.

Συνδυασμός Ασαφών Σχέσεων

- Στη μέθοδο **Zadeh**, η ασαφής σχέση R = A → B δίνεται από τη συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_R(x,y) = 1 \wedge (1 - \mu_A(x) + \mu_B(y))$$

Αντικαθιστώντας $\mu_A(x) = 0$, λαμβάνουμε $\mu_R(x,y) = 1$ ανεξάρτητα από την τιμή $\mu_B(y)$. Επομένως, ερμηνεύουμε το συνδετικό «αλλιώς» ως «ΚΑΙ».

Παράδειγμα σύνθεσης Ασαφών Σχέσεων

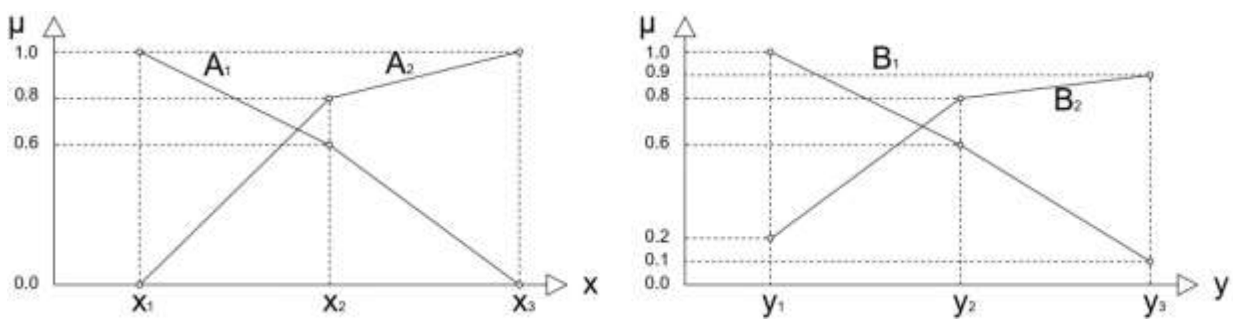
- Περίπτωση 1: Προτάσεις με μία μεταβλητή εισόδου

- Έστω οι παρακάτω κανόνες:
  - Κανόνας 1: IF x είναι A_1 THEN y είναι B_1
  - Κανόνας 2: IF x είναι A_2 THEN y είναι B_2

όπου
$X = \{x_1, x_2, x_3\}$ και $A_1, A_2 \subset X$
$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ και $B_1, B_2 \subset Y$

Τα ασαφή σύνολα A_1, A_2, B_1 και B_2 δίνονται ως ακολούθως:

$A_1 = \{1.0/x_1 + 0.6/x_2\}$
$A_2 = \{0.8/x_2 + 1.0/x_3\}$
$B_1 = \{1.0/y_1 + 0.6/y_2 + 0.1/y_3\}$
$B_2 = \{0.2/y_1 + 0.8/y_2 + 0.9/y_3\}$



Σχήμα-1, Συναρτήσεις συμμετοχής ασαφών συνόλων παραδείγματος

Επίλυση παραδείγματος με τη μέθοδο Mamdani

- Αρχικά εισάγουμε τις ασαφείς σχέσεις χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Mamdani. Μετατρέπουμε τον Κανόνα 1: $A_1 \rightarrow B_1$ στην ασαφή σχέση R_1 ως εξής:

$$
R_1 = \begin{array}{cc|ccc}
 & & \mu_{B1}(y_1) & \mu_{B1}(y_2) & \mu_{B1}(y_3) \\
 & & 1.0 & 0.6 & 0.1 \\
\mu_{A1}(x_1) & 1.0 & 1.0 & 0.6 & 0.1 \\
\mu_{A1}(x_2) & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.1 \\
\mu_{A1}(x_3) & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0
\end{array}
$$

Στην προηγούμενη έκφραση της ασαφούς σχέσης R1 έχουν προστεθεί οι τιμές συμμετοχής των ασαφών συνόλων στο πάνω και αριστερό μέρος του ασαφούς πίνακα για την κατανόηση του αναγνώστη.

Στη συνέχεια μετατρέπουμε τον Κανόνα 2: $A_2 \rightarrow B_2$ στην ασαφή σχέση R_2 ως εξής:

$$
R_2 = \begin{array}{cc|ccc}
 & & \mu_{B2}(y_1) & \mu_{B2}(y_2) & \mu_{B2}(y_3) \\
 & & 0.2 & 0.8 & 0.9 \\
\mu_{A2}(x_1) & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
\mu_{A2}(x_2) & 0.8 & 0.2 & 0.8 & 0.8 \\
\mu_{A2}(x_3) & 1.0 & 0.2 & 0.8 & 0.9
\end{array}
$$

Συνδυάζοντας τις ασαφείς σχέσεις R_1 και R_2 παίρνουμε το τελικό αποτέλεσμα:

$$
R = R_1 \cup R_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.6 & 0.1 \\ 0.6 & 0.8 & 0.8 \\ 0.2 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}
$$

Επίλυση παραδείγματος με τη μέθοδο Mamdani

- Για δυσδιάστατη ασαφή σχέση R που συντίθεται με τη μέθοδο Mamdani, έστω ένα ασαφές σύνολο A’ στο X τέτοιο ώστε:

$$A' = 0.8/x_1 + 0.3/x_2$$

Το συμπέρασμα του συλλογισμού B’ στο Y θα δίνεται από τη σχέση:

$$B' = (A' \circ R),\ \text{οπότε:}$$

$$\begin{array}{ccc} x1 & x2 & x3 \\ [0.8 & 0.3 & 0.0] \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc} & y1 & y2 & y3 \\ \hline x1 & 1.0 & 0.6 & 0.1 \\ x2 & 0.6 & 0.8 & 0.8 \\ x3 & 0.2 & 0.8 & 0.9 \end{array} =$$

$$= [(0.8 \wedge 1.0) \vee (0.3 \wedge 0.6) \vee (0.0 \wedge 0.2),\ (0.8 \wedge 0.6) \vee (0.3 \wedge 0.8) \vee (0.0 \wedge 0.8),\ (0.8 \wedge 0.1) \vee (0.3 \wedge 0.8) \vee (0.0 \wedge 0.9)] =$$

$$= [(0.8 \vee 0.3 \vee 0.0),\ (0.6 \vee 0.3 \vee 0.0),\ (0.1 \vee 0.3 \vee 0.0)]$$

$$\Rightarrow \{y1, y2, y3\} = \{0.8, 0.6, 0.3\}$$

Επίλυση παραδείγματος με τη μέθοδο Mamdani

- Για δυσδιάστατη ασαφή σχέση R που συντίθεται με τη μέθοδο Mamdani, υποθέτουμε ένα ασαφές σύνολο A'' στο X τέτοιο ώστε:

$$A'' = 1.0/x_1$$

Το συμπέρασμα του συλλογισμού B'' στο Y θα δίνεται από τη σχέση:

$$B'' = (A'' \circ R), \text{ οπότε}$$

$$\begin{array}{ccc} x1 & x2 & x3 \\ [1.0 & 0.0 & 0.0] \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc} & y1 & y2 & y3 \\ \hline x1 & 1.0 & 0.6 & 0.1 \\ x2 & 0.6 & 0.8 & 0.8 \\ x3 & 0.2 & 0.8 & 0.9 \end{array} =$$

$$= [(1.0 \wedge 1.0) \vee (0.0 \wedge 0.6) \vee (0.0 \wedge 0.2), (1.0 \wedge 0.6) \vee (0.0 \wedge 0.8) \vee (0.0 \wedge 0.8), (1.0 \wedge 0.1) \vee (0.0 \wedge 0.8) \vee (0.0 \wedge 0.9) =$$

$$= [(1.0 \vee 0.0 \vee 0.0), (0.6 \vee 0.0 \vee 0.0), (0.1 \vee 0.0 \vee 0.0)]$$

$$\Rightarrow \{y1, y2, y3\} = \{1.0, 0.6, 0.1\}$$