

Ασαφής Βελτιστοποίηση

Μ. Σπηλιώτης
Επ. καθηγητής

Συναρτήσεις συμμετοχής

Για κάθε συνάρτηση στόχου με βάση τις επιδιωκόμενες τιμές μπορεί να ορισθεί μία συνάρτηση συμμετοχής. Έτσι ένας ασαφής στόχος απεικονίζεται από το ασαφές σύνολο G στο γενικό σύνολο X με συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_G : X \rightarrow [0, 1] \quad (3.6)$$

Ένας ασαφής περιορισμός C απεικονίζεται από το ασαφές σύνολο στο γενικό σύνολο X με συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_C : X \rightarrow [0, 1] \quad (3.7)$$

Επόμενο βήμα αποτελεί ο καθορισμός ενός συνόλου απόφασης. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι προκειμένου να καθορίσουμε το ασαφές σύνολο απόφασης και η επιλογή αυτή αποτελεί μία υποκειμενική διαδικασία. Η αρχική θεώρηση των Bellman και Zadeh στηρίζεται στον ορισμό συνόλου ασαφούς απόφασης το οποίο προκύπτει από την τομή του συνόλου των στόχων με το σύνολο των περιορισμών.

Ασαφή σύνολα – Συναρτήσεις συμμετοχής

- Το ασαφές σύνολο είναι μία απεικόνιση από το υπερσύνολο X στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$:

$$\mu_G : X \rightarrow [0,1]$$

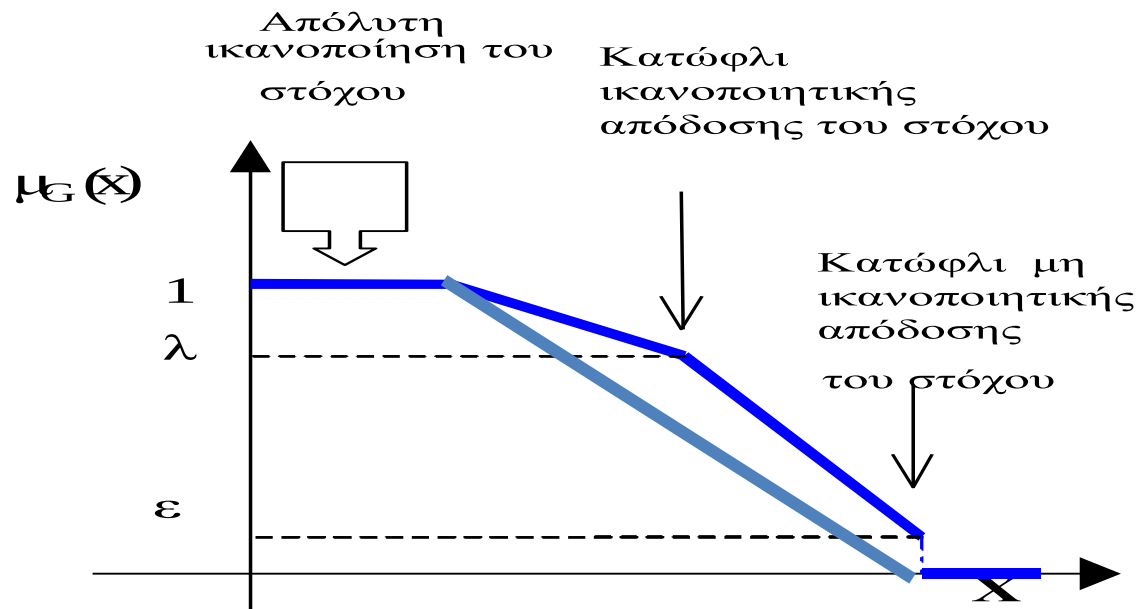
όπου μ_G η συνάρτηση συμμετοχής

Αρχές για την συνάρτηση συμμετοχής

- $\mu_G(x) = 1$: απόλυτη ικανοποίηση του στόχου από το στοιχείο x .
- $\mu_G(x) \geq \lambda$, ικανοποιητική απόδοση του στόχου σε βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του λ
- $\mu_G(x) < \varepsilon$. Δεν ικανοποιείται σε ικανοποιητικό βαθμό ο στόχος

λ, ε είναι το κατώφλι για το οποίο έχουμε ικανοποιητική και μη ικανοποιητική απόδοση του στόχου αντοίσθηχα

Συνάρτηση συμμετοχής ικανοποίησης ενός στόχου

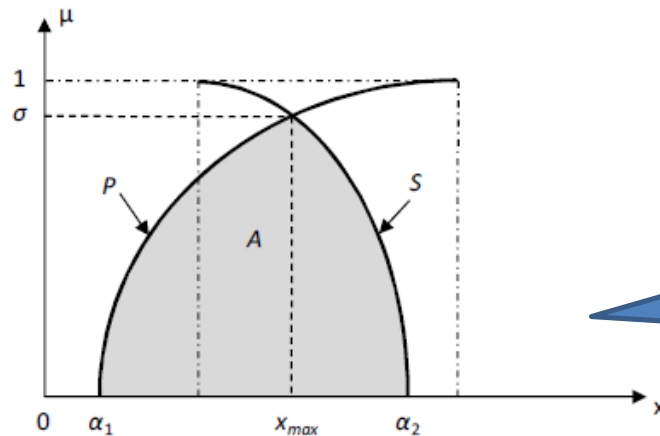


Θεωρούμε ένα απλό πρότυπο λήψης απόφασης που αποτελείται από ένα **στόχο**, τον οποίο περιγράφει ένα **ασαφές σύνολο** S με μια **συνάρτηση συμμετοχής** $\mu_S(x)$ και έναν **περιορισμό** που περιγράφεται από ένα **ασαφές σύνολο** P με μια **συνάρτηση συμμετοχής** $\mu_P(x)$, όπου x είναι ένα στοιχείο του κλασικού συνόλου των **εναλλακτικών λύσεων** L_{ev} .

Εξ ορισμού η **απόφαση** είναι ένα **ασαφές σύνολο** A με συνάρτηση συμμετοχής $\mu_A(x)$, που εκφράζεται ως **τομή** των S και P :

$$A = S \cap P = \{(x, \mu_A(x)) / x \in [\alpha_1, \alpha_2], \mu_A(x) \in [0, \sigma] / \sigma \leq 1\} \quad (5.1)$$

Η σχέση (5.1) παριστάνεται στο Σχήμα 5.1, όπου τα ασαφή σύνολα S και P είναι εφοδιασμένα με συνεχείς και μονότονες συναρτήσεις συμμετοχής.



Συνεχή ασαφή
σύνολα

ΣΧΗΜΑ 5.1. Η ΑΠΟΦΑΣΗ (A) ΩΣ ΑΣΑΦΕΣ ΣΥΝΟΛΟ.

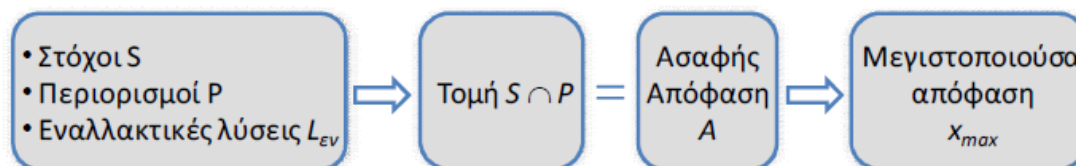
Κάνοντας χρήση της πράξης της τομής ασαφών συνόλων, από τη σχέση (5.1) προκύπτει:

$$\mu_A(x) = \min(\mu_S(x), \mu_P(x)), \quad x \in L_{ev} \quad (5.2)$$

Επειδή η τομή είναι πράξη **αντιμεταθετική**, δηλαδή τα S και P , μπορούν να αλλάζουν θέσεις (στόχοι – περιορισμοί ή περιορισμοί – στόχοι), μερικές φορές δεν είναι απαραίτητο να εξειδικεύουμε το ρόλο τους και απλά τα καλούμε αντικείμενα του προβλήματος.

Ασφαλώς οι λαμβάνοντες μια απόφαση θα επιθυμούσαν, ως αποτέλεσμα, ένα κλασσικό σύνολο, μια συγκεκριμένη τιμή δηλαδή ανάμεσα στα στοιχεία του συνόλου $[\alpha_1, \alpha_2] \subset L_{ev}$ που να αποδίδει επαρκώς την ταυτότητα του ασαφούς συνόλου A . Αυτό σημαίνει **άρση της ασάφειας** του συνόλου A . Συνεπώς υιοθετούν την τιμή $x \in [\alpha_1, \alpha_2]$, που έχει τον υψηλότερο βαθμό συμμετοχής στο σύνολο A . Αυτή η τιμή του x , που μεγιστοποιεί την $\mu_A(x)$, λέγεται **μεγιστοποιούσα απόφαση**, (Σχήμα 5.2), και δίνεται από την:

$$x_{\max} = \{x / \max \mu_A(x) = \max \min(\mu_S(x), \mu_P(x))\} \quad (5.3)$$



ΣΧΗΜΑ 5.2. Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΛΗΨΗΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΠΡΑΞΗ ΤΗΣ ΤΟΜΗΣ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ.

Διακριτά ασαφή σύνολα επανάληψη της διαδικασίας για κάθε εναλλακτική

Παράδειγμα: Έστω το σύνολο των εναλλακτικών λύσεων $L_{ev} = \{1, 3, 5, 7\}$ και S οι στόχοι και P οι περιορισμοί οι οποίοι δίνονται από τα ασαφή σύνολα:

$$S = \{(1, 0.2), (3, 0.4), (5, 0.5), (7, 0.6)\}$$

$$P = \{(1, 0.8), (3, 0.4), (5, 0.3), (7, 0.1)\}$$

Η απόφαση δίνεται από την τομή:

$$A = S \cap P = \{(1, \min\{0.2, 0.8\}), (3, \min\{0.4, 0.4\}), (5, \min\{0.5, 0.3\}), (7, \min\{0.6, 0.1\})\}$$

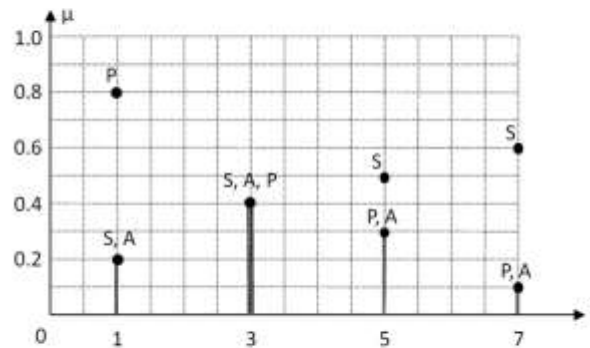
Άρα, (βλ. και Σχήμα 5.3):

$$A = \{(1, 0.2), (3, 0.4), (5, 0.3), (7, 0.1)\}$$

$$\{\alpha_1, \alpha_2\} = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$\sigma = 0.4$$

$$x_{\max} = 3$$



ΣΧΗΜΑ 5.3. Στόχοι (S), Περιορισμοί (P) και Απόφαση (A).

Αντί της τομής (και), που ορίστηκε ως το $\min$, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν κι άλλες πράξεις της θεωρίας των ασαφών συνόλων για να καθορίσουν μια απόφαση.

Μποτζώρης
και
Παπαδόπουλ
ος, 2015

Επιλογή της
εναλλακτικής
3

Η φράση «**ελκυστικό οικονομικό κίνητρο**» είναι μια **γλωσσική μεταβλητή** και θεωρείται σαν ένα σύνολο **στόχων** S που από την περιγραφή του είναι ασαφές και καθορίζεται από το σύνολο **εναλλακτικών λύσεων** $L_{ε\nu} = \{x / 0 < x \leq 500\}$, όπου x το **αναμενόμενο οικονομικό κίνητρο** σε €.

Έστω ότι το ασαφές σύνολο των **στόχων** S από την πλευρά των υπαλλήλων (όπως δηλαδή αντιλαμβάνονται οι υπάλληλοι το «**ελκυστικό οικονομικό κίνητρο**») είναι εφοδιασμένο με μια συνάρτηση συμμετοχής:

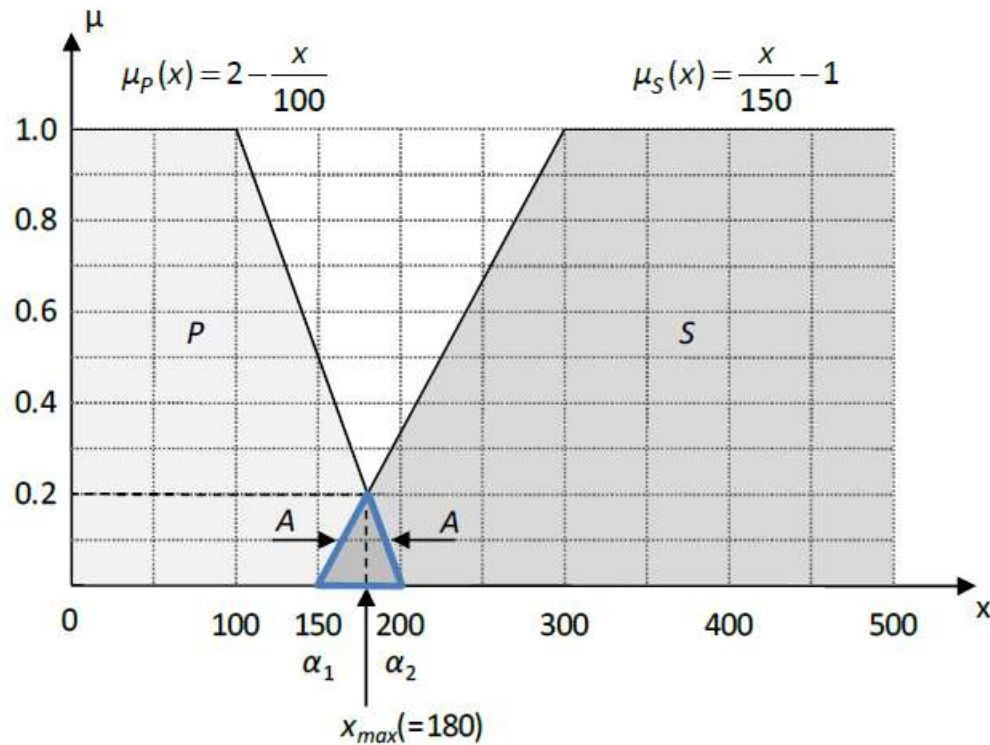
$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } 0 < x \leq 150 \\ \frac{x}{150} - 1 & \text{για } 150 \leq x \leq 300 \\ 1 & \text{για } 300 \leq x \leq 500 \end{cases}$$

Το ασαφές σύνολο των **περιορισμών** P (η γλωσσική μεταβλητή «**μέτριο για το ταμείο της εταιρείας οικονομικό κίνητρο**» αφορά τη διοίκηση της εταιρείας) είναι εφοδιασμένο με συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_P(x) = \begin{cases} 1 & \text{για } 0 < x \leq 100 \\ 2 - \frac{x}{100} & \text{για } 100 \leq x \leq 200 \\ 0 & \text{για } 200 \leq x \leq 500 \end{cases}$$

Το ασαφές σύνολο των **αποφάσεων** A έχει τη συνάρτηση συμμετοχής που φαίνεται στο Σχήμα 5.4 (επόμενη σελίδα).

Γραφική επίλυση



ΣΧΗΜΑ 5.4. ΣΤΟΧΟΙ (S) , ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ (P) ΚΑΙ ΑΠΟΦΑΣΗ (A) ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΥ ΚΙΝΗΤΡΟΥ.

Επίλυση με βελτιστοποίηση

Θεωρώ ότι η απόφαση θα βρίσκεται στη γκρίζα περιοχή

Επιθυμώ τη μέγιστη κοινή επίτευξη στόχων και περιορισμών

$$\max a$$

Κοινή επίτευξη στόχων και περιορισμών

$$\frac{x}{150} - 1 \geq a \Leftrightarrow x - 150 \geq 150a \Leftrightarrow x - 150a \geq 150$$

$$2 - \frac{x}{100} \geq a \Leftrightarrow 200 - x \geq 100a \Leftrightarrow x + 100a \leq 200$$



$$\max a$$

s.t.

$$x - 150a \geq 150$$

$$x + 100a \leq 200$$

$$\rightarrow x = 180, a = 0.2$$

Lingo

