Ασαφής Βελτιστοποίηση

Μ. Σπηλιώτης
Επ. καθηγητής

Σημερινή ύλη

- Εύκαμπτος προγραμματισμός:
  - Γενικές αρχές
  - Διαδραστική διαδικασία όταν δεν υπάρχει α priori πληροφορία για τη σ.σ.
  - Πολλαπλά κριτήρια, καμπύλη Pareto
  - Ορισμός μη κυριαρχούμενης λύσης για ασαφές πρόβλημα
- Προγραμματισμός Δυνατοτήτων
  - Ασαφή αριθμητική
  - Ερμηνεία ασαφών ανισοτήτων
  - Μοντέλο που οι μεταβλητές απόφασης είναι ασαφείς αριθμοί

Εύκαμπτος (ασαφής) προγραμματισμός, 1

Δρ Μ. Σπηλιώτης
Λέκτορας

Γραμμικός προγραμματισμός

Συνάρτηση στόχου
Περιορισμοί
$\Big\}$ γραμμικές εξισώσεις

- Συνάρτηση στόχου: $Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

c_i : σταθεροί συντελεστές
x_i : μεταβλητές απόφασης

- Περιορισμοί: $\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \leq b_k \qquad k = 1, 2, \ldots, m$

m ανισότητες, n άγνωστοι

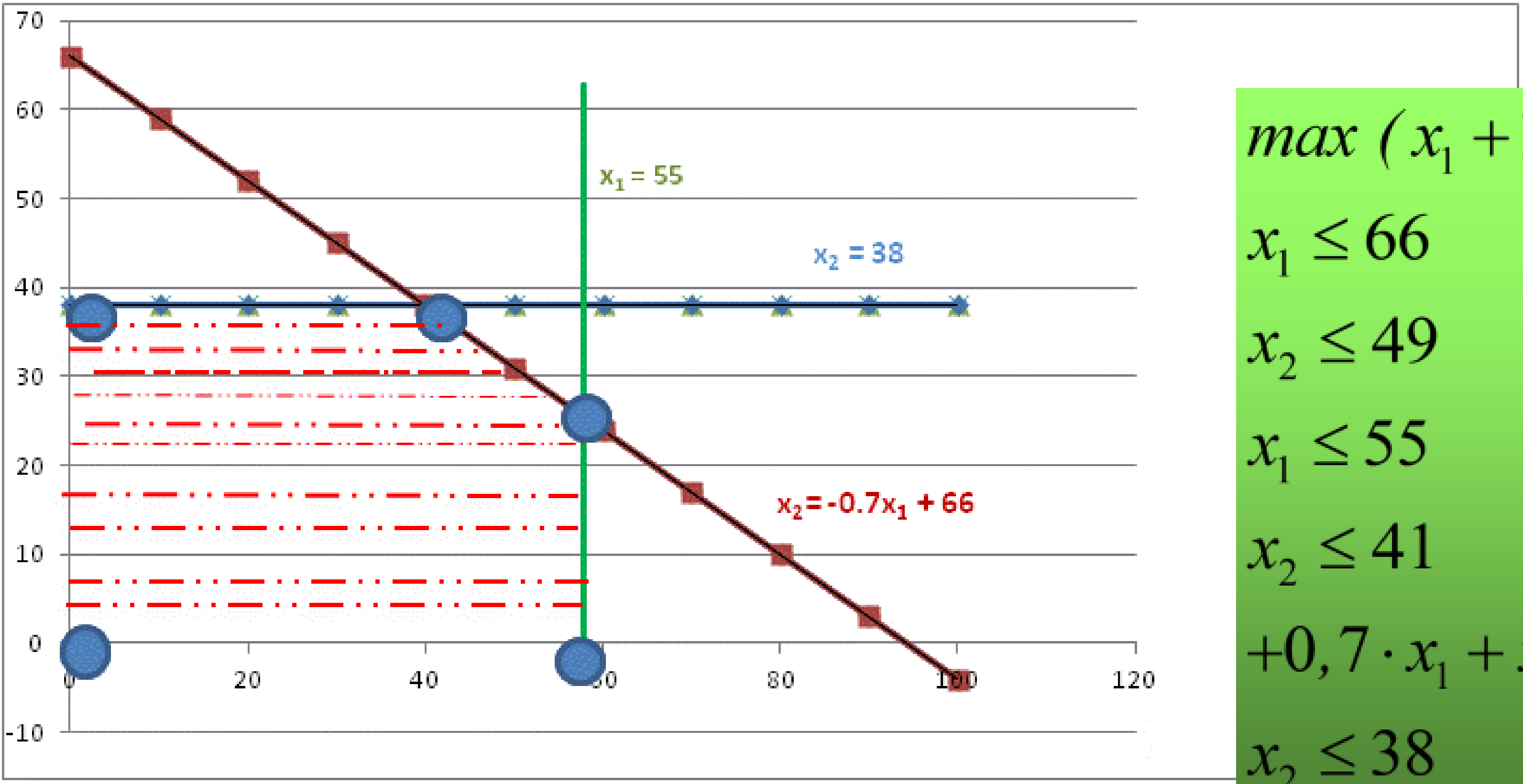
Συνθήκες προσήμου: $x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$

(θετικές εισροές, αποθηκεύσεις κ.λπ.)

Κατανόηση γραμμικού προγραμματισμού

- Συνάρτηση στόχου: π.χ. επιδιωκόμενο κέρδος (μία συνάρτηση συμμετοχής)
- Μεταβλητές απόφασης, π.χ. απολήψιμες ποσότητες νερού (μη αρνητικές ποσότητες)
- Περιορισμοί, περιορισμοί διαθεσιμότητας νερού
  - Υλικοί περιορισμοί
- Λύση εντός του εφικτού πεδίου (που θα είναι κυρτό)
- ….στα σύνορα και μάλιστα στις κορυφές (για γραμμικό προγραμματισμό)

Κυρτό πεδίο ορισμού, γραμμικός προγραμματισμός λύση στις κορυφές



$$max\ (x_1 + 1,5 \cdot x_2)$$

$$x_1 \le 66$$

$$x_2 \le 49$$

$$x_1 \le 55$$

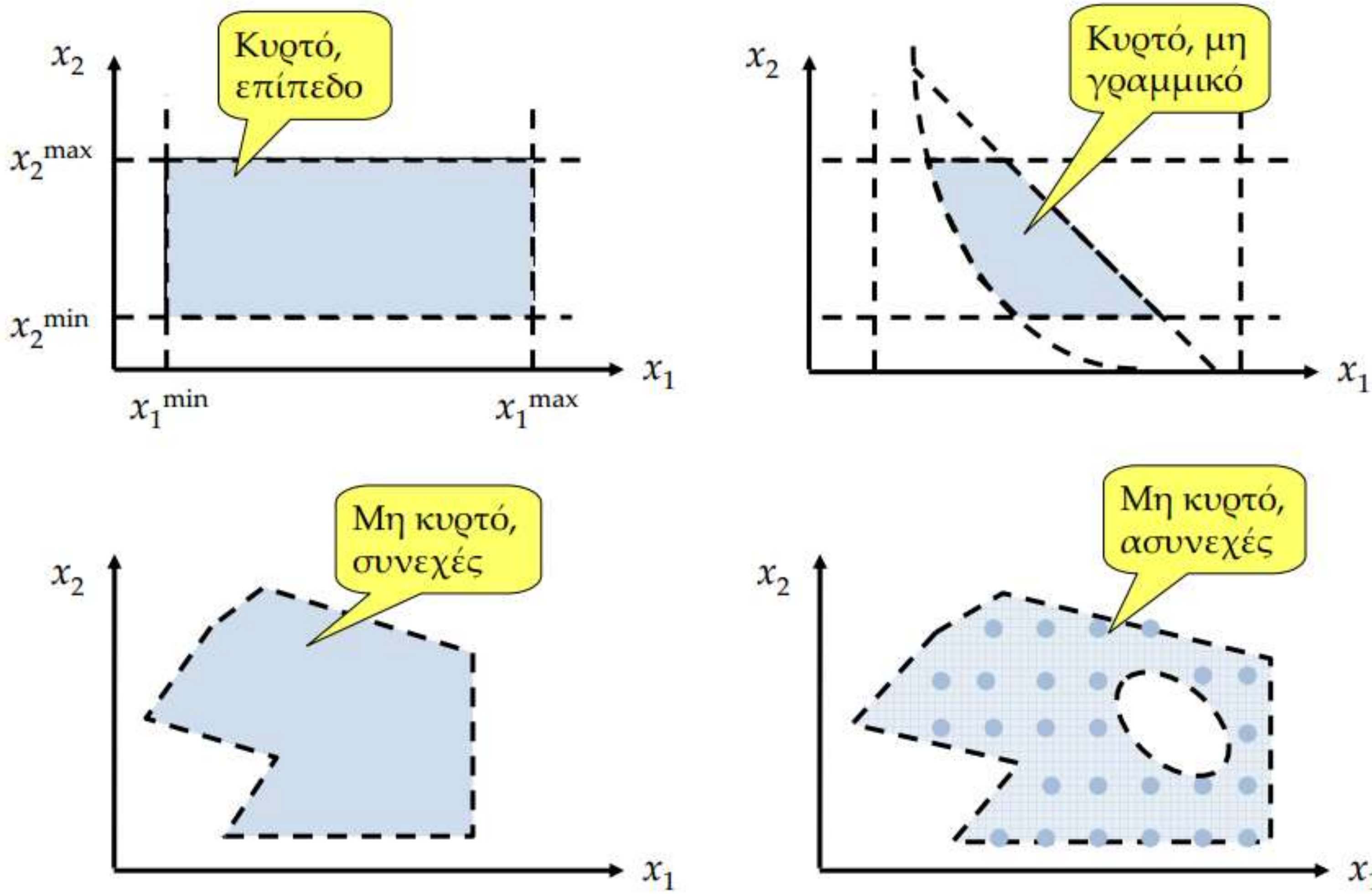
$$x_2 \le 41$$

$$+0,7 \cdot x_1 + x_2 \le 66$$

$$x_2 \le 38$$

$$x_1,\ \ x_2 \ge 0$$

Παραδείγματα περιορισμών – εφικτών πεδίων



Ευστρατιαδης, 2013

Εύκαμπτος προγραμματισμός

- Ασάφεια στους περιορισμούς και στο εύρος της συνάρτησης συμμετοχής
- Ισχυρή σύνδεση με προγραμματισμό των στόχων
- Συμπερίληψη πολλαπλών κριτηρίων
- Ασθενώς ορισμένο πρόβλημα δύναμη και αδυναμία

- Ενώ: Προγραμματισμός δυνατοτήτων: Ασάφεια και στους συντελεστές και σταθερούς όρουυς

Συναρτήσεις συμμετοχής

Για κάθε συνάρτηση στόχου με βάση τις επιδιωκόμενες τιμές μπορεί να ορισθεί μία συνάρτηση συμμετοχής. Έτσι ένας ασαφής στόχος απεικονίζεται από το ασαφές σύνολο G στο γενικό σύνολο X με συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_G : X \rightarrow [0, 1] \tag{3.6}$$

Ένας ασαφής περιορισμός C απεικονίζεται από το ασαφές σύνολο στο γενικό σύνολο X με συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_C : X \rightarrow [0, 1] \tag{3.7}$$

Επόμενο βήμα αποτελεί ο καθορισμός ενός συνόλου απόφασης. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι προκειμένου να καθορίσουμε το ασαφές σύνολο απόφασης και η επιλογή αυτή αποτελεί μία υποκειμενική διαδικασία. Η αρχική θεώρηση των Bellman και Zadeh στηρίζεται στον ορισμό συνόλου ασαφούς απόφασης το οποίο προκύπτει από την τομή του συνόλου των στόχων με το σύνολο των περιορισμών.

Ασαφή σύνολα – Συναρτήσεις συμμετοχής

- Το ασαφές σύνολο είναι μία απεικόνιση από το υπερσύνολο X στο κλειστό διάστημα [0, 1]:

  $\mu G : X \rightarrow [0,1]$

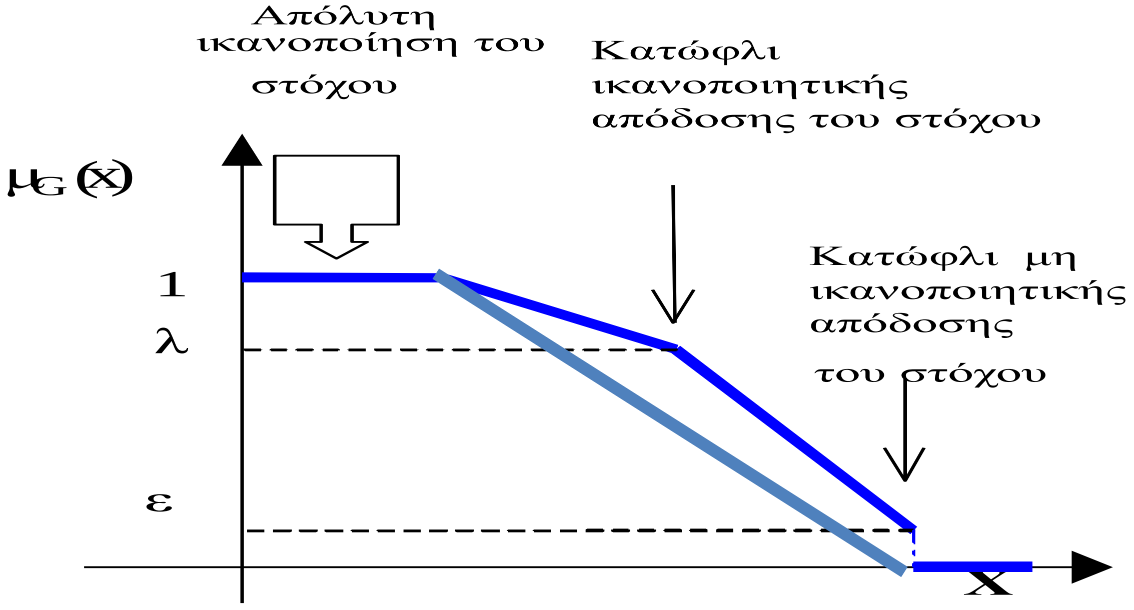
όπου μG η συνάρτηση συμμετοχής

Αρχές για την συνάρτηση συμμετοχής

- $\mu G(x) = 1$: απόλυτη ικανοποίηση του στόχου από το στοιχείο x.
- $\mu G(x) \geq \lambda$, ικανοποιητική απόδοση του στόχου σε βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του λ
- $\mu G(x) < \varepsilon$. Δεν ικανοποιείται σε ικανοποιητικό βαθμό ο στόχος

λ, ε είναι το κατώφλι για το οποίο έχουμε ικανοποιητική και μη ικανοποιητική απόδοση του στόχου αντοίστηχα

Συνάρτηση συμμετοχής ικανοποίησης ενός στόχου

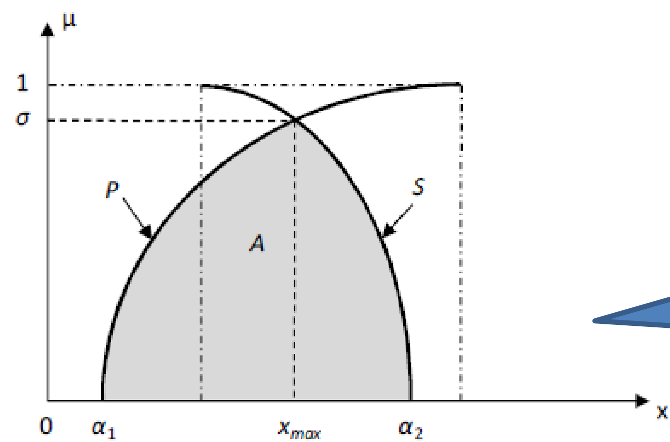


Θεωρούμε ένα απλό πρότυπο λήψης απόφασης που αποτελείται από ένα **στόχο**, τον ο-ποίο περιγράφει ένα **ασαφές σύνολο *S*** με μια **συνάρτηση συμμετοχής $\mu_S(x)$** και έναν **πε-ριορισμό** που περιγράφεται από ένα **ασαφές σύνολο *P*** με μια **συνάρτηση συμμετοχής $\mu_P(x)$**, όπου *x* είναι ένα στοιχείο του **κλασικού συνόλου** των **εναλλακτικών λύσεων $L_{εν}$**.

Εξ ορισμού η **απόφαση** είναι ένα **ασαφές σύνολο *A*** με συνάρτηση συμμετοχής **$\mu_A(x)$**, που εκφράζεται ως **τομή** των ***S* και *P***:

$$A = S \cap P = \left\{ \left(x,\ \mu_A(x) \right) / \, x \in [\alpha_1,\ \alpha_2],\ \ \mu_A(x) \in [0,\ \sigma] / \, \sigma \leq 1 \right\} \tag{5.1}$$

Η σχέση (5.1) παριστάνεται στο Σχήμα 5.1, όπου τα ασαφή σύνολα *S* και *P* είναι εφοδια-σμένα με συνεχείς και μονότονες συναρτήσεις συμμετοχής.



ΣΧΗΜΑ 5.1. Η ΑΠΟΦΑΣΗ (Α) ΩΣ ΑΣΑΦΕΣ ΣΥΝΟΛΟ.

Συνεχή ασαφή σύνολα

Κάνοντας χρήση της πράξης της τομής ασαφών συνόλων, από τη σχέση (5.1) προκύπτει:

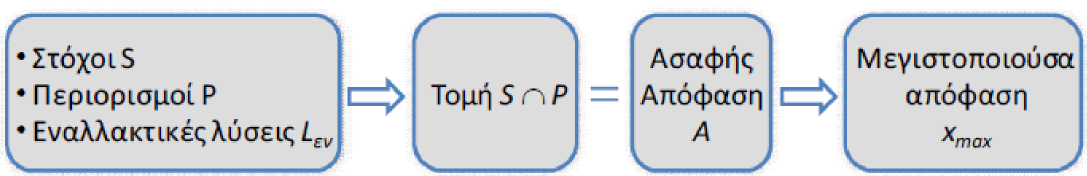
$$\mu_A(x) = \min\left(\mu_S(x),\ \mu_P(x) \right),\ x \in L_{εν} \tag{5.2}$$

Μποτζώρης και Παπαδόπουλος, 2015

Επειδή η τομή είναι πράξη **αντιμεταθετική**, δηλαδή τα S και P, μπορούν να αλλάζουν θέσεις (στόχοι – περιορισμοί ή περιορισμοί – στόχοι), μερικές φορές δεν είναι απαραίτητο να εξειδικεύουμε το ρόλο τους και απλά τα καλούμε αντικείμενα του προβλήματος.

Ασφαλώς οι λαμβάνοντες μια απόφαση θα επιθυμούσαν, ως αποτέλεσμα, ένα κλασσικό σύνολο, μια συγκεκριμένη τιμή δηλαδή ανάμεσα στα στοιχεία του συνόλου $[\alpha_1,\ \alpha_2] \subset L_{\varepsilon\nu}$ που να αποδίδει επαρκώς την ταυτότητα του ασαφούς συνόλου A. Αυτό σημαίνει **άρση της ασάφειας** του συνόλου A. Συνεπώς υιοθετούν την τιμή $x \in [\alpha_1,\ \alpha_2]$, που έχει τον υψηλότερο βαθμό συμμετοχής στο σύνολο A. Αυτή η τιμή του x, που μεγιστοποιεί την $\mu_A(x)$, λέγεται **μεγιστοποιούσα απόφαση**, (Σχήμα 5.2), και δίνεται από την:

$$x_{\max} = \left\{ x \,/\, \max \mu_A(x) = \max\ \min\left(\mu_S(x),\ \mu_P(x)\right) \right\} \tag{5.3}$$



Σχημα 5.2. Η Διαδικασια Ληψης Αποφασης με την Πραξη της Τομης Ασαφων Συνολων.

Διακριτά ασαφή σύνολα επανάληψη της διαδικασίας για κάθε εναλλακτική

Παράδειγμα: Εστω το σύνολο των εναλλακτικών λύσεων $L_{εν} = \{1,3,5,7\}$ και S οι στόχοι και P οι περιορισμοί οι οποίοι δίνονται από τα ασαφή σύνολα:

$$S = \{(1,\ 0.2),(3,\ 0.4),(5,\ 0.5),(7,\ 0.6)\}$$

$$P = \{(1,\ 0.8),(3,\ 0.4),(5,\ 0.3),(7,\ 0.1)\}$$

Η απόφαση δίνεται από την τομή:

$$A = S \cap P = \{(1,\ \min(0.2,0.8)),(3,\ \min(0.4,0.4)),(5,\ \min(0.5,0.3)),(7,\ \min(0.6,0.1))\}$$

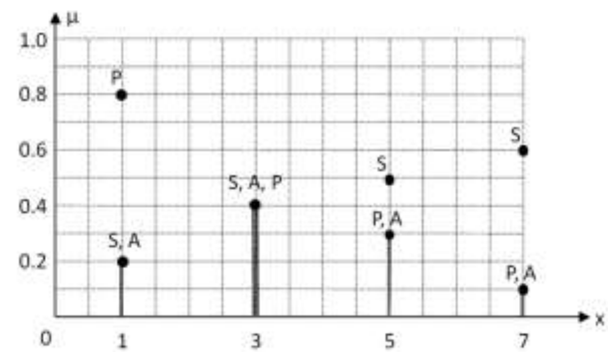
Άρα, (βλ. και Σχήμα 5.3):

$$A = \{(1,\ 0.2),(3,\ 0.4),(5,\ 0.3),(7,\ 0.1)\}$$

$$[\alpha_1,\ \alpha_2] = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$$

$$\sigma = 0.4$$

$$x_{\max} = 3$$



ΣΧΗΜΑ 5.3. Στόχοι (S), Περιορισμοί (P) και Απόφαση (A).

Αντί της τομής (και), που ορίστηκε ως το min, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν κι άλλες πράξεις της θεωρίας των ασαφών συνόλων για να καθορίσουν μια απόφαση.

Επιλογή της εναλλακτικής 3

Μποτζώρης και Παπαδόπουλος, 2015

Η φράση **«ελκυστικό οικονομικό κίνητρο»** είναι μια **γλωσσική μεταβλητή** και θεωρείται σαν ένα σύνολο **στόχων *S*** που από την περιγραφή του είναι ασαφές και καθορίζεται από το σύνολο **εναλλακτικών λύσεων** $L_{\varepsilon\nu} = \{x / 0 < x \leq 500\}$, όπου ***x*** το **αναμενόμενο οικονομικό κίνητρο** σε €**.**

Έστω ότι το ασαφές σύνολο των **στόχων *S*** από την πλευρά των υπαλλήλων (όπως δηλαδή αντιλαμβάνονται οι υπάλληλοι το «*ελκυστικό οικονομικό κίνητρο*») είναι εφοδιασμένο με μια συνάρτηση συμμετοχής:

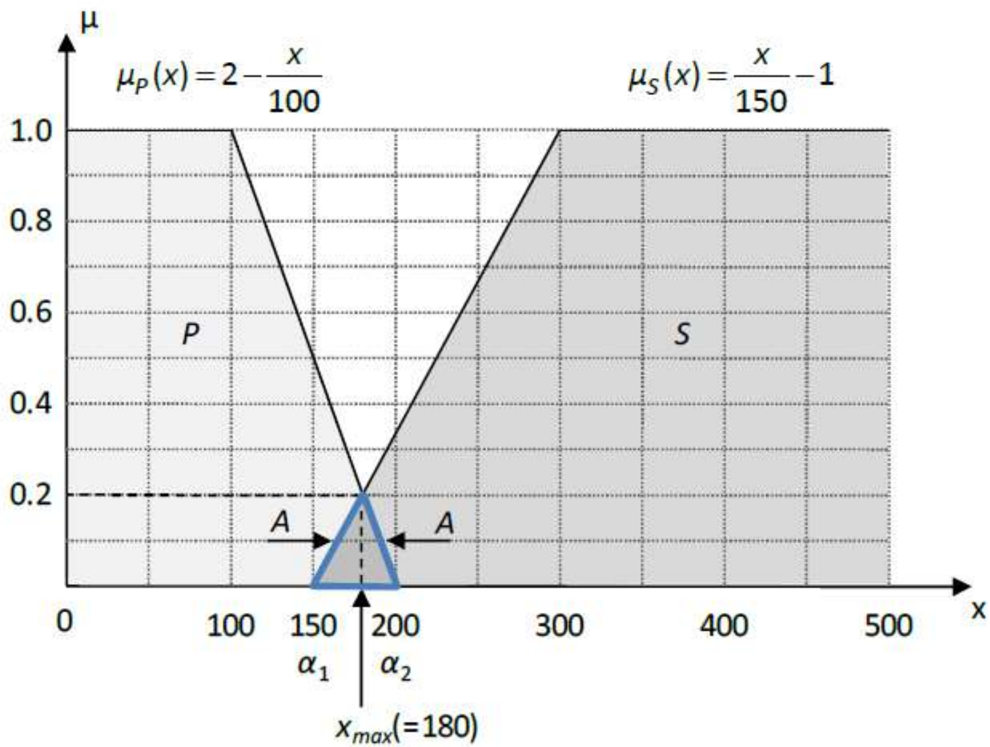
$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{για} \quad 0 < x \leq 150 \\ \dfrac{x}{150} - 1 & \text{για} \quad 150 \leq x \leq 300 \\ 1 & \text{για} \quad 300 \leq x \leq 500 \end{cases}$$

Το ασαφές σύνολο των **περιορισμών *P*** (η γλωσσική μεταβλητή «*μέτριο για το ταμείο της εταιρείας οικονομικό κίνητρο*» αφορά τη διοίκηση της εταιρείας) είναι εφοδιασμένο με συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_P(x) = \begin{cases} 1 & \text{για} \quad 0 < x \leq 100 \\ 2 - \dfrac{x}{100} & \text{για} \quad 100 \leq x \leq 200 \\ 0 & \text{για} \quad 200 \leq x \leq 500 \end{cases}$$

Το ασαφές σύνολο των **αποφάσεων *A*** έχει τη συνάρτηση συμμετοχής που φαίνεται στο Σχήμα 5.4 (επόμενη σελίδα).

Γραφική επίλυση



Σχημα 5.4. Στοχοι (S) , Περιορισμοι (P) και Αποφαση (A) στο Προβλημα Αποδοσης Οικονομικου Κινητρου.

Επίλυση με βελτιστοποίηση

Θεωρώ ότι η απόφαση θα βρίσκεται στη γκρίζα περιοχή

Επιθυμώ τη μέγιστη κοινή επίτευξη στόχων και περιορισμων

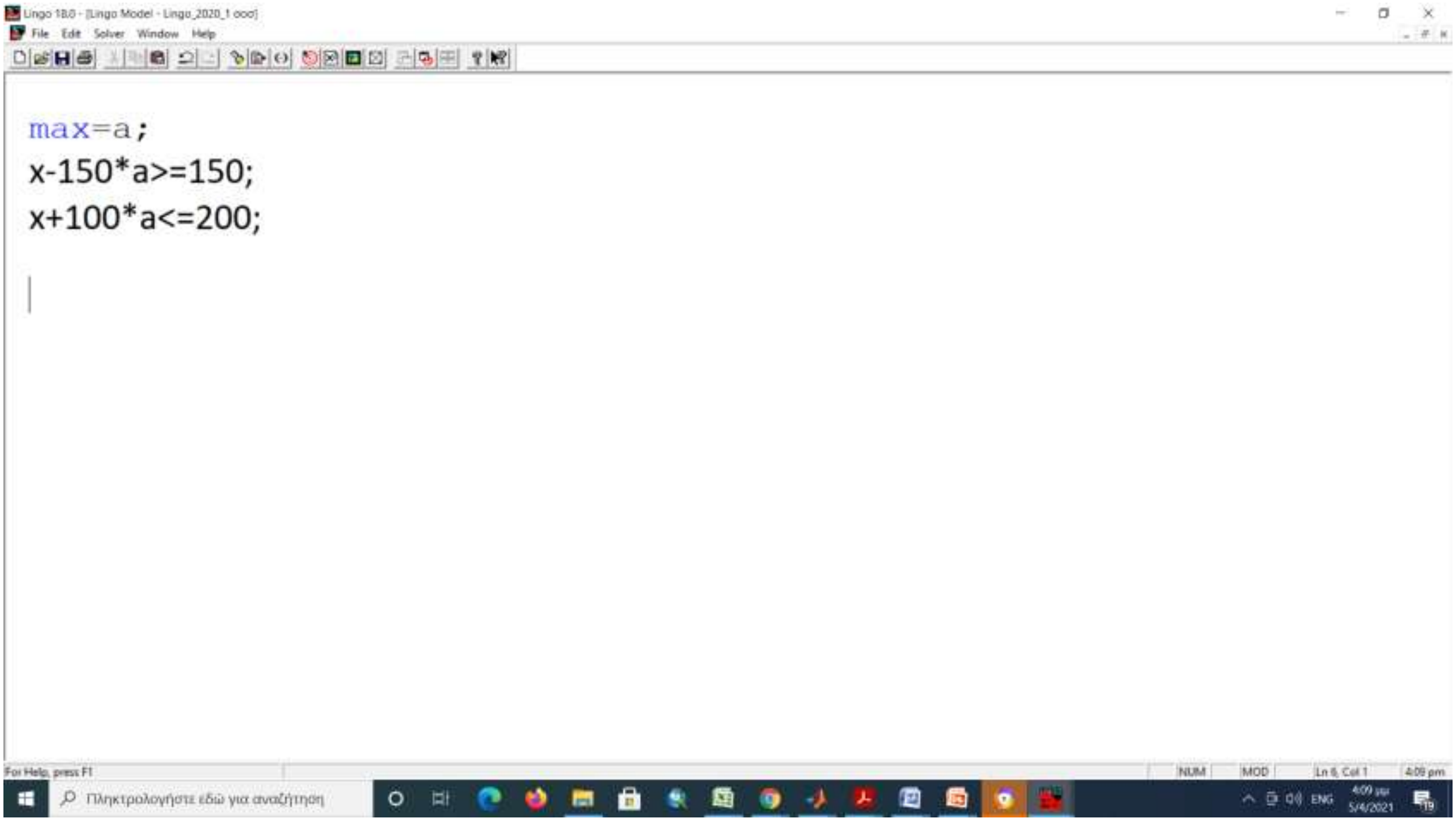
$$\max \alpha$$

Κοινή επίτευξη στόχων και περιορισμών

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{150} - 1 \geq a \Leftrightarrow x - 150 \geq 150a \Leftrightarrow x - 150a \geq 150 \\ \\ 2 - \dfrac{x}{100} \geq a \Leftrightarrow 200 - x \geq 100a \Leftrightarrow x + 100a \leq 200 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \max a \\ s.t. \\ x - 150a \geq 150 \\ \\ x + 100a \leq 200 \end{array}\right\} \rightarrow x = 180, a = 0.2$$

Lingo


Lingo 18.0 - [Lingo Model - Lingo_2020_1 ooo]
File Edit Solver Window Help
max=a;
x-150*a>=150;
x+100*a<=200;
For Help, press F1
NUM
MOD
Ln 6, Col 1
Πληκτρολογήστε εδώ για αναζήτηση
ENG
5/4/2021

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

Ορισμός (Σύνολο ασαφούς απόφασης): Έστω n ασαφείς στόχοι $\tilde{G}_1,\ldots,\tilde{G}_N$ και m ασαφείς περιορισμοί: $\tilde{C}_1,\ldots,\tilde{C}_M$. Τότε η ασαφής τομή των n στόχων και των m περιορισμών συνθέτει ένα σύνολο της απόφασης D.

$$D=\left(\tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 \cap \ldots \cap \tilde{G}_N\right) \cap \left(\tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2 \cap \ldots \cap \tilde{C}_M\right) \qquad (3.8)$$

Με βάση τον παραπάνω ορισμό το σύνολο απόφασης για τους στόχους και τους περιορισμούς προκύπτει από την τομή των αντίστοιχων N και M συναρτήσεων συμμετοχής.

Υιοθετώντας την min τομή προκύπτει:

$$\mu_D(x) = \min\left(\mu_{G_1}(x), \mu_{G_2}(x), \ldots, \mu_{G_n}(x), \mu_{C_1}(x), \mu_{C_2}(x) \cdot \ldots, \mu_{C_m}(x)\right) \qquad (3.9)$$

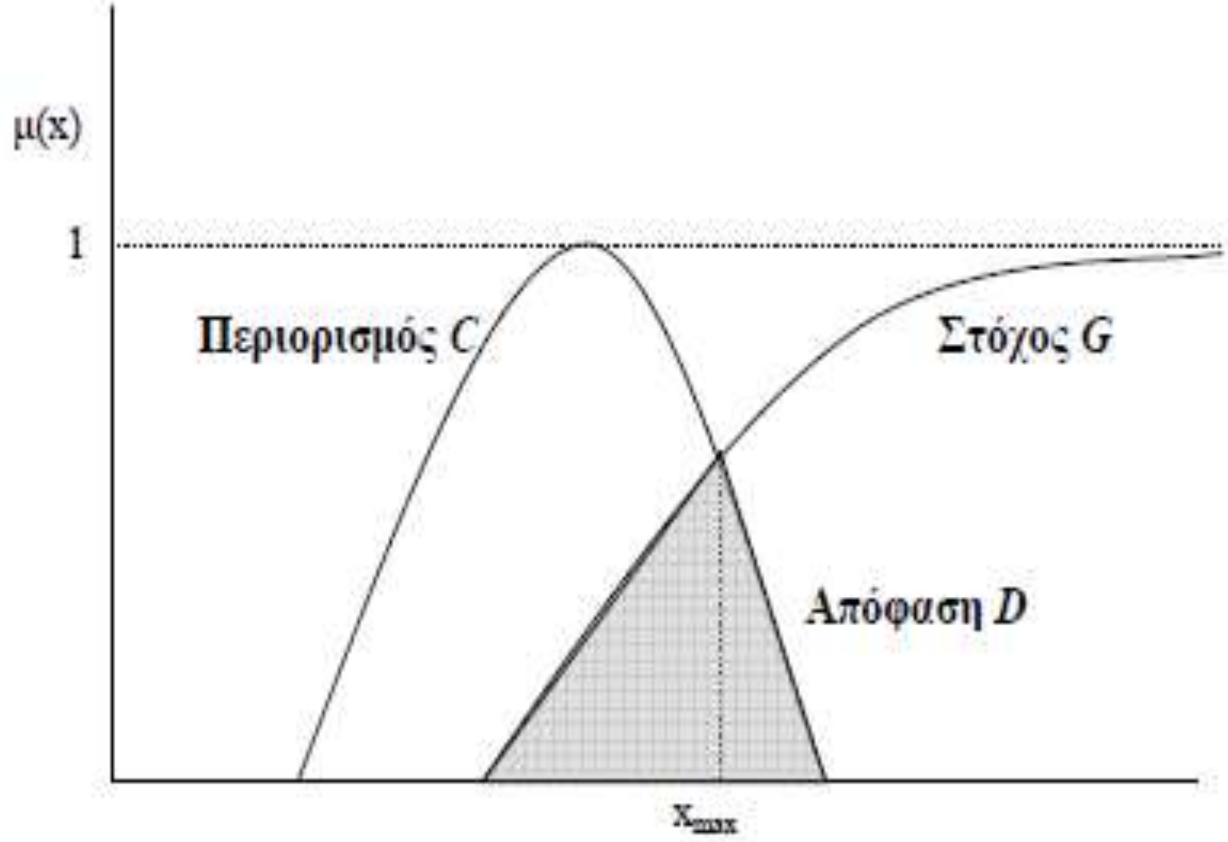
(Zimmerman, 1996)

Στην πιο γενική περίπτωση μπορεί να θεωρηθεί αντί της min τομής η γενική νόρμα της ασαφούς τομής.

Τελικά: Επιλογή συμβατικής λύσης

Με τον παραπάνω τρόπο προκύπτει ένα ασαφές σύνολο όπου ικανοποιούνται οι στόχοι και οι ασαφείς περιορισμοί σε κάποιο βαθμό. Έχει προταθεί η επιλογή της λύσης εκείνης για την οποία ικανοποιούνται οι στόχοι και οι περιορισμοί στο μέγιστο βαθμό. Το παραπάνω κριτήριο καθορίζει και την επιλογή του απο - ασαφοποιητή για το σύνολο της απόφασης. Έτσι επιλέγεται ο μέγιστος απο- ασαφοποιητής

$$x' = \left\{ x \,\middle|\, \mu_D(x) \text{ μέγιστο} \right\}$$



Σχήμα 3.6: Λήψη απόφασης σε ασαφές περιβάλλον

Μαυρωτάς, 2000, δ.δ.

Ισοδύναμα για max αποσαφοποιητή και min τομή

$$\max \alpha$$

υ.π

$$\mu_k(x) \geq \alpha, \; k = 1(1)K$$

$$\mu_j(x) \geq \alpha, \; j = 1(1)m$$

$$\alpha \in [0,1]$$

$$x \in X$$

Όπου η βοηθητική μεταβλητή α εκφράζει τον κοινό βαθμό ικανοποίησης όλων των συναρτήσεων στόχου αλλά και των ασαφών συναρτήσεων για τους περιορισμούς (συμμετρικό μοντέλο)

Κ το πλήθος των στόχων και m το πλήθος των ασαφών περιορισμών. Η εξίσωση 3.37 εκφράζει ένα συμμετρικό μοντέλο μεταξύ στόχων και περιορισμών.

Ο εύκαμπτος προγραμματισμός καλύπτει
την περίπτωση γραμμικών και μη
γραμμικών περιορισμών και συνάρτησης
στόχου
Περαιτέρω ασχολούμαστε αποκλειστικά
με τον εύκαμπτο γραμμικό προγραμματισμό
Και με γραμμικές συναρτήσεις συμμετοχής

Δημιουργία των συναρτήσεων συμμετοχής

Ασαφής εύκαμπτος γραμμικός προγραμματισμός

Τα προβλήματα του εύκαμπτου γραμμικού μονοστοχικού προγραμματισμού έχουν την παρακάτω μορφή:

$$\begin{cases} \max\,(\acute{\eta}\,\min)\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} A_{ij} x_i \tilde{\leq} B_j \quad j=1,\dots,m \\ x_i \geq 0 \end{cases} \tag{II.1}$$

Οι συμβολισμοί $\tilde{\leq}, \tilde{\geq}$ απεικονίζουν μία έκφραση του μεγαλύτερου ή ίσου και του μικρότερου ή ίσου όταν ενσωματώνουν την ασάφεια. Επίσης, οι μεταβλητές απόφασης είναι κλασσικοί αριθμοί.

Πότε καταλήγουμε σε γραμμικό προγραμματισμό?

- Το πρόβλημα του ***asαφούς γραμμικού προγραμματισμού*** καταλήγει σε γραμμικό προγραμματισμό συμβατικό, σε ορισμένες μόνο περιπτώσεις
  - Π.χ. Min τομή, max αποσαφοποιητής και γραμμικές συναρτήσεις συμμετοχής

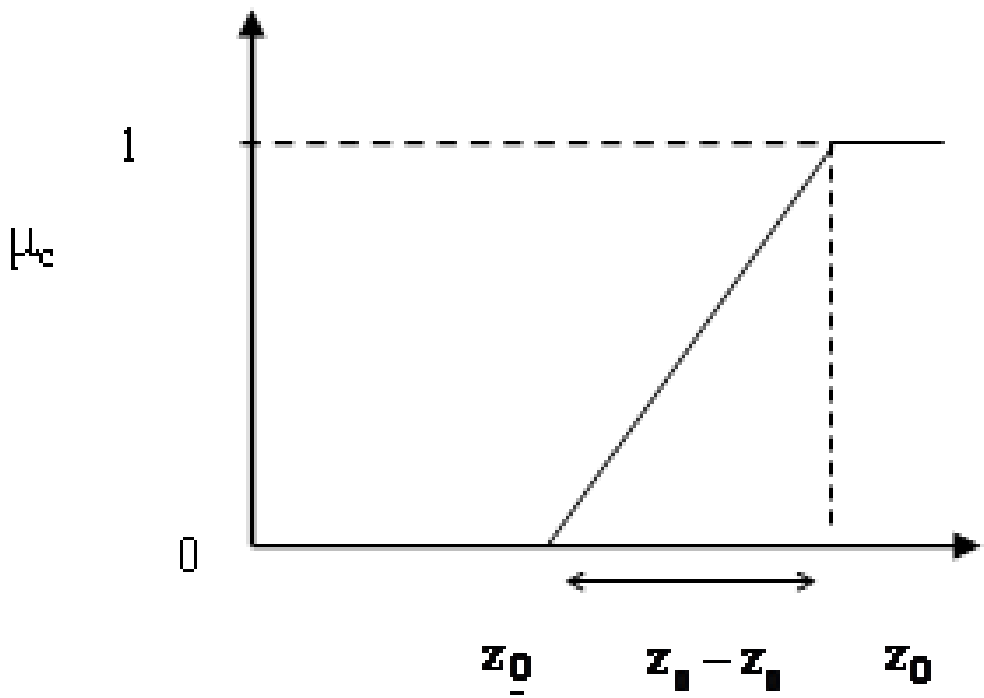
Σε αυτό το εδάφιο αναπτύσσονται ασαφείς γραμμικές συναρτήσεις συμμετοχής. Για τον στόχο της υπέρβασης ενός αριθμού η συνάρτηση συμμετοχής είναι (Σχ. 3.1):

$$\mu_c\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le z_{\underline{0}} \\ 1 & \text{αν} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ge z_0 \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - z_{\underline{0}}}{z_0 - z_{\underline{0}}} & \text{αν} \quad z_{\underline{0}} < \sum_{i=1}^{n} c_i x_i < z_0 \end{cases} \qquad (II.3)$$

όπου $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ η συνάρτηση στόχου,

$z_{\underline{0}}$ η κατώτερη αποδεκτή τιμή για τη συνάρτηση στόχου και

z_0 η τιμή στόχος για τη συνάρτηση στόχου.



Σχ. ΙΙ.1.Γραμμική συνάρτηση συμμετοχής για τη συνάρτηση στόχου.

Για τους ασαφείς περιορισμούς η αντίστοιχη συνάρτηση συμμετοχής μπορεί να έχει την παρακάτω μορφή:

$$\mu_j(\sum_{i=1}^{n} A_{ji}x_i) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad \sum_{i=1}^{n} A_{ji}x_i \geq B_j + t_j \\ 1 & \text{αν} \quad \sum_{i=1}^{n} A_{ji}x_i \leq B_j \\ 1 - \dfrac{\sum_{i=1}^{n} A_{ji}x_i - B_j}{t_j} & \text{αν} \quad B_j < \sum_{i=1}^{n} A_{ji}x_i < B_j + t_j \end{cases} \qquad (II.4)$$

όπου $t_j \geq 0$ ένα εύρος το οποίο υποδηλώνει ένα αποδεκτό εύρος για το δεξί σκέλος των περιορισμών και B_j η τιμή στόχος για τους περιορισμούς.

Min τομή, max αποσαφοποίηση, γραμμικές συναρτήσεις συμμετοχής

$$\max \quad \alpha$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \geq z_0 - (1-\alpha)(z_0 - z_{\underline{0}})$$

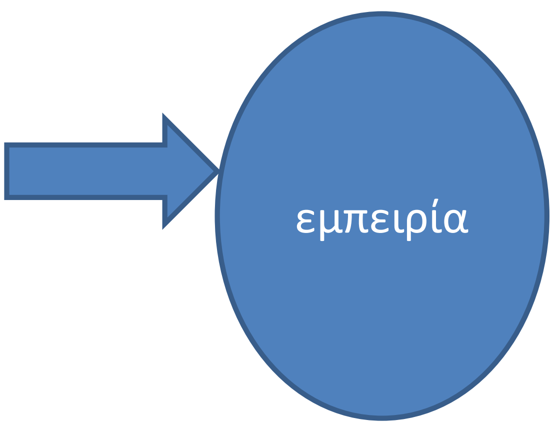
$$\sum_{i=1}^{n} A_{ji} x_i \leq B_j + (1-\alpha) t_j, \quad j = 1, \ldots, m$$

$$\alpha \in [0,1]$$

$$t_j, x_i \geq 0$$

Χρειάζονται δύο τιμές, το εύρος και το κατώφλι

Παράδειγμα συνάρτησης συμμετοχής **περιορισμων**



Περίπτωση γραμμικής συνάρτησης για τους περιορισμούς Περιορισμοί ύψους πίεσης

Ο παραπάνω περιορισμός μπορεί να περιγραφεί από μία μη φθίνουσα συνάρτηση συμμετοχής. Επιλέγεται η παρακάτω γραμμική συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_{pn,min} = \begin{cases} \dfrac{h_{pn} - h_{pn,min}}{t_n} & \alpha\nu \;\; h_{pn,min} \le h_{pn} \le h_{pn,min} + t_n \\ 1 & \alpha\nu \;\; h_{pn} \ge h_{pn,min} + t_n \\ 0 & \alpha\nu \;\; h_{pn} \le h_{pn,min} \end{cases} \quad , \; h_{pn} = \left(H_s - \sum_{(i.j)\in I_n} \sum_{m\in M_{i.j}} k_{i,j,m} x_{i,j,m} \right) - z_n \qquad (5)$$

Όπου $t_n \ge 0$, το εύρος του ασαφούς περιορισμού και $h_{pn,min}$ η ελάχιστα αποδεκτή τιμή για το πιεζομετρικό φορτίο. Όμοια κατασκευάζεται μία συνάρτηση στόχου για τον στόχο της ελαχιστοποίησης του κόστους.

Ασάφεια στους περιορισμούς ύψους πίεσης

- Πιθανές αλλαγές στο μέλλον, σχετικά με το απαιτούμενο πιεζομετρικό φορτίο
- Δυσμενής κόμβος από πλευρά υψομέτρου μπορεί να γίνει αίτιο υπερδιαστασιολόγησης

____

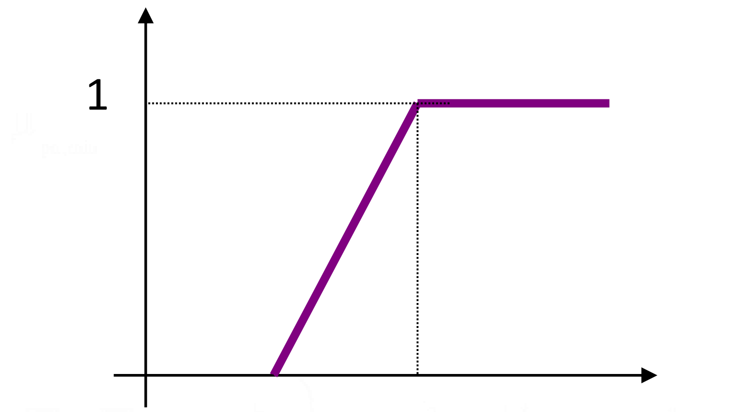
Υιοθέτηση ασάφειας στους περιορισμούς πιεζομετρικού φορτίου

$$\left(H_s - \sum_{(i,j)\in I_n} \sum_{m\in M_{i,j}} k_{i,j,m} x_{i,j,m}\right) - z_n \,\tilde{\geq}\, h_{n,min}$$

Ασάφεια στους περιορισμούς ύψους πίεσης (B)

- Ασαφές σύνολο: X>[0, 1]

- Απεικόνιση με την συνάρτηση συμμετοχής:



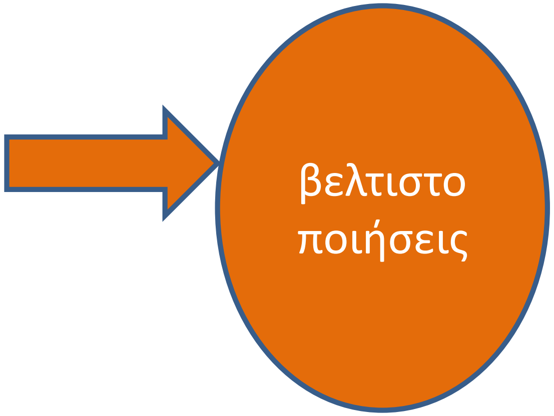
$$\mu_{pn,min} = \begin{cases} \dfrac{h_{pn} - h_{pn,min}}{t_n} & \alpha\nu \;\; h_{pn,min} \le h_{pn} \le h_{pn,min} + t_n \\ 1 & \alpha\nu \;\; h_{pn} \ge h_{pn,min} + t_n \\ 0 & \alpha\nu \;\; h_{pn} \le h_{pn,min} \end{cases}$$

- Για το κόστος προκύπτει αντίστοιχη συνάρτηση συμμετοχής με επαναληπτική διαδικασία με βάση την ασάφεια των περιορισμών

Συνάρτηση στόχου, χωρίς αρχική πληροφορία

- *Διαδραστική επίλυση*
- *Κατώφλια με βάση τους χαλαρούς και τους άκαμπτους περιορισμούς*
- *Γενίκευση με πολλαπλά κριτήρια*
- *Αλληλεπιδραστική διαδικασία*

Παράδειγμα συνάρτησης συμμετοχής **στόχου**



2. *Ο προσδιορισμός μιας σαφούς «απόφασης μεγιστοποίησης»*

Σύμφωνα με τη Werners (Werners,1987, Zimmermann,1996) δίνεται ο ακόλουθος ορισμός:

Έστω ότι $f{:}X \to \mathbb{R}^1$, είναι η αντικειμενική συνάρτηση,

$\tilde{R}$ = ασαφής περιοχή δυνατών λύσεων,

$S(\tilde{R})$ = πεδίο ορισμού του $\tilde{R}$ $(\alpha = 0)$ και

R^1 = α-τομή του $\tilde{R}$ για $\alpha = 1$.

Η συνάρτηση συμμετοχής του στόχου (αντικειμενική συνάρτηση) με δε
το χώρο λύσεων $\tilde{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$\mu_{\tilde{G}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{εάν} \quad f(x) \le \sup\limits_{R_1} f \\ \dfrac{f(x) - \sup\limits_{R_1} f}{\sup\limits_{S(\tilde{R})} f - \sup\limits_{R_1} f} & \text{εάν} \quad \sup\limits_{R_1} f < f(x) < \sup\limits_{S(\tilde{R})} f \\ 1 & \text{εάν} \quad \sup\limits_{S(\tilde{R})} f \le f(x) \end{cases}$$

Εάν λοιπόν θεωρήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα:

$$\text{Max } f(x) = \vec{c}^{\,T} \cdot \vec{x}$$

με τους περιορισμούς:

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot \vec{x} \,\tilde{\le}\, \vec{d} \\ x \ge 0 \end{array}\right\} \tilde{R}$$

Η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου είναι:

Διαδραστική
διαδικασία,

Συνάρτηση
στόχου
(αντικειμενική
συνάρτηση)
κέρδος

α) Κλασσικός γραμμικός προγραμματισμός

$$\text{Max } f(x) = \bar{c}^T \cdot \bar{x}$$

με τους περιορισμούς:

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot \bar{x} \leq \bar{d} \\ \bar{x} \geq \bar{0} \end{array}\right\}$$

Από την επίλυση αυτή θα προκύψει η $\sup_{R_1} f = (\bar{c}^T \cdot \bar{x})_{opt} = f_1 \, (\alpha = 1)$.

Η τομή $\alpha = 1$ αντιστοιχεί σε πραγματικούς αριθμούς.

β) Συμβατική αντικειμενική συνάρτηση- Ασαφείς περιορισμοί

$$\text{Max } f(x) = \bar{c}^T \cdot \bar{x}$$

με τους περιορισμούς:

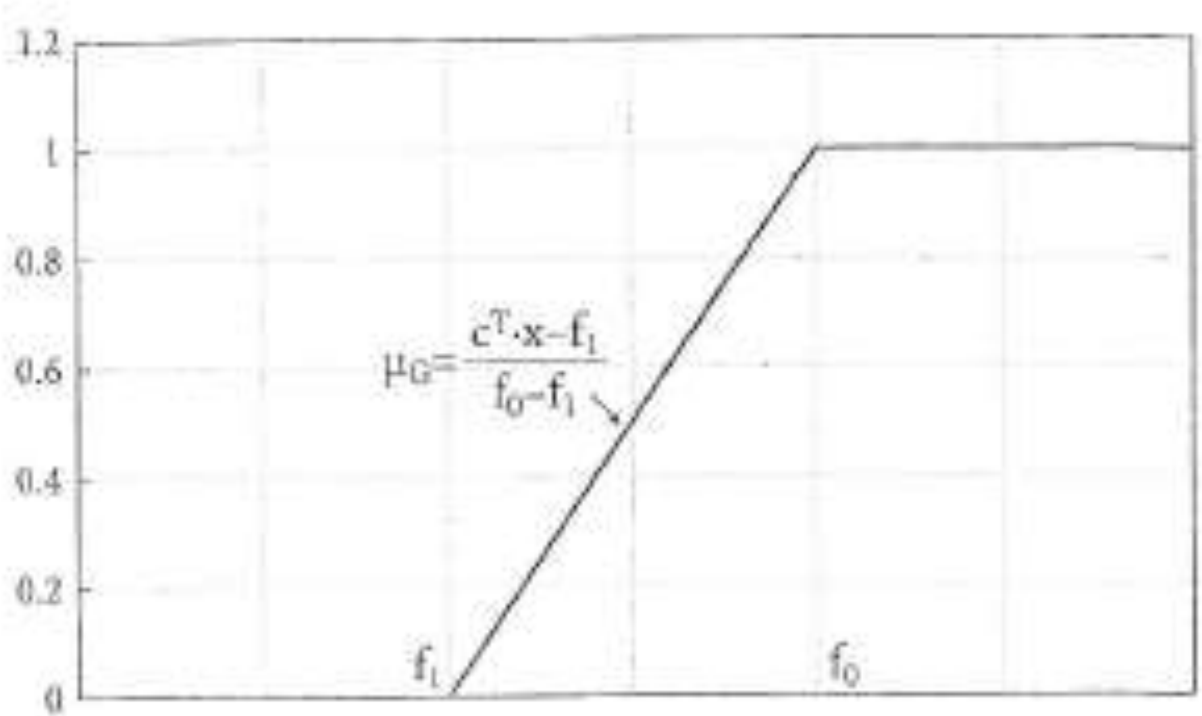
$$\left.\begin{array}{l} A \cdot \bar{x} \leq \bar{d} + \bar{p} \\ \bar{x} \geq \bar{0} \end{array}\right\}$$

Από την επίλυση αυτή θα προκύψει η $\sup_{S(\tilde{R})} f = (\bar{c}^T \cdot \bar{x})_{opt} = f_0$, $\alpha = 0$.

Η συνάρτηση συμμετοχής της αντικειμενικής συνάρτησης θα είναι λοιπόν:

$$\mu_{\tilde{G}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{εάν} \quad \bar{c}^T \cdot \bar{x} \leq f_1 \\ \dfrac{\bar{c}^T \cdot \bar{x} - f_1}{f_0 - f_1} & \text{εάν} \quad f_1 < \bar{c}^T \cdot \bar{x} < f_0 \\ 1 & \text{εάν} \quad f_0 \leq \bar{c}^T \cdot \bar{x} \end{cases}$$

Συνάρτηση συμμετοχής, συνάρτηση στόχου



Σχ. 4.10α

Τώρα έχει επέλθει η συμμετρία μεταξύ αντικειμενικής συνάρτησης και περιορισμών και επομένως η συνάρτηση συμμετοχής της απόφασης $\tilde{D}$ θα είναι:

$$\mu_{\tilde{D}} = \wedge(\mu_{\tilde{G}}(x), \mu_i(Ax)) = \mathrm{Min}\{\mu_{\tilde{G}}(x), \mu_i(Ax)\}, \ \ i=1,2,\ldots m.$$

Η απόφαση μεγιστοποίησης λοιπόν του ασαφούς συνόλου *«απόφαση»* θα είναι:

$$\mu_{\tilde{D}^M}(x) = \mathrm{Max}\mu_{\tilde{D}}(x) = \vee(\wedge(\mu_{\tilde{G}}(x), \mu_i(A \cdot x))) =$$
$$= \mathrm{Max}\min\{\mu_{\tilde{G}}(x), \mu_i(A \cdot x)\}, \ i=1,2,\ldots m.$$

Το πρόβλημα αυτό είναι το ίδιο με το ακόλουθο:

Maximize λ

με τους περιορισμούς:

$$\lambda \le \frac{\bar{c}^T \cdot \bar{x} - f_1}{f_0 - f_1}$$

$$\lambda \le \mu_i(A \cdot \bar{x}), \quad i=1,2,\ldots m$$

$$\lambda \le 1$$

$$\lambda, x \ge 0$$

ή

$$\lambda(f_0 - f_1) - c^T x \le -f_1$$

$$\lambda p_i + (Ax)_i \le d_i + p_i, \ \ i=1,2,\ldots m$$

$$\lambda \le 1$$

$$\lambda, \ x_i \ge 0, \ i=1,2,\ldots m.$$

Ασαφής επίλυση,
Min τομή,
γραμμικές
συναρτήσεις
συμμετοχής,
μέγιστος
αποσαφοποιητής

Αριθμητικό παράδειγμα

Δίνεται το παρακάτω μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{aligned} &\text{Maximize} \quad f = 2x_1 + x_2 \\ &\text{s.t.} \\ &\quad 3x_1 + x_2 \tilde{\leq} 12 \\ &\quad x_1 + 2x_2 \tilde{\leq} 6 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Οι μέγιστες αποδεκτές παραβιάσεις είναι:

$$p_1 = 2,\ p_2 = 3.$$

α) Στάδιο 1

Λύνουμε το ακόλουθο πρόβλημα σε συμβατικό(σαφές) περιβάλλον. Αυτό αντιστοιχεί σε ασαφή παραμετρικό προγραμματισμό με $\alpha = 1$.

$$\begin{aligned} &\text{Maximize} \quad f = 2x_1 + x_2 \\ &\text{s.t.} \\ &\quad 3x_1 + x_2 \tilde{\leq} 12 \\ &\quad x_1 + 2x_2 \tilde{\leq} 6 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Η λύση του προβλήματος αυτού είναι:

$$x_1 = 3.6,\ x_2 = 1.2,\ f = 8.4,\ f_1 = f = 8.4$$

β) Στάδιο 2

Λύνουμε το ακόλουθο Πρόβλημα σε ασαφές περιβάλλον-Σαφής αντικειμενική συνάρτηση και ασαφείς περιορισμοί, με $\alpha=0$ και τις μέγιστες ανεκτές παραβιάσεις.

$$\begin{aligned} &\text{Maximize} \quad f = 2x_1 + x_2 \\ &\text{s.t.} \\ &\quad 3x_1 + x_2 \tilde{\leq} 14 \\ &\quad x_1 + 2x_2 \tilde{\leq} 9 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Η λύση του προβλήματος αυτού είναι:

$$x_1 = 3.8,\ x_2 = 2.6,\ f = 10.2,\ f_0 = f = 10.2$$

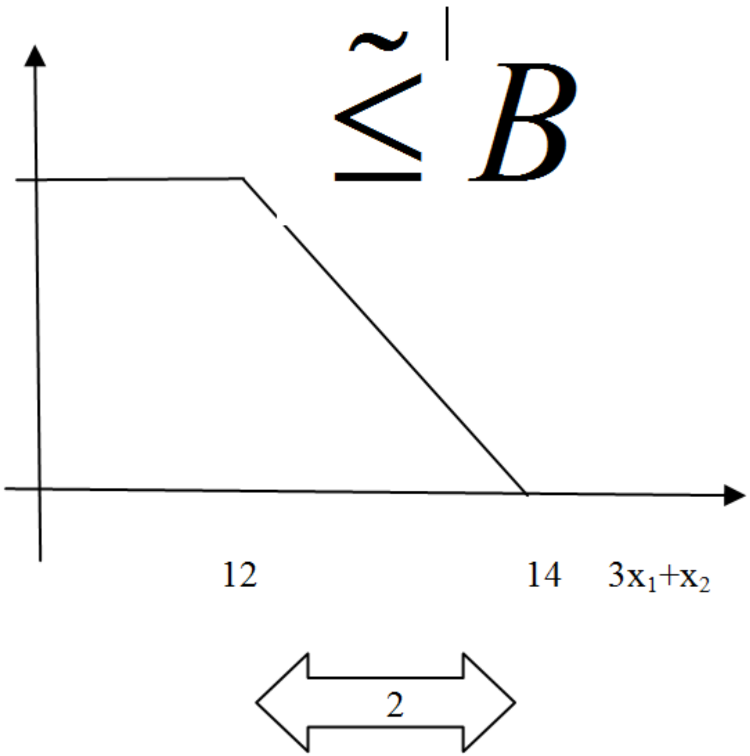
Δύο επιλύσεις για τους κλασσικούς και τους χαλαρούς περιορπεριορισμούς→2 κατώφλια για τη συνάρτηση στόχου

Στάδιο 1 και 2 χωρίς ασάφεια, τυπογραφικό λάθος

Συναρτήσεις συμμετοχής για τους περιορισμούς

$3x_1 + x_2 \tilde{\leq} 12$

- a priori πληροφορία



$$1 - \frac{((3x_1 + x_2) - 12)}{(14 - 12)} \geq \lambda$$

$$2 - (3x_1 + x_2) + 12 \geq 2\lambda$$

$$(3x_1 + x_2) + 2\lambda \leq 14$$

Διαδραστική διαδικασία,

Η συνάρτηση συμμετοχής της αντικειμενικής συνάρτησης είναι:

$$\mu_{\tilde{G}}(x) = \frac{c^T \cdot x - f_1}{f_0 - f_1} = \frac{2x_1 + x_2 - 8.4}{1.8}$$

Το ισοδύναμο πλέον ασαφές μοντέλο είναι:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize } \lambda \\
&\text{s.t.} \\
&\quad 1.8\lambda \quad -2x_1 - x_2 \le -8.4 \\
&\quad 2\lambda \quad +3x_1 + x_2 \le 14 \\
&\quad 3\lambda \quad +x_1 + 2x_2 \le 9 \\
&\quad \lambda \quad \le 1 \\
&\qquad \lambda,\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots m.
\end{aligned}$$

Η λύση αυτού του προβλήματος είναι:

$$x_1^0 = 3.7,\ x_2^0 = 1.9,\ \max f = 9.3,\ \lambda = 0.5$$

Τζιμόπουλος και Παπαδοπουλος

Βελτιστοποίηση με πολλαπλά κριτήρια: Μη αποτελεσματικές λύσεις

Στα πολυκριτηριακά προβλήματα βελτιστοποίησης η έννοια της βέλτιστης λύσης αντικαθίσταται από την έννοια της **αποτελεσματικής λύσης (!)** (efficient solution), η οποία βασίζεται στην έννοια της **κυριαρχίας** (dominance) (Δούμπος, 2004).

Πολλαπλά κριτήρια

Ικανοποίηση σε σχέση με την βελτιστοποίηση

1. Οποιαδήποτε εναλλακτική δραστηριότητα $x^* \in X$ είναι βέλτιστη, εάν και μόνο εάν για οποιαδήποτε άλλη εναλλακτική δραστηριότητα $x \in X$, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$u(x^*) > u(x) \quad ή \quad u(x^*) = u(x).$$

2. Το 1979 ο Herbert Simon (Zeleny, 1982), θεώρησε ότι η επιλογή να ικανοποιείς ή να αποδέχεσαι το «αρκετά καλό», είναι γενικά περισσότερο ρεαλιστική από την επιλογή της βελτιστοποίησης, της ικανοποίησης ή της ωφέλειας του λήπτη της απόφασης.

3. Ο Keen το 1977, (Zeleny, 1982), σημειώνει ότι η βελτιστοποίηση στην παραδοσιακή μαθηματική έννοια είναι αδύνατη, όταν εμπλέκονται πολλά κριτήρια. Ο Keen εισάγει τον όρον **ικανοποίηση (satisficing)** αντί για την **βελτιστοποίηση**, βασισμένον στο τί είναι δυνατό και επιθυμητό για τους λήπτες της απόφασης. Έτσι η έννοια της ικανοποίησης, συχνά θεωρείται ως μια κατάλληλη επέκταση και τροποποίηση της έννοιας της βελτιστοποίησης.

4.4.2 Η μη κυριαρχία

Η μη κυριαρχία (nondominance) εκφράζεται ως εξής:

Έστω $\vec{x}$ και $\vec{y}$ δύο διανύσματα με n συνιστώσες $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ και $(y_1, y_2, \ldots y_n)$:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n), \quad \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots y_n). \tag{4.89}$$

Θεωρούμε ότι το $\vec{x}$ κυριαρχεί στο $\vec{y}$ εάν:

$$x_i \geq y_i \quad i = 1, \ldots, n$$

n κριτήρια μεγιστοποίησης

και επιπλέον $x_i > y_i$ για τουλάχιστον ένα i, ή αναφερόμενοι στα διανύσματα, ορίζουμε ότι το διάνυσμα $\vec{x}$ κυριαρχεί στο διάνυσμα $\vec{y}$ εάν,

$$\vec{x} \geq \vec{y} \quad \text{και} \quad \vec{x} \neq \vec{y}. \tag{4.91}$$

Σημείωση: Όπως ήδη ειπώθηκε τα σύμβολα ≥, ≤, >, <, αποτελούν τελεστές που εκφράζουν προτίμηση.

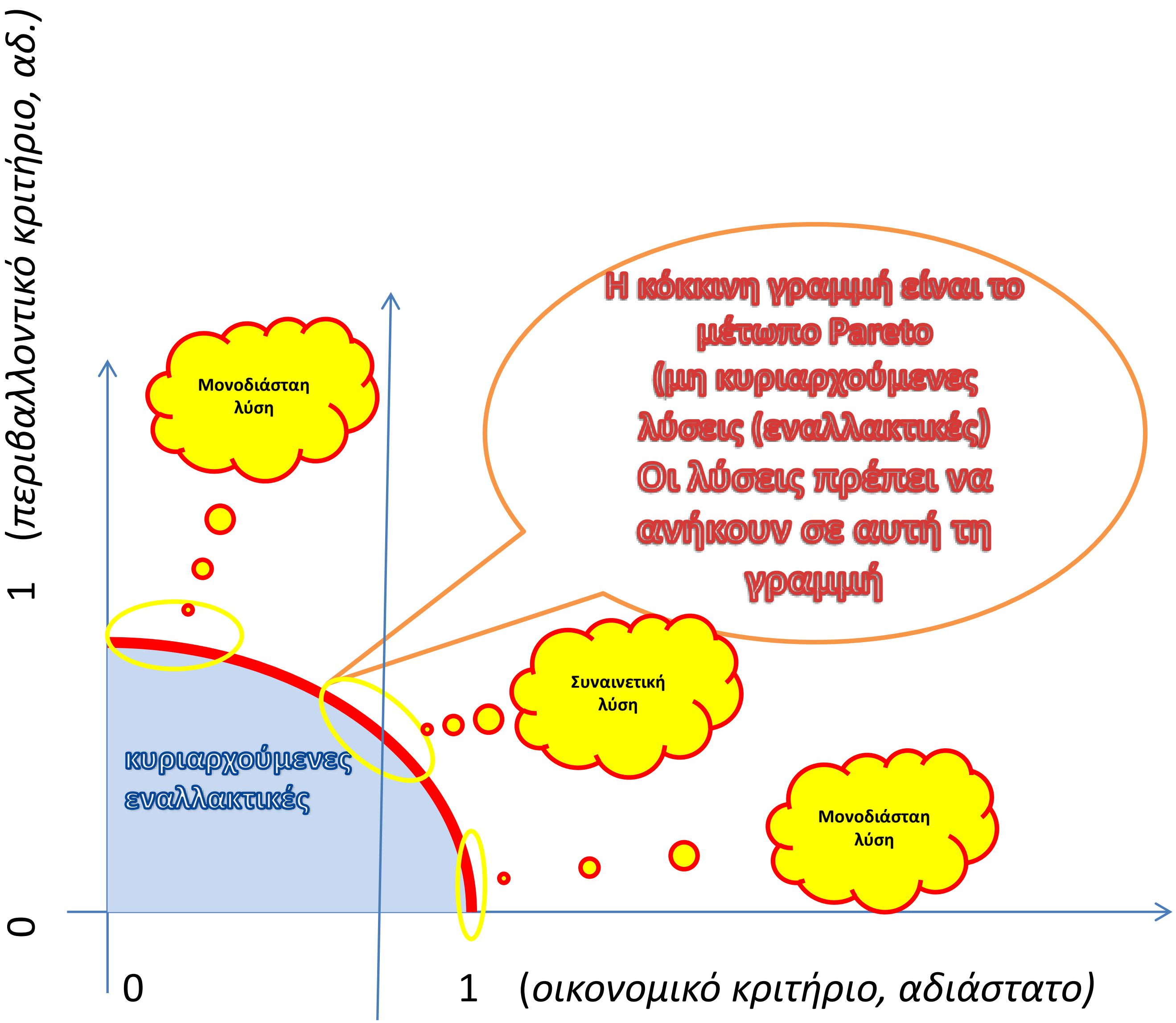
Οι δύο λύσεις θα ανήκουν στο πεδίο των εφικτών λύσεων

Μέτωπο Pareto

- Μέτωπο Pareto: Το σύνολο όλων των μη κατώτερων λύσεων (**παρατηρείστε ότι αν βελτιωθεί μία λύση ως προς ένα κριτήριο χειροτερεύσει ως προς ένα άλλο**)
- Η συμβιβαστική λύση(εις) πρέπει να ανήκει στο μέτωπο Pareto
- Παρατηρείστε ότι σε πολυκριτηριακά προβλήματα βελτιστοποίησης παριστάνουμε τις συναρτήσεις στόχου αντί των μεταβλητών απόφασης σε διαγράμματα.

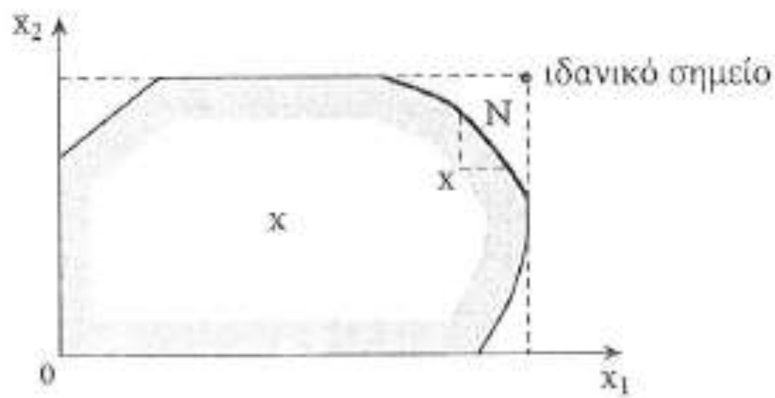
Υποθέτουμε ότι το x ανήκει σε ένα σύνολο X δυνατών λύσεων ή δυνατών εναλλακτικών δραστηριοτήτων. Τότε το x είναι *μη κυριαρχούμενο* στο X εάν δεν υπάρχει άλλο $\overline{x}$ τέτοιο ώστε: $\overline{x} \geq x$ και $\overline{x} \neq x$.


Η κόκκινη γραμμή είναι το μέτωπο Pareto
(μη κυριαρχούμενες λύσεις (εναλλακτικές)
Οι λύσεις πρέπει να ανήκουν σε αυτή τη γραμμή
κυριαρχούμενες εναλλακτικές


(περιβαλλοντικό κριτήριο, αδ.)
1
0
Μονοδιάσταση λύση
Η κόκκινη γραμμή είναι το μέτωπο Pareto (μη κυριαρχούμενες λύσεις (εναλλακτικές) Οι λύσεις πρέπει να ανήκουν σε αυτή τη γραμμή
Συναινετική λύση
κυριαρχούμενες εναλλακτικές
Μονοδιάσταση λύση
0
1
(οικονομικό κριτήριο, αδιάστατο)

Το σύνολο όλων των μη κυριαρχούμενων λύσεων στο Χ, ορίζεται ως Ν. Η κύρια ιδιότητα του Ν είναι ότι για κάθε κυριαρχούμενη λύση (δηλαδή δυνατές λύσεις που δεν ανήκουν στο Ν), μπορούμε να βρούμε μια λύση στο Ν στην οποία οι συνιστώσες του διανύσματος δεν είναι μικρότερες και τουλάχιστον μία είναι μεγαλύτερη.

Στο σχ. 4.28 το Χ είναι ένα σύνολο δυνατών λύσεων. Το σημείο x είναι κυριαρχούμενο από όλα τα σημεία της υποπεριοχής του Χ. Μόνο για τα σημεία του Ν, η υποπεριοχή αυτή της βελτιστοποίησης, εκτείνεται πέρα από τα όρια του Χ, στη περιοχή των μη δυνατών λύσεων. Έτσι τα σημεία του Ν αποτελούν τα μόνα σημεία που ικανοποιούν τους ορισμούς μας, ενώ όλα τα άλλα σημεία του Χ είναι κυριαρχούμενα.



Σχ. 4.28 Κυριαρχούμενο και μη κυριαρχούμενο σύνολο.

Αποτελεσματική λύση

- \`
  Ορισμός (ασαφής αποτελεσματική λύση): Έστω $X \subset M^{m}$ και K ο αριθμός των συναρτήσεων στόχων $f_k : X \to M$ προς μεγιστοποίηση. Έστω m ο αριθμός των ασαφών περιορισμών και K των αντίστοιχων συναρτήσεων συμμετοχής $\mu_j : X \to [0,1]$, j= 1, …, m. Ο πίνακας **x** ονομάζεται ασαφής αποτελεσματική λύση αν και μόνο αν δεν υπάρχει $\mathbf{x}' \in X$ ώστε:

$$\left(\text{γιακαθε} k = 1,\dots,K \ f_k(\mathbf{x}') \geq f_k(\mathbf{x})\right) \text{και} \left(\text{γιακαθε} j = 1,\dots,m \ \ \mu_j(\mathbf{x}') \geq \mu_j(\mathbf{x})\right)$$

$$\text{και} \left(\left(\text{υπαρχει} k_0 \in (1,\dots,K) \ f_{k0}(\mathbf{x}') > f_{k0}(\mathbf{x})\right) \text{ή} \left(\text{υπαρχει} j_0 \in (1,\dots,m) \ \mu_{j0}(\mathbf{x}') > \mu_{j0}(\mathbf{x})\right)\right)$$

(3.12)

Ασαφείς περιορισμοί και κλασσικές συναρτήσεις

Πίνακας πληρωμών, διαμόρφωση συνάρτησης συμμετοχής

Πίνακας 3.1: Πίνακας πληρωμών

	Z_1	Z_2	…	Z_K
Επίλυση υπό τους εύκαμπτους περιορισμούς				
x^{01}	$\sum_{i=1}^{n} c_{1i} X^{01}_{i}$	$\sum_{i=1}^{n} c_{2i} X^{01}_{i}$		$\sum_{i=1}^{n} c_{Ki} X^{01}_{i}$
…				
x^{0K}	$\sum_{i=1}^{n} c_{1i} X^{0K}_{i}$	$\sum_{i=1}^{n} c_{2i} X^{0K}_{i}$		$\sum_{i=1}^{n} c_{Ki} X^{0K}_{i}$
Επίλυση υπό τους άκαμπτους περιορισμούς				
x^{11}	$\sum_{i=1}^{n} c_{1i} X^{11}_{i}$	$\sum_{i=1}^{n} c_{2i} X^{11}_{i}$		$\sum_{i=1}^{n} c_{Ki} X^{11}_{i}$
…				
x^{1K}	$\sum_{i=1}^{n} c_{1i} X^{1K}_{i}$	$\sum_{i=1}^{n} c_{2i} X^{1K}_{i}$		$\sum_{i=1}^{n} c_{Ki} X^{1K}_{i}$

Όπως αναφέρθηκε η επιλογή του min τελεστή δε δίνει κατ᾽ ανάγκη αποτελεσματικές λύσεις. Ο Li, 1990 πρότεινε την εύρεση αποτελεσματικής λύσης σε δύο βήματα.

Στο πρώτο βήμα επιλύεται το κλασσικό πρόβλημα του ασαφούς γραμμικού προγραμματισμού με τη χρήση της min τομής:

$$\max \alpha$$

υ.π.

$$\mu_k(x) \geq \alpha,\ k = 1(1)K \qquad (3.13)$$

$$\alpha \in [0,1]$$

$$x \in X$$

Παράγεται μία λύση με κοινό επίπεδο ικανοποίησης των συναρτήσεων συμμετοχής για τις συναρτήσεις στόχου α′. Αν η λύση αυτή είναι μοναδική (κάτι που δεν είναι εύκολο να ελεγχθεί) είναι αποτελεσματική.

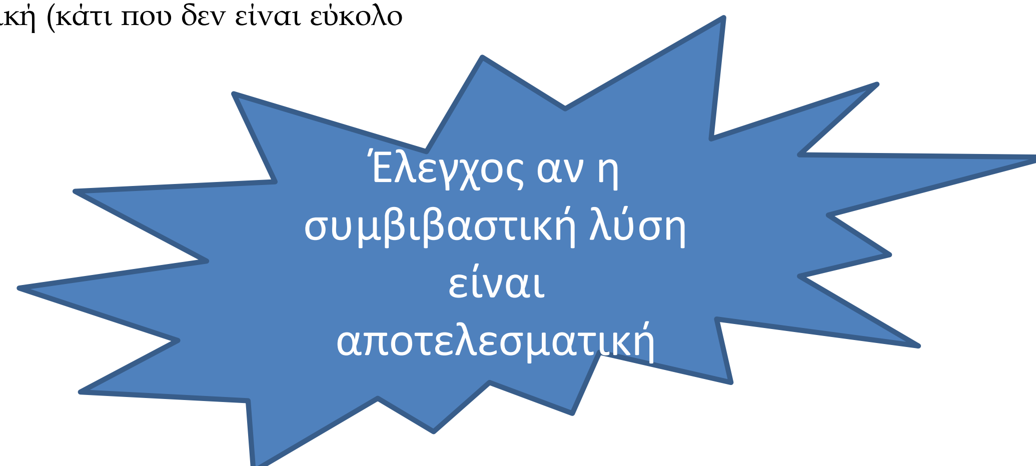
Κατόπιν επιλύεται το παρακάτω πρόβλημα:

$$\max \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\mu_K(x)$$

υ.π.

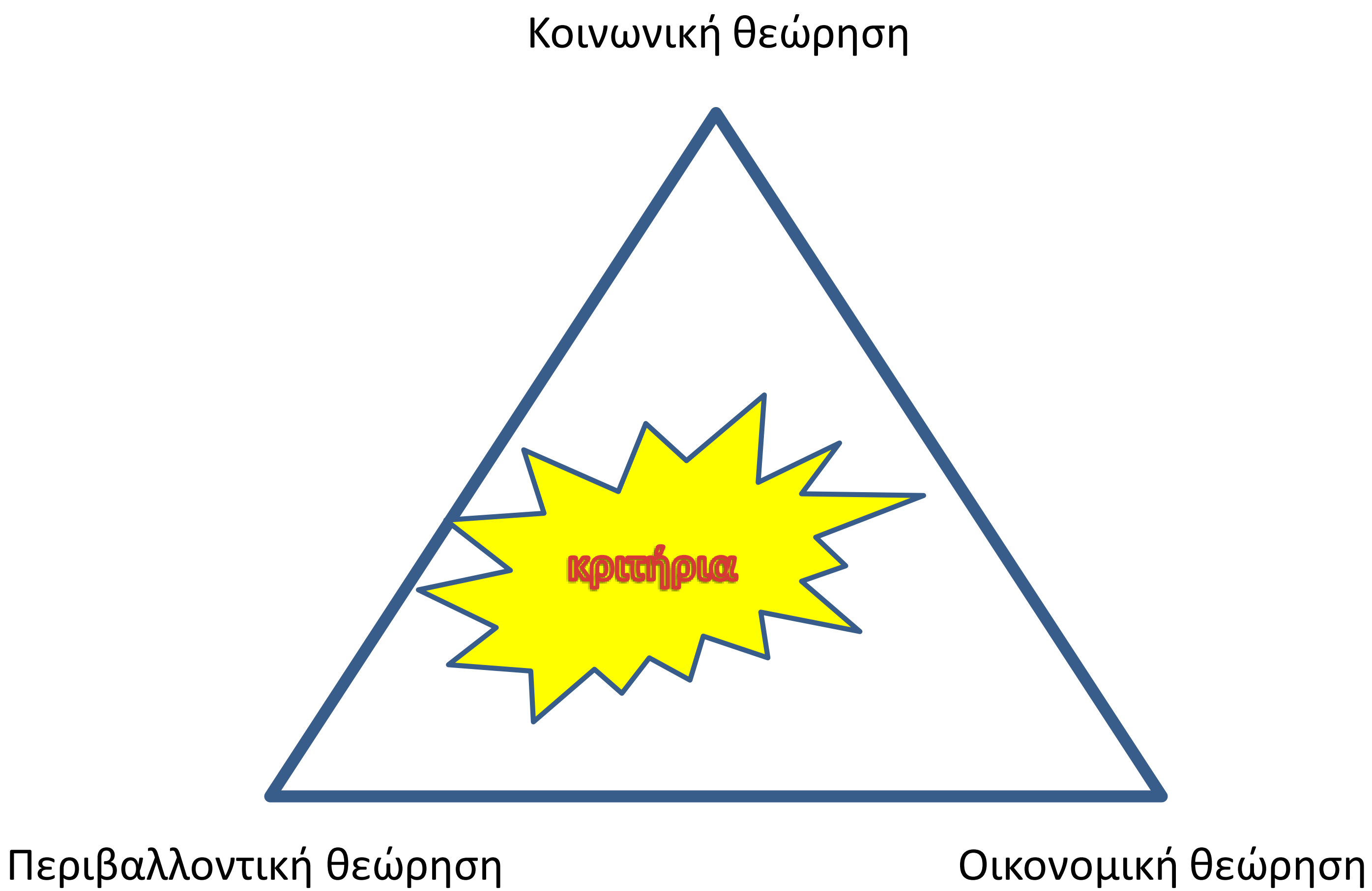
$$\mu_k(x) \geq \alpha',\ \forall k = 1(1)K$$

$$x \in X$$



Αν οι λύσεις των δύο προβλημάτων ταυτίζονται τότε η αρχική λύση είναι κυρίαρχη. Ειδάλλως, από τη δεύτερη εξίσωση έχει παραχθεί κυρίαρχη λύση με κοινό βαθμό ικανοποίηση α′ για όλους τους στόχους.

Ολιστική προσέγγιση



Η εφικτότητα των λύσεων (τεχνολογία, μέσα, τοπικές τεχνικές συνθήκες) μπορεί να οριστεί στο κοινό τόπο ή ως ξεχωριστός άξονας

Κριτήρια

- Εξαρτώνται από τους στόχους
- Κριτήρια κόστους, προσοχή στη χρονική βάση, από πολλούς διαχωρίζονται τα κόστη σε ξεχωριστά κριτήρια (και όχι ενοποίηση με βάση τη διαχρονική αξία του χρήματος)
- Εναλλακτικά, κριτήριο κόστους ανά κυβικό μέτρο νερό που ενσωματώνει αναπτυξιακά κριτήρια (επομένως εμπεριέχεται και ένα όφελος) προκρίνει όμως μεγάλα έργα
- Κοινωνικές επιπτώσεις (π.χ. από κατάκλιση μιάς έκτασης)
- Περιβαλλοντικές επιπτώσεις (φράγμα αποτελεί μία μη ήπια παρέμβαση στο περιβάλλον), ωστόσο ενδέχεται να έχει και θετικές επιπτώσεις
- Οφέλη: π.χ. προστασία από πλημμύρα
- Κριτήρια τεχνικής εφικτότητας
- Κριτήρια ποιότητας νερού

Προγραμματισμός Δυνατοτήτων

Π.Δ. ασαφώς ορισμένο πρόβλημα

- Ο προγραμματισμός δυνατοτήτων είναι εξ΄ ορισμού ένα ασθενώς ορισμένο πρόβλημα και η έννοια της κυριαρχίας πρέπει να επαναδιατυπωθεί, ενώ επιδέχεται μάλλον υποκειμενικές εκτιμήσεις. Σύμφωνα με τους Inuiguchi et al., 1994 δεδομένου ότι το πρόβλημα του προγραμματισμού δυνατοτήτων είναι ένα πρόβλημα ασθενώς ορισμένο, κρίσιμο σημείο αποτελεί η ερμηνεία των ασαφών ανισοτήτων.

Κρίσιμο σημείο

- Πράγματι, υπάρχει μία πληθώρα ερμηνειών των ασαφών ανισοτήτων πολλές από τις οποίες υιοθετούν μία ελαστική ερμηνεία ενώ άλλες μία συντηρητικότερη ερμηνεία τους (π.χ. Rommelfanger, 1996). Συνεπώς, η ερμηνεία των ασαφών ανισοτήτων αποτελεί σε μεγάλο βαθμό μια υποκειμενική απόφαση του αναλυτή που καθορίζει την λύση. Στον τρόπο ερμηνείας των ασαφών ανισοτήτων θα πρέπει να συνεκτιμηθεί η υπολογιστική απλότητα και η επίτευξη της γραμμικότητας.

Έχει επικρατήσει η ονομασία του προγραμματισμού δυνατοτήτων για την περίπτωση όπου οι συντελεστές τόσο για τις μεταβλητές απόφασης όσο και το δεξί σκέλος των ανισοτήτων αποτελείται από ασαφείς αριθμούς. Η ασάφεια στον προγραμματισμό δυνατοτήτων δεν οφείλεται στην ανοχή ως προς την ικανοποίηση ενός στόχου αλλά στις παραμέτρους του μοντέλου (Delgardo et al., 1989). Συνεπώς το πρόβλημα έχει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_{ki} x_i , \quad k = 1,\dots,K \\ \sum_{i=1}^{n} \tilde{A}_{ij} x_i \le \tilde{b}_j , \quad j = 1,\dots,m \\ x_i \ge 0 \end{cases},$$

όπου $\tilde{C}_{ki}$, $\tilde{A}_{ij}$, $\tilde{b}_j$ ασαφείς αριθμοί. (4.1)

Συνάρτηση στόχου

Πολλές φορές για τις συναρτήσεις στόχου είναι γνωστό εκ των προτέρων ένας ασαφής στόχος με την παρακάτω μορφή,

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_{ki} x_i \geq \tilde{z}_k \tag{4.2}$$

Όπου $\tilde{z}_k$ ασαφής αριθμός.

Ασαφείς ανισότητες, ερμηνεία???????!!!!!!

Ορισμός *(πρώτη θεώρηση):* Έστω A και B ασαφείς αριθμοί. Ο ασαφής αριθμός A θεωρείται μικρότερος του ασαφούς αριθμού B αν ισχύει:

$A_\alpha \leq \inf B_\alpha$ για όλες τις τομές που παράγονται για όλα τα $\alpha \in (0,1]$.

Ο παραπάνω ορισμός για τον ασαφή γραμμικό προγραμματισμό και για την περίπτωση των ασαφών τριγωνικών αριθμών είναι ισοδύναμος με:

$$\sum_{i=1}^{n} A_0{}^{+}{}_{ij} x_i \,\tilde{\leq}\, b_0{}^{-}{}_{j} \text{ για όλα τα } \alpha \in (0,1]. \tag{4.4}$$

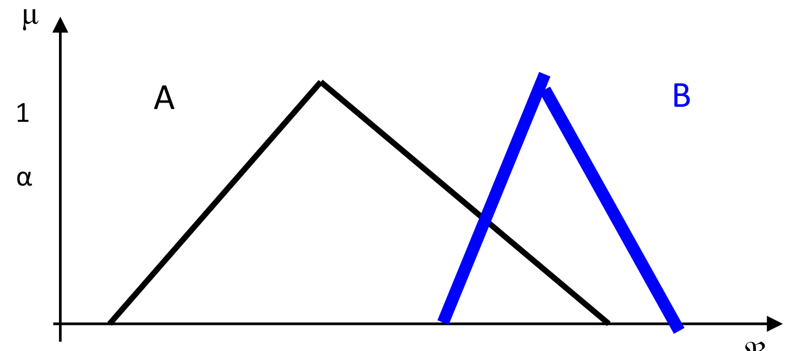
Η παραπάνω προσέγγιση είναι μάλλον αρκετά συντηρητική.

Ορισμός *(δεύτερη θεώρηση):* Έστω A και B ασαφείς αριθμοί. Ο ασαφής αριθμός A θεωρείται μικρότερος του ασαφούς αριθμού B αν ισχύει:

$\inf A_\alpha \leq \inf B_\alpha$ και $\sup A_\alpha \leq \sup B_\alpha$ για όλες τις τομές που παράγονται για όλα τα $\alpha \in (0,1]$. (4.5)

Για την περίπτωση των ασαφών τριγωνικών αριθμών $\tilde{A} = \left(A^{-}_{ij}, A^{0}_{ij}, A^{+}_{ij}\right)$, στον ασαφή γραμμικό προγραμματισμό ακολουθώντας τον 2ο ορισμό προκύπτει:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{A}_{ij} x_i \leq \tilde{b}_j \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} A_0{}^{-}{}_{ij} x_i \,\tilde{\lesssim}\, b_0{}^{-}{}_j \\ \sum_{i=1}^{n} A_0{}^{+}{}_{ij} x_i \,\tilde{\lesssim}\, b_0{}^{+}{}_j \\ \sum_{i=1}^{n} A_0{}^{0}{}_{ij} x_i \,\tilde{\lesssim}\, b_0{}^{0}{}_j \end{array} \right\}$$



Σχ.4.3: Ερμηνεία των ασαφών ανισοτήτων με την α - τομή

Για παράδειγμα, για την περίπτωση όπου οι συντελεστές για τις μεταβλητές απόφασης είναι κλασσικοί αριθμοί το πρόβλημα του ασαφούς γραμμικού προγραμματισμού γίνεται (Klir and Yuan, 1996):

$$
\left.\begin{array}{l}
\max \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
\sum_{i=1}^{n} A^{-}{}_{ij} x_i \;\tilde{\lesssim}\; b_0{}^{-}{}_{j} \\
\sum_{i=1}^{n} A^{+}{}_{ij} x_i \;\tilde{\lesssim}\; b_0{}^{+}{}_{j} \\
\sum_{i=1}^{n} A^{0}{}_{ij} x_i \;\tilde{\lesssim}\; b_0{}^{0}{}_{j}
\end{array}\right\} \qquad (4.8)
$$

$x_i >= 0$

Ασάφεια μόνο ως προς τους συντελεστές και τους σταθερούς όρους, πρόβλημα «πιο αυστηρό»

Μεταβλητές απόφασης ασαφείς αριθμοί

- οι ασαφείς συναρτήσεις στόχοι και οι ασαφείς περιορισμοί ερμηνεύονται με τη βοήθεια ασαφών ανισοτήτων ενώ οι μεταβλητές απόφασης είναι ασαφείς αριθμοί.

- Ο αναλυτής μπορεί να συνθέσει σύμφωνα με την κρίση του την επιπρόσθετη (ή συνθετική) συνάρτηση στόχου προς βελτιστοποίηση, η οποία κατευθύνει την λύση. Η συνθετική συνάρτηση στόχου για παράδειγμα μπορεί να είναι το κέντρο μιας συνάρτησης στόχου κ.λ.π

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \tilde{X}_i \geq \tilde{z} \tag{4.27}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij} \tilde{X}_i \leq \tilde{B}_j, \ j = 1,\ldots,m \tag{4.28}$$

όπου $\tilde{z}, \tilde{B}_j$ **και** $\tilde{X}_i = (a_i, w_i)_T$**, οι μεταβλητές απόφασης είναι συμμετρικά τριγωνικοί αριθμοί.**

$\tilde{X}_i = (a_i, w_i)_T, \ w_i \geq 0$**,**

όπου a_i **και** w_i **το κέντρο και το ημιπλάτος του ασαφούς αριθμού** $\tilde{X}_i$ **αντίστοιχα, με την παρακάτω συνάρτηση συμμετοχής:**

$$\mu_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \ \ x_i \leq a_i - w_i, \ \ x_i \geq a_i + w_i \\ 1 - \dfrac{a_i - x_i}{w_i} & \text{αν} \ \ a_i \geq x_i \geq a_i - w_i \\ 1 + \dfrac{a_i - x_i}{w_i} & \text{αν} \ \ a_i \leq x_i \leq a_i + w_i \end{cases} \tag{4.29}$$

Ερμηνεία ασαφών ανισοτήτων

Ορισμός: **Έστω** $A=(a,w_1)$ και $B=(b,w_2)$ **Α.Σ.Τ.Α. Η ασαφής ανισότητα** $\tilde{A} \le \tilde{B}$ **για επιλεγμένο επίπεδο α (Tanaka et al, 2000) ορίζεται από τις παρακάτω δύο ανισότητες (βλ. σχήμα 3):**

$$a+(1-\alpha)\cdot w_1 \le b+(1-\alpha)w_2$$
$$a-(1-\alpha)\cdot w_1 \le b-(1-\alpha)w_2$$

όπου $\alpha \in [0,1]$ **ένα προεπιλεγμένο επίπεδο.**

Αισιόδοξη προσέγγιση, υψηλή ζήτηση υψηλή διαθεσιμότητα

Αν θεωρηθεί μία συνθετική συνάρτηση στόχου η οποία είναι μία συνάρτηση χρησιμότητας, ως συνάρτηση των κέντρων και των ημιπλατών των ασαφών αριθμών, προσδίδοντας κατά την επιθυμία του αναλυτή μία επιπλέον κατεύθυνση στη λύση όπως παρακάτω (Tsakiris and Spiliotis, 2004):

$$\max \; \left(k_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} p_{ij} a_i + k_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left|e_{ij}\right| w_i\right), \tag{4.30.α}$$

(ή min)

υ.π.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} g_{ij} a_i + (1-\alpha) \cdot \sum_{i=1}^{n} \left|g_{ij}\right| w_i &\leq d_j + (1-\alpha) q_j \\ \sum_{i=1}^{n} g_{ij} a_i - (1-\alpha) \cdot \sum_{i=1}^{n} \left|g_{ij}\right| w_i &\leq d_j - (1-\alpha) q_j \end{aligned} \tag{4.30.β}$$

όπου k_1 και k_2 επιλεγμένα βάρη για τη συνθετική συνάρτηση στόχου. Επιπλέον, p_i και q_i πρέπει να είναι μεγαλύτερα από μηδέν, p_i και q_i τα βάρη του κέντρου και της ακτίνας για την i^{th} ασαφή μεταβλητή απόφασης.

Οι ασαφείς συμμετρικά τριγωνικοί αριθμοί είναι υποπεριπτώσεις των L- R τριγωνικών αριθμών. Στη γενική περίπτωση οι πράξεις μεταξύ ασαφών αριθμών ορίζονται με βάση την επέκταση του κανόνα. Η πρόσθεση και η αφαίρεση ΑΣΤΑ καθώς και ο πολλαπλασιασμός κλασσικού αριθμού με ΑΣΤΑ παράγουν νέους ΑΣΤΑ που μπορούν να προσδιορισθούν αναλυτικά. Έστω, οι παρακάτω ασαφείς αριθμοί:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left\langle a, w_A \right\rangle_T \\ \tilde{B} &= \left\langle b, w_B \right\rangle_T \end{aligned} \tag{17.2}$$

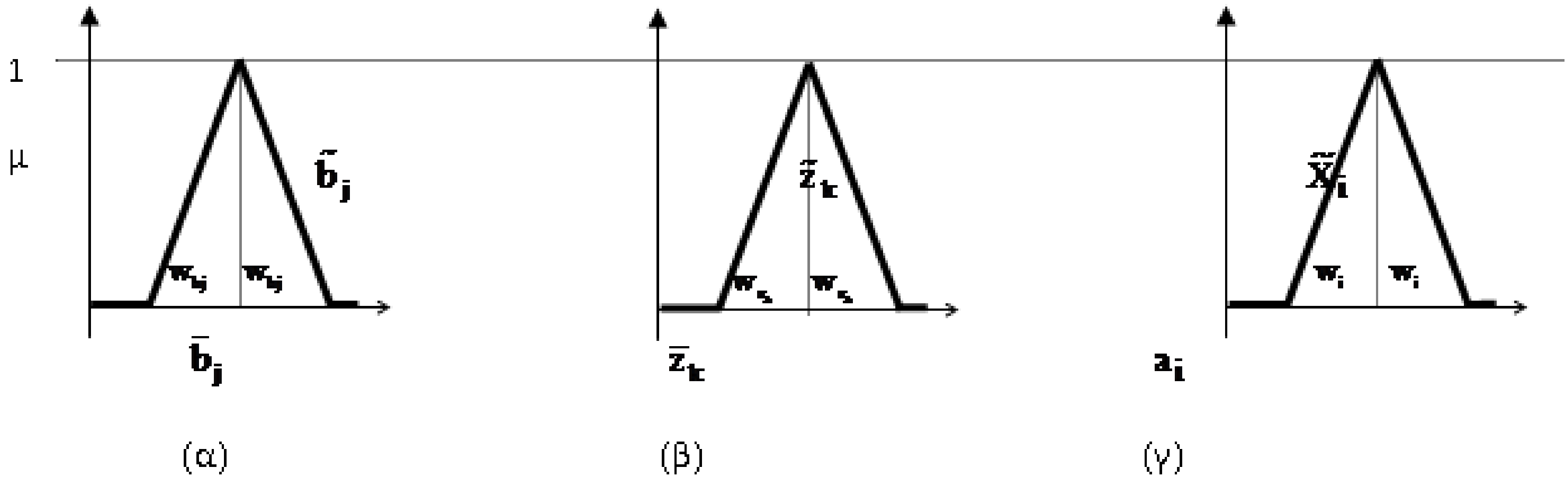
τότε ορίζονται οι παρακάτω πράξεις των ασαφών αριθμών:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \left\langle a, w_A \right\rangle_T + \left\langle b, w_B \right\rangle_T = \left\langle a + b, w_A + w_B \right\rangle_T \tag{17.3}$$

$$\lambda \tilde{A} = \left\langle \lambda a, |\lambda| w_A \right\rangle_T \tag{17.4}$$

$$\tilde{A} - \tilde{B} = \left\langle a, w_A \right\rangle_T - \left\langle b, w_B \right\rangle_T = \left\langle a, w_A \right\rangle_T + \left\langle -b, w_B \right\rangle_T = \left\langle a - b, w_A + w_B \right\rangle_T \tag{17.5}$$

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση των ασαφών αριθμών είναι περισσότερο πολύπλοκος και υπάρχουν προσεγγιστικές σχέσεις για τον προσδιορισμό τους (π.χ Dubois and Prade, 1979 & Klir and Yuan 1995). Είναι προφανές ότι δεν αποτελούν αντίστροφες πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης αντίστοιχα.



Σχήμα 17.1. Γραφική παράσταση των συναρτήσεων συμμετοχής για τους ΑΣΤΑ: $\tilde{b}_j$(α), $\tilde{z}_k$(β) και $\tilde{X}_i$(γ)

Ερμηνεία ασαφών ανισοτήτων

- για τις συναρτήσεις στόχου:

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ik} a_i \quad + (1-\alpha) \cdot \sum_{i=1}^{n} |c_{ik}| w_i \quad \geq \bar{z}_k + (1-\alpha) w_{z_k}, \ k = 1, \ldots, K$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_{ik} a_i \quad - (1-\alpha) \cdot \sum_{i=1}^{n} |c_{ik}| w_i \quad \geq \bar{z}_k - (1-\alpha) w_{z_k}, \ k = 1, \ldots, k \qquad (17.11.\alpha)$$

- για τους περιορισμούς:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij} a_i \quad + (1-\alpha) \cdot \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}| w_i \quad \leq \bar{b}_j + (1-h) w_{bj}, \ j = 1, \ldots, m$$
$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij} a_i \quad - (1-\alpha) \cdot \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}| w_i \quad \leq \bar{b}_j - (1-h) w_{bj}, \ j = 1, \ldots, m \qquad (17.11.\beta)$$

Με βάση την παραπάνω μορφή είναι προφανής η συμμετρία μεταξύ στόχων και περιορισμών.

Νέα συνάρτηση στόχου (συνάρτηση «χρησιμότητας»

Ως συνάρτηση χρησιμότητας επιλέγεται η κάτωθι:

$$\max \ (k_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} p_{ij} a_i + k_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |e_{ij}| w_i) \qquad (17.12.α)$$

(ή min)

όπου k_1 και k_2 επιλεγμένα βάρη για την επιπρόσθετη συνάρτηση στόχου. Επιπλέον p_i και q_i πρέπει να είναι μεγαλύτερα από μηδέν, p_i και q_i τα βάρη του κέντρου και της ακτίνας για την i^{στη} ασαφή μεταβλητή απόφασης (Tanaka et al., 2000).

- Με τη συνάρτηση χρησιμότητας ο αναλυτής μπορεί:
- να κατευθύνει τη λύση περισσότερο σε ένα στόχο, για παράδειγμα θέτοντας ως συνάρτηση χρησιμότητας την κεντρική τιμή μιας συνάρτησης στόχου
- να επιλέξει τη συνολική ασάφεια του μοντέλου θέτοντας $k_1 = 0$ και υιοθετώντας μία συνάρτηση των ημιπλατών για μεγιστοποίηση
- να επιλέξει μία πολυκριτηριακή συνάρτηση χρησιμότητας που να συνθέτει το σύνολο των κριτηρίων.

Για την τελευταία περίπτωση όπου υπάρχουν πολλαπλές ζητήσεις μπορεί να υιοθετηθεί η παρακάτω συνάρτηση πολυκριτηριακής χρησιμότητας:

$$f = \sum_{i=1}^{I} K_i f_i(a, W) \tag{17.12.β}$$

όπου:

K_i : το βάρος που αντιστοιχεί στη χρήση νερού i ανά κέντρο κατανάλωσης

I: ο αριθμός των ζητήσεων νερού (κέντρα κατανάλωσης)

$f_i(a, W)$: η συνάρτηση χρησιμότητας για κάθε χρήστη νερού ανά κέντρο κατανάλωσης

(Tsakiris and Spiliotis, 2004).

Υπενθυμίζεται ότι στην τελική σχηματοποίηση τα κέντρα κατανάλωσης διαχωρίζονται με βάση χωρικές ενότητες, τα συστήματα διανομής και τις χρήσεις του νερού.

Εφαρμογή

Ένα απλό υδατικό σύστημα διανομής νερού παρουσιάζεται στο Σχήμα 17.4. Αποτελείται από έξι κόμβους διαθεσιμότητας επιφανειακού νερού NO_1, NO_2, N_1, N_2, N_3, N_4. Τα κέντρα κατανάλωσης A_1 και A_2 λαμβάνουν νερό από τους κόμβους διαθεσιμότητας N_1 και N_2. Αποτελεί ζητούμενο ο προσδιορισμός των ποσοτήτων νερού που διατίθενται από τον κόμβο N_1 στο κέντρο κατανάλωσης 1 (μεταβλητή απόφασης x_1) και η ποσότητα νερού από τον κόμβο N_2 στο κέντρο κατανάλωσης 2 (μεταβλητή απόφασης x_2), έτσι ώστε το οικονομικό κέρδος να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο, ενώ παράλληλα να εξασφαλίζονται οι ελάχιστα επιτρεπόμενες ποσότητες νερού κατάντη (οικολογική παροχή, νερό για άλλους χρήστες).

Δεδομένα:

Οι διαθέσιμες ποσότητες νερού στον κλάδο NO_1-N_1 : V_1 =66 μονάδες όγκου (UV), σε τουλάχιστον ετήσια βάση

Διαθέσιμες ποσότητες νερού στον κλάδο NO_2-N_2 : V_2 = 59 μονάδες όγκου (UV), σε τουλάχιστον ετήσια βάση

P_1, P_2 οι μέγιστες καταναλώσεις νερού στα κέντρα κατανάλωσης 1 και 2 αντίστοιχα:

P_1 = 55 UV

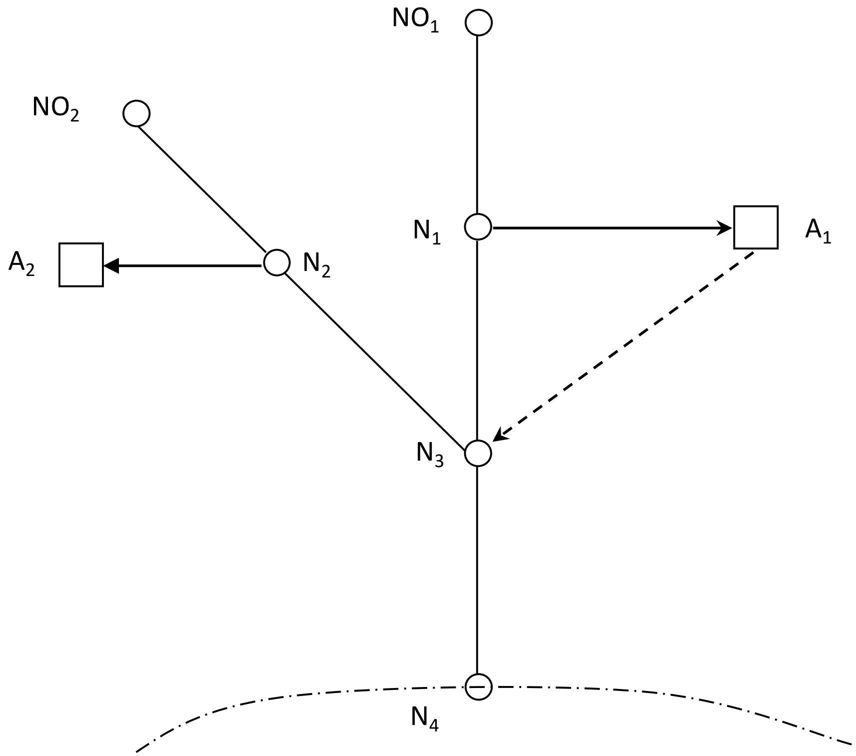
P_2 = 41 UV

Το ποσοστό του επαναχρησιμοποιημένου νερού που επιστρέφει στον κόμβο διαθεσιμότητας νερού N_3 έχει εκτιμηθεί στο 70% από καταναλωμένες ποσότητες του κέντρου κατανάλωσης 1.

Οι απαιτούμενες ποσότητες νερού για κατανάλωση νερού κατάντη, αλλά και για την εξασφάλιση της οικολογικής παροχής στους κάδους N_3 – N_4, N_2 – N_3 έχουν εκτιμηθεί σε 47 και 8UV.

Η συνάρτηση στόχου που αρχικά διαμορφώθηκε, στοχεύει στη μεγιστοποίηση του οικονομικού οφέλους από την εκμετάλλευση των ποσοτήτων νερών από τους χρήστες P_1 και P_2 είναι η παρακάτω:

$$\max\ (x_1 + 1.5 \cdot x_2)$$



Σχήμα 17.4. Σχηματική αναπαράσταση ενός απλού υδατικού συστήματος.

Κλασσικό πρόβλημα

$$
\begin{aligned}
&\max\ (x_1 + 1.5 \cdot x_2) \\
&x_1 \le 66 \\
&x_2 \le 59 \\
&x_1 \le 55 \\
&x_2 \le 41 \\
&125 - 0.7 \cdot x_1 - x_2 \ge 47 \\
&59 - x_2 \ge 8 \\
&x_1,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
\qquad (17.23)
$$

Επιλύοντας το παραπάνω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού επιτυγχάνεται η παρακάτω λύση: $x_1 = 52.857$ UV, $x_2 = 41$ UV, με βάση τις οποίες επιτυγχάνεται η μέγιστη οικονομική απόδοση $z^* = 114.35$ BU .

Οι διαθέσιμες ποσότητες όγκου νερού στους κλάδους NO_1-N_1 και NO_2-N_2 , με δυνατότητα τουλάχιστον ετήσιας ρύθμισης, εκφράζονται με τη μορφή ΑΣΤΑ:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1 &= (56,66,76)_T = \langle 66,10 \rangle_T \\ \tilde{V}_2 &= (49,59,69)_T = \langle 59,10 \rangle_T \end{aligned} \tag{17.24}$$

Το επιδιωκόμενο οικονομικό όφελος εκφράζεται με τη μορφή ΑΣΤΑ:

$$\tilde{z} = (75,90,105)_T = \langle 90,15 \rangle_T \tag{17.25}$$

Η μέγιστη δυνατή κατανάλωση για τον καταναλωτή 1 και 2 εκφράζονται επίσης ως ΑΣΤΑ αντίστοιχα:

$$\tilde{p}_1 = (49,52,55)_T = \langle 52,3 \rangle_T \tag{17.26}$$

$$\tilde{p}_2 = (37,39,41)_T = \langle 39,2 \rangle_T \tag{17.27}$$

Το ελάχιστα επιτρεπτό επίπεδο για την παροχή στους κλάδους $N_3 - N_4$ και $N_2 - N_3$ μπορεί να εκφρασθεί με την μορφή ΑΣΤΑ αντίστοιχα:

$$Q\tilde{N}_1 = (45,47,49)_T = \langle 47,2 \rangle_T \tag{17.28}$$

και $Q\tilde{N}_2 = (5,8,11)_T = \langle 8,\ 3 \rangle_T$ (17.29)

Περιβαλλοντικοί περιορισμοί

Με δεδομένο ότι οι μεταβλητές απόφασης $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ είναι Α.Σ.Τ.Α, η ασαφής συνάρτηση $\tilde{X}_1 + 1.5 \cdot \tilde{X}_2$ με βάση την επέκταση του κανόνα (π.χ. Klir and Yuan 1995) θα έχει το παρακάτω κέντρο και ακτίνα:

$$\begin{pmatrix} (a_1 + 1.5 \cdot a_2 - w_1 - 1.5 \cdot w_2),\ (a_1 + 1.5 \cdot a_2), \\ (a_1 + 1.5 \cdot a_2 + w_1 + 1.5 \cdot w_2) \end{pmatrix} \tag{17.30}$$

Ομοίως, η συνάρτηση $(0.7 \cdot \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2)$ περιγράφεται ως κάτωθι:

$$\begin{pmatrix} (0.7 \cdot a_1 + a_2 - 0.7 \cdot w_1 - w_2),\ (0.7 \cdot a_1 + a_2), \\ (0.7 \cdot a_1 + a_2 + 0.7 \cdot w_1 + w_2) \end{pmatrix}_T \tag{17.31}$$

Ασαφής αριθμητική

Επίσης, προσδιορίζονται οι διαφορές των παρακάτω ασαφών αριθμών για τους σταθερούς όρους των περιορισμών:

$$\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 = \langle 66, 10 \rangle_T + \langle 59, 10 \rangle_T = \langle 125, 20 \rangle_T = (105, 125, 145)_T \qquad (17.32)$$

$$\tilde{V}_2 - Q\tilde{N}_2 = \langle 59, 10 \rangle_T - \langle 8, 3 \rangle_T = \langle 51, 13 \rangle_T = (38, 51, 64)_T \qquad (17.33)$$

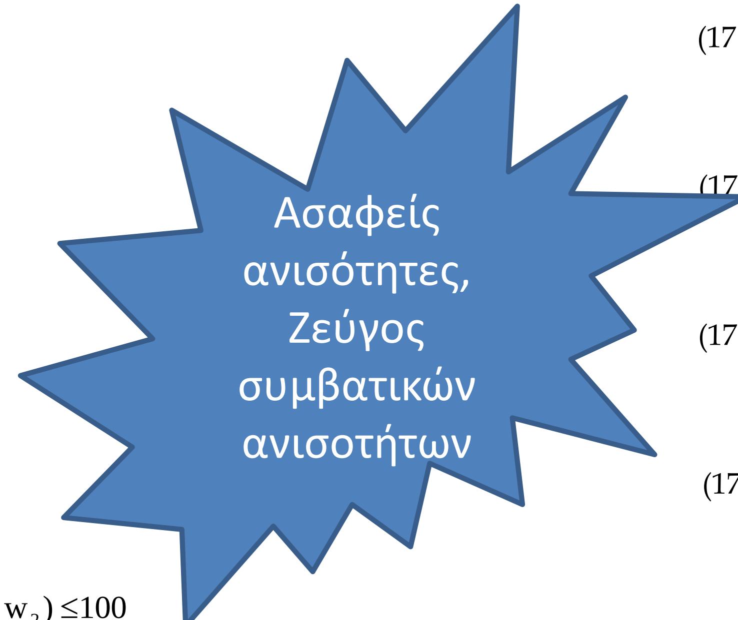
$$\left(\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2\right) - Q\tilde{N}_1 = \langle 125, 20 \rangle_T - \langle 47, 2 \rangle_T = \langle 78, 22 \rangle_T = (56, 78, 100)_T \qquad (17.34)$$

Διερευνάται η επίλυση του προβλήματος για α =0 (γραμμικός προγραμματισμός διαστημάτων) με βάση τις παρακάτω περιορισμούς με βάση τις Εξ.17.11:

$$\begin{aligned} & a_1 + 1.5 \cdot a_2 + w_1 + 1.5 \cdot w_2 \geq 105 \\ & a_1 + 1.5 \cdot a_2 - w_1 - 1.5 \cdot w_2 \geq 75 \end{aligned} \qquad (17.35.\alpha)$$

$$\begin{aligned} & a_2 + w_2 \leq 69 \\ & a_2 - w_2 \leq 49 \end{aligned} \qquad (17.35.\beta)$$

$$\begin{aligned} & a_1 + w_1 \leq 76 \\ & a_1 - w_1 \leq 56 \end{aligned} \qquad (17.35.\gamma)$$



$$\begin{aligned} & a_1 + w_1 \leq 55 \\ & a_1 - w_1 \leq 49 \end{aligned} \qquad (17.35.\delta)$$

$$\begin{aligned} & a_2 + w_2 \leq 41 \\ & a_2 - w_2 \leq 37 \end{aligned} \qquad (17.35.\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} & (0.7 \cdot a_1 + a_2) + (0.7 \cdot w_1 + w_2) \leq 100 \\ & (0.7 \cdot a_1 + a_2) - (0.7 \cdot w_1 + w_2) \leq 56 \end{aligned} \qquad (17.35.\sigma\tau)$$

$$\begin{aligned} & a_2 + w_2 \leq 64 \\ & a_2 - w_2 \leq 38 \end{aligned} \qquad (17.35.\zeta)$$

$$a_2 \geq 0, a_2 \geq 0, w_1 \geq 0, \ w_2 \geq 0 \qquad (17.35.\eta)$$

(Νέα) Συνάρτηση στόχου κατευθύνω τη λύση σε κατεύθυνση που επιθυμώ (1)

-*Περίπτωση 1*

Επιλέγοντας $k_2 = 0$ και $p_{ij} = c_i$ επιθυμείται η επίτευξη του μέγιστου κέντρου για τον ασαφή αριθμό που εκφράζει το επιδιωκόμενο κέρδος:

$$\text{Max}\ (a_1 + 1.5a_2) \qquad (17.36)$$

- *Περίπτωση 2*

Επιλέγοντας $k_1 = 0$ και $e_{ij} = c_i$ επιθυμείται η επίτευξη του ελάχιστου πλάτους, δηλαδή της ελάχιστης αβεβαιότητας για το κέρδος, αλλά και της ασάφειας γενικότερα της λύσης, εξασφαλίζοντας ωστόσο μέσω της ασαφούς ανισότητας (Εξ. 17.35.α) ένα ελάχιστο επίπεδο ικανοποίησης για το παραγόμενο κέρδος από τη χρήση του νερού:

$$\text{Min}(w_1 + 1.5w_2) \qquad (17.37)$$

Επιλέγεται k_2= 0 με συνάρτηση στόχου:

$$\min f = a_2, \tag{17.38}$$

οπότε επιθυμείται η επίτευξη του ελάχιστου κέντρου για τον ασαφή αριθμό που εκφράζει τις ετήσιες απολήψιμες ποσότητες από το κλάδο NO_2 – N_3, εξασφαλίζοντας ωστόσο μέσω της ασαφούς ανισότητας εφαρμόζοντας την εξίσωση 17.35.α, ένα ελάχιστο επίπεδο ικανοποίησης για το παραγόμενο κέρδος από τη χρήση του νερού.

- *Περίπτωση 4*

Επιλέγεται k_2= 0 και κατασκευάζεται μία συνάρτηση χρησιμότητας με βάση τις κεντρικές τιμές που να συνθέτει το στόχο της μεγιστοποίησης της κεντρικής τιμής για το κέρδος και της ελαχιστοποίησης των διαθέσιμων ποσοτήτων a_2. Η κάθε συνάρτηση χρησιμότητας κατασκευάζεται με βάση τις ακραίες τιμές ενώ θεωρείται ότι έχουν το ίδιο βάρος. Προτείνεται η παρακάτω συνάρτηση χρησιμότητας:

$$\max f(a_1, a_2) = w_1 f_1(a_1, a_2) + w_2 f_2(a_2)$$

όπου

$$w_1 = w_2 = 0.5$$

$$f_1(a_1, a_2) = \frac{a_1 + 1.5a_2 - 75}{105 - 75}$$

$$f_2(a_2) = 1 - \frac{a_2 - 25.34}{64 - 25.34}$$

Λύση

Πίνακας 17. 1. Επιλύσεις με βάση την αισιόδοξη προσέγγιση για α =0.

$\alpha = 0$	Max $(a_1+1.5a_2)$	Min $(w_1+1.5w_2)$	Min (a_2)	Max $w_1 f_1(a_1,a_2)+w_2 f_2(a_2)$
a_1	41.07143	35.32143	52.00000	52.00000
w_1	13.92857	8.178571	3.000000	3.000000
a_2	39.00000	39.00000	25.33333	31.35000
w_2	2.000000	2.000000	8.000000	9.650000
z^+	116.5000	105.0000	105.0000	116.5000
z^-	82.64286	82.64286	75.00000	81.55000
$a_1+1.5a_2$	99.57143	93.82143	90.00000	99.02500
$w_1+1.5w_2$	16.92857	11.17857	15.00000	17.47500