Πληροφορία και αβεβαιότητα

- Ανάμεσα στις έννοιες της πληροφορίας και της αβεβαιότητας υπάρχει μια στενή σχέση. Το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό αυτό της σύνδεσης, είναι ότι η αβεβαιότητα που εμπεριέχεται σε οποιαδήποτε κατάσταση επίλυσης ενός προβλήματος είναι αποτέλεσμα κάποιας έλλειψης πληροφορίας. Η πληροφορία μπορεί να είναι ατελής, αποσπασματική, όχι πλήρως αξιόπιστη, θολή, αντιφατική, ή ανακριβής κατά οποιανδήποτε άλλο τρόπο. Γενικά, αυτές οι διαφορές ανακριβούς πληροφορίας μπορεί να οδηγήσουν σε διαφορετικούς τύπους αβεβαιότητας (Σύρπη, 1998).

- Η ασάφεια ως μορφή αβεβαιότητας, ερμηνεύει την περίπτωση όπου τα όρια των συνόλων δεν είναι ευκρινώς ορισμένα και συνακόλουθα αποδέχεται καταστάσεις αληθείας μεταξύ του 0 (ψευδές) και του 1 (αληθές). Αντίθετα, στη θεωρία πιθανοτήτων τα όρια των συνόλων είναι επακριβώς ορισμένα, ενώ η αβεβαιότητα οφείλεται στην αβεβαιότητα πραγματοποίησης για τα στοιχεία του συνόλου.

Η έννοια του ασαφούς συνόλου πρωτοεισήχθηκε από τον Zadeh, 1965 για την έκφραση και χειρισμό των περιπτώσεων όπου τα δεδομένα είναι όχι καλώς ορισμένα αλλά ασαφή και αποτέλεσε την ωρίμανση προγενέστερων επιστημονικών αναζητήσεων όπως της πλειότιμης λογικής του Lukasiewicz. Τα ασαφή σύνολα έχουν ευρεία εφαρμογή στην προσπάθεια για αριθμητική αξιοποίηση της ποιοτικής πληροφορίας, στην περιγραφή αριθμητικών δεδομένων που εμπεριέχουν αβεβαιότητα και για να εκφραστεί τυχόν αβεβαιότητα στην προτίμηση στην πολυκριτηριακή ανάλυση.

Ορισμός 2.2.1: Έστω X ένα γενικό σύνολο. Ονομάζεται ασαφές υποσύνολο του X ή ασαφές σύνολο (fuzzy set) κάθε απεικόνιση που χαρακτηρίζεται από τα στοιχεία μίας περιοχής διαστήματος ή γενικού συνόλου X στο διάστημα [0, 1], δηλ. $A : X \to [0,1]$

Εντελώς ελαστικός ορισμός δεν υπαρχουνστατιστικά τεστ των πιθανοτήτων
Δύναμη και αδυναμία

Συνάρτηση συμμετοχής

Κάθε ασαφές σύνολο A στο X μπορεί να παρασταθεί από το διατεταγμένο ζεύγος

$$A = \{\mu_A(x) / x \in X\}, \tag{2.1}$$

όπου $\mu_A(x)$ η συνάρτηση συμμετοχής (ή χαρακτηριστική συνάρτηση) που καταδεικνύει σε ποιο βαθμό ένα στοιχείο του γενικού συνόλου X ανήκει στο ασαφές σύνολο A.

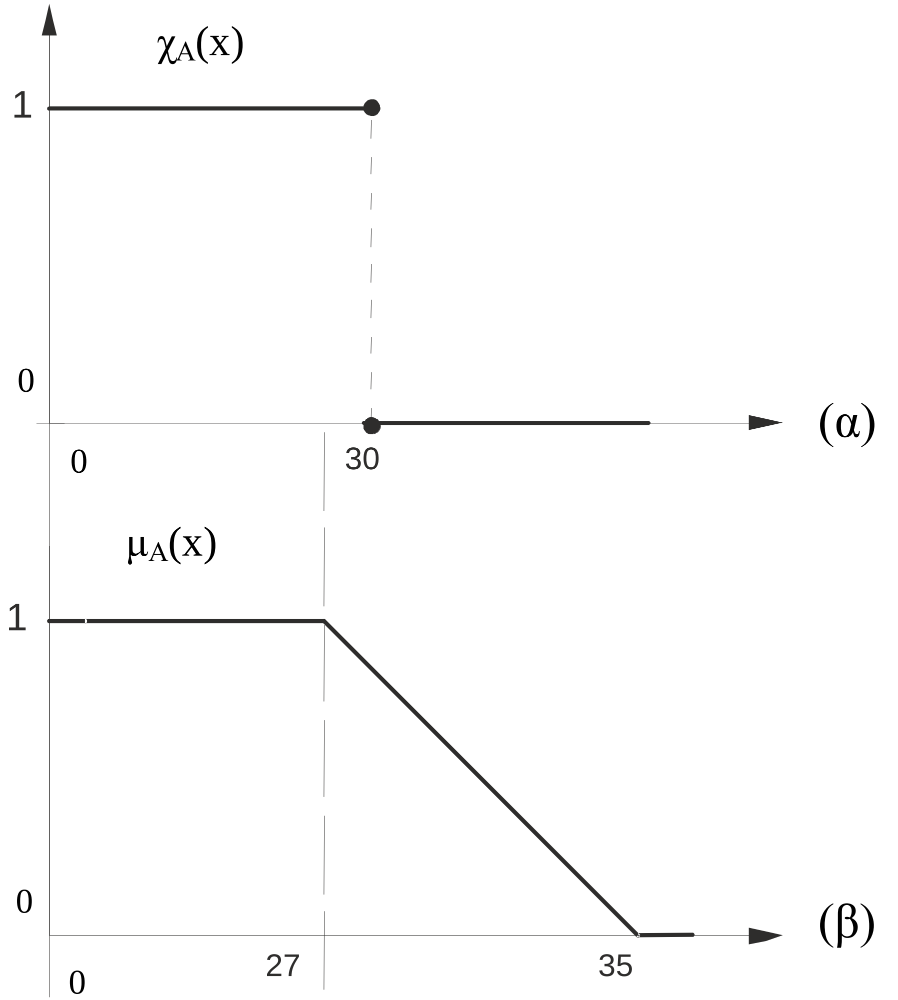
Η συνάρτηση συμμετοχής έχει τις τιμές μηδέν για την περίπτωση όπου το στοιχείο δεν ανήκει στο ασαφές σύνολο A και μονάδα για την περίπτωση όπου το στοιχείο ανήκει πλήρως στο ασαφές σύνολο A. Για τις ενδιάμεσες τιμές της συνάρτησης συμμετοχής, το στοιχείο ανήκει σε κάποιο βαθμό στο ασαφές σύνολο.

Συμβατικά σύνολα και συνάρτηση συμμετοχής

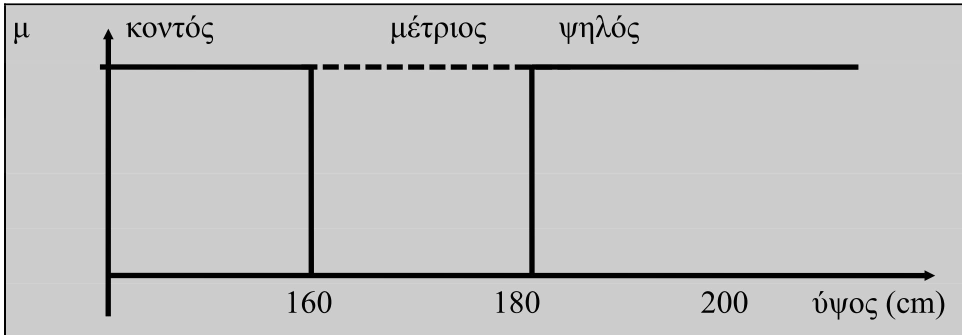
Για τα συμβατικά σύνολα μπορεί να αντιστοιχηθεί μία συνάρτηση συμμετοχής που δέχεται μόνο τις τιμές μηδέν και μονάδα. Συνεπώς, ένα συμβατικό σύνολο A έχει την παρακάτω συνάρτηση συμμετοχής:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \;\; x \in A \\ 0 & \alpha\nu \;\; x \notin A \end{cases} \tag{2.2}$$

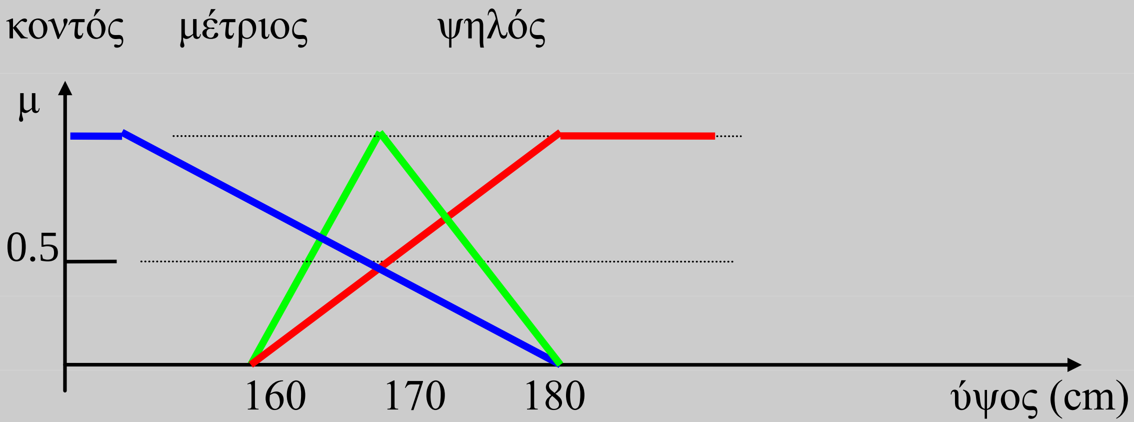
Είναι προφανές ότι τα συμβατικά σύνολα μπορούν να κατανοηθούν ως μία ειδική περίπτωση των ασαφών συνόλων.



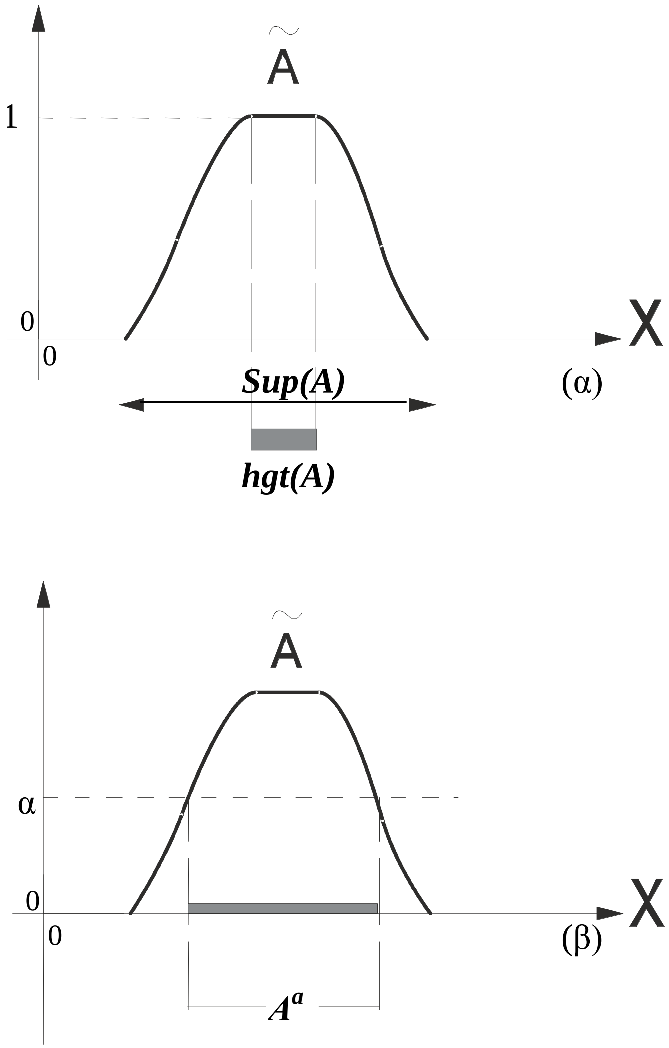
Σχ.2.2 Κλασσική (α) και ασαφής προσέγγιση (β) για το σύνολο των νέων ανθρώπων



Σχήμα 2.6 : χαρακτηριστικές συναρτήσεις για κλασσικά σύνολα.



Σχήμα 2.7



Σχ.2.3 Σύνολο υποστήριξης και ύψος ασαφούς συνόλου(α) και (β) α- τομή ασαφούς συνόλου

- Μία σημαντική διαφορά με τη θεωρία πιθανοτήτων βρίσκεται στο γεγονός ότι η συνάρτηση συμμετοχής των ασαφών συνόλων έχει μέγιστη επιτρεπτή τιμή τη μονάδα και όχι συνολικό εμβαδόν τη μονάδα όπως η κατανομή πιθανότητας. Μία επίσης σημαντική διαφορά με τη θεωρία πιθανοτήτων βρίσκεται στο γεγονός της μη ισχύος στα ασαφή σύνολα, των αρχών του αποκλειόμενου τρίτου και της αντίφασης σε αντίθεση με τη θεωρία πιθανοτήτων.
-

Ορισμοί…

Ορισμός 2.2.4: Το *σύνολο υποστήριξης (support set)* ενός ασαφούς συνόλου είναι το κλασσικό σύνολο που περιέχει τα στοιχεία εκείνα του γενικού συνόλου για τα οποία η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου Α έχει μη μηδενικές τιμές (Σχ.2.3).

Sup(A)= $\{x \| \mu_A(x) > 0\}$ (2.3)

Το σύνολο υποστήριξης ταυτίζεται με την 0- ισχυρή τομή (βλέπε ενότητα α – τομής)

Ορισμός 2.2.5 : Ένα ασαφές σύνολο ονομάζεται *κυρτό* ή συνεκτικό (convex) αν και μόνο αν ισχύει (Σχ.2.4):

$$\mu_A\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] \geq \min(\mu_A(x_1),\ \mu_A(x_2)\ )\ \forall x_1,\ x_2 \in X \text{ και } \lambda \in [0,\ 1] \quad (2.4)$$

Η παραπάνω συνθήκη εξασφαλίζει ότι το σύνολο των σημείων μεταξύ x_1 και x_2 έχουν συναρτήσεις συμμετοχής μεγαλύτερες από την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης συμμετοχής για τα σημεία x_1 και x_2.

Α-τομή, γέφυρα από ασαφή σε συμβατικά σύνολα

Κάθε ασαφές σύνολο μπορεί να θεωρηθεί σαν μία οικογένεια από συμβατικά σύνολα τα οποία παράγονται από το ασαφές σύνολο με τη διαδικασία της α-τομής. Η α- τομή (α - cut) χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό α που δεν υπερβαίνει ποτέ τη μονάδα και ποτέ δεν είναι μικρότερος του μηδενός, περιορισμοί που απορρέουν από το πεδίο τιμών της συνάρτησης συμμετοχής των ασαφών συνόλων. Μια α - τομή είναι ένα συμβατικό σύνολο που περιέχει εκείνα τα στοιχεία του γενικού συνόλου Χ για τα οποία η συνάρτηση συμμετοχής έχει τιμές:

$^{\alpha}A = \{x / \mu_A(x) \geq \alpha\}$ $\alpha \in (0,1]$ για την ασθενή τομή (Σχ.2.3) (2.8)

$^{\alpha+}A = \{x / \mu_A(x) > \alpha\}$ $\alpha \in [0,1)$ για την ισχυρή τομή (2.9)

Από τον παραπάνω ορισμό απορρέουν διάφορες ιδιότητες των α – τομών. Παρατίθενται μερικές αντιπροσωπευτικές ιδιότητες των α- τομών (Klir and Yuan, 1995):

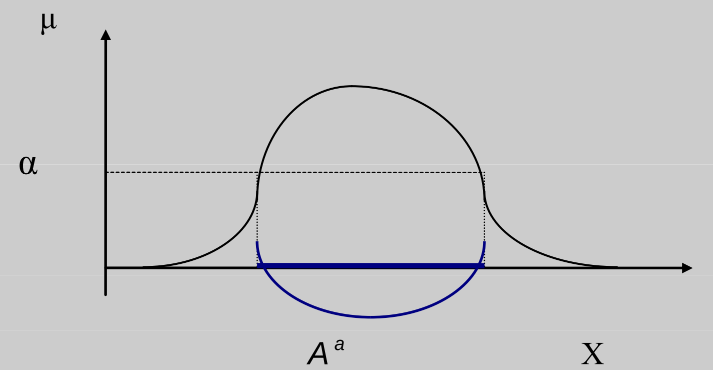
Έστω $A, B \in F(X)$. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες για όλα τα $\alpha, \beta \in [0, 1]$:

(i) $^{\alpha+}A \subseteq {}^{\alpha}A$ (2.10)

(ii) $\alpha \leq \beta \rightarrow {}^{\alpha}A \supseteq {}^{\beta}A$ και $^{\alpha+}A \supseteq {}^{\beta+}A$ (μονοτονία) (2.11)

(iii) $^{\alpha}(A \cup B) = {}^{\alpha}A \cup {}^{\alpha}B$ και $^{\alpha}(A \cap B) = {}^{\alpha}A \cap {}^{\alpha}B$ (2.12)

(iv) $^{\alpha+}(A \cup B) = {}^{\alpha+}A \cup {}^{\alpha+}B$ και $^{\alpha+}(A \cap B) = {}^{\alpha+}A \cap {}^{\alpha+}B$ (2.13)



Σχήμα 2.8 :α-τομή και αναπαρίσταται ως το μπλε υποσύνολο του X

Μέσω των α-τομών είναι δυνατή η σύνδεση μεταξύ ασαφών και των συμβατικών συνόλων. Το θεώρημα της σύνθεσης καταδεικνύει τον παραπάνω ισχυρισμό. Σύμφωνα με το θεώρημα της σύνθεσης κάθε ασαφές σύνολο μπορεί να παρασταθεί μοναδικά είτε από μία οικογένεια α- ασθενών τομών, είτε από μία οικογένεια α- ισχυρών τομών. Ακολουθούν τα δύο θεωρήματα της σύνθεσης, το πρώτο για τις ασθενείς τομές και το δεύτερο για τις ισχυρές τομές:

1ος κανόνας σύνθεσης:

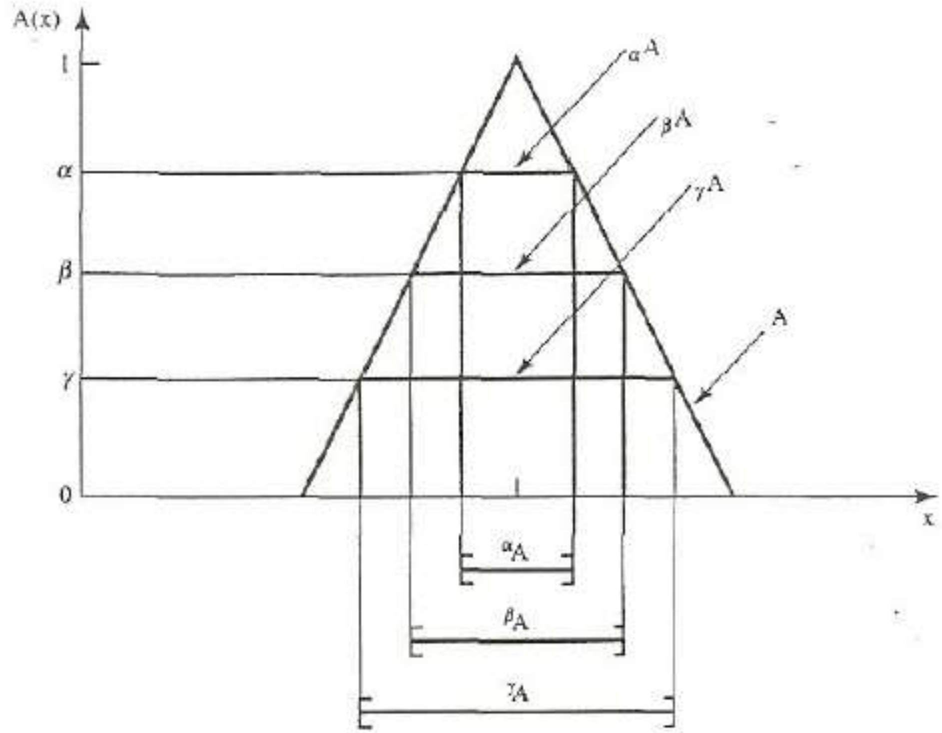
Για κάθε $A \in \square(X)$

$$A = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} {}_{\alpha}A \quad \text{όπου} \quad {}_{\alpha}A = \alpha \cdot {}^{\alpha}A \tag{2.14}$$

2ος κανόνας σύνθεσης:

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1)} {}_{\alpha+}A \quad \text{όπου} \quad {}_{\alpha+}A = \alpha \cdot {}^{\alpha+}A \tag{2.15}$$

Θα ήταν λάθος να δοθεί η εντύπωση ότι το ασαφές σύνολο είναι μία απλή ακολουθία συμβατικών συνόλων εφόσον η έννοια της α - τομής εμπεριέχει από μόνη της την έννοια του βαθμού συμμετοχής (Karray and Silva, 2004).


A(x)
1
α
β
γ
0
x
αA
βA
γA
A
αA
βA
γA

Ασαφείς αριθμοί

Οι ασαφείς αριθμοί στη γενική περίπτωση μπορούν να ορισθούν αξιωματικά με βάση τον παρακάτω ορισμό (Klir and Yuan, 1995):

Ορισμός 2.4.1: Ένα ασαφές σύνολο Α στο 🕛 είναι ένας *ασαφής αριθμός* αν ικανοποιεί τουλάχιστον τις τρεις παρακάτω ιδιότητες:

1. Α είναι κανονικό σύνολο
2. $^{\alpha}A$ είναι ένα κλειστό σύνολο για κάθε $\alpha \in (0, 1]$
3. Το σύνολο υποστήριξης είναι πεπερασμένο (Klir and Yuan, 1995)

Μορφή ασαφών αριθμών

Θεώρημα 2.4.2: Έστω Α ασαφές σύνολο, $A \in F(M)$. Τότε Α είναι ένας ασαφής αριθμός αν κα μόνο αν υπάρχει ένα κλειστό διάστημα [α, β]🕒🖑, τέτοιο ώστε (Σχ.2.5.α):

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{για } x \in [\alpha, \beta] \\ l(x) & \text{για } x \in (-\infty, \alpha) \\ r(x) & \text{για } x \in (\beta, \infty) \end{cases} \qquad (2.16.α)$$

όπου l είναι μία συνάρτηση μονοτόνως αύξουσα από το $(-\infty, \alpha)$ στο [0, 1), συνεχής από τα δεξιά της και ισχύει $l(x) = 0$ για $x \in (-\infty, \omega_1)$. Η συνάρτηση r είναι μονοτόνως φθίνουσα, συνεχής από τα αριστερά της και ισχύει $r(x) = 0$ για $x \in (\omega_2, \infty)$. (2.16.β)

Ορισμός 2.4.3: Ο ασαφής αριθμός $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)_T$ με $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3$ είναι ένας *τριγωνικός ασαφής αριθμός* όταν έχει την παρακάτω συνάρτηση συμμετοχής (2.5.β):

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & \text{αν } x<\alpha_1\\ \dfrac{x-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} & \text{αν } \alpha_1 \le x<\alpha_2\\ \dfrac{\alpha_3-x}{\alpha_3-\alpha_2} & \text{αν } \alpha_2 \le x \le \alpha_3\\ 0 & \text{αν } x>\alpha_3\end{cases} \qquad (2.17)$$

Το υποστηρίζον διάστημα του τριγωνικού ασαφούς αριθμού είναι το διάστημα (α_1, α_3).

Ορισμός 2.4.4: Ο ασαφής *συμμετρικός* τριγωνικός αριθμός (ΑΣΤΑ) είναι ένας ασαφής τριγωνικός αριθμός $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)_T$, όπου ισχύει:

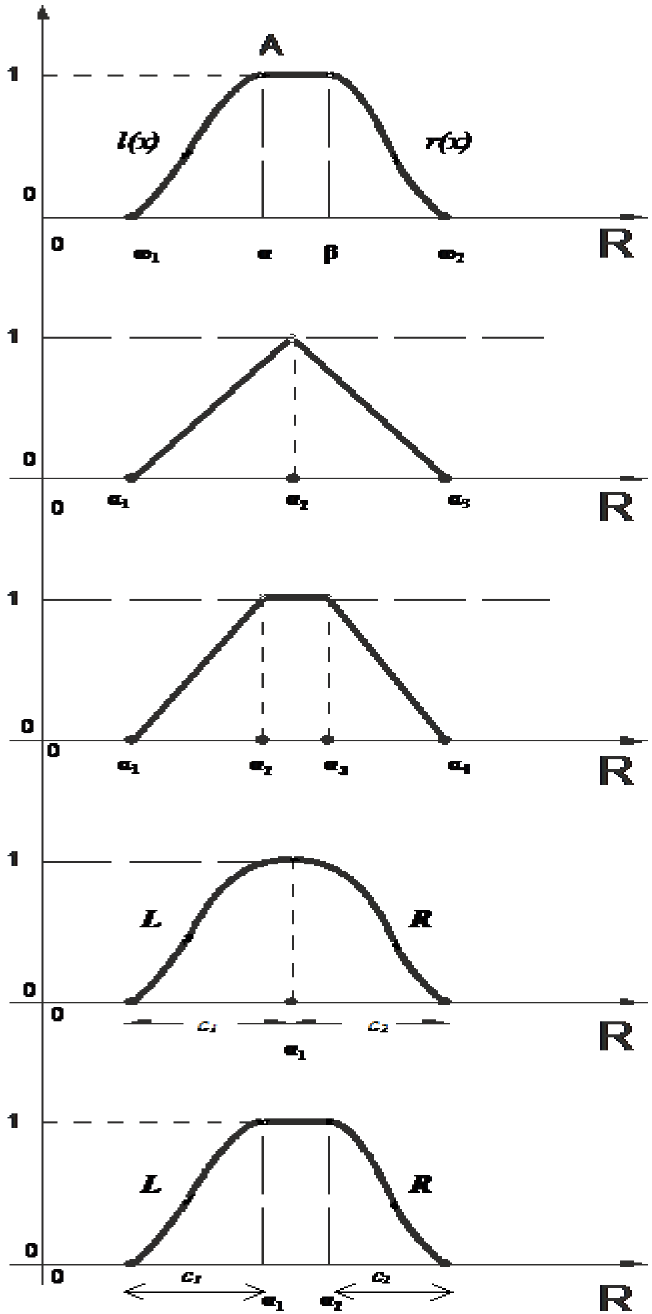
$$\alpha_2-\alpha_1=\alpha_3-\alpha_2. \qquad (2.18)$$

Ως ημιπλάτος ή ακτίνα του συμμετρικού τριγωνικού αριθμού, ονομάζεται η απόσταση $c = \alpha_2 - \alpha_1=\alpha_3 - \alpha_2$ *(πολλές φορές το πλάτος συμβολίζεται με w και το κέντρο με $a_2 = r$).*

Η συνάρτηση συμμετοχής για τους συμμετρικούς τριγωνικούς ασαφείς αριθμούς μπορεί να γραφεί ισοδύναμα (2.6):

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & \alpha\nu\ \ x \le r-c\\ 1+\dfrac{x-r}{c} & \alpha\nu\ \ r-c \le x \le r\\ 1+\dfrac{-x+r}{c} & \alpha\nu\ \ r \le x \le r+c\\ 0 & \alpha\nu\ \ x \ge r+c\end{cases} \qquad (2.19)$$

Ο παραπάνω ΑΣΤΑ συμβολίζεται και ως $A=\langle r,\ w\rangle_T$



(α). ορισμός ασαφούς αριθμού

(β). ασαφής τριγωνικός αριθμός

(γ). ασαφής τραπεζοειδής αριθμός

(δ). L – R τριγωνικός αριθμός

(ε). L – R ασαφές διάστημα

Ορισμός 2.4.5: Ένα *ασαφές διάστημα είναι L - R* - μορφής αν υπάρχουν L – R συναρτήσεις και $\alpha_2, \alpha_3 \in \{-\infty, +\infty\}$, $c_1 \geq 0$ και $c_2 \geq 0$ παράμετροι (ημιπλάτη) ώστε η συνάρτηση συμμετοχής να έχει την παρακάτω μορφή (Σχ2.5.ε):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{\alpha_2 - x}{c_1}\right) & \text{αν } x \leq \alpha_2 \\ 1 & \text{αν } \alpha_3 \leq x \leq \alpha_4 \\ R\left(\dfrac{x - \alpha_3}{c_2}\right) & \text{αν } \alpha_3 < x \end{cases} \tag{2.21.α}$$

Όπου L, R προτείνονται συνεχείς και μη αύξουσες συναρτήσεις με τις παρακάτω επιπλέον ιδιότητες:

$$L : [0,1] \to [0,1] \text{ και} : R[0,1] \to [0,1]$$

$$L(0) = R(0) = 1 \tag{2.21.β}$$

$$L(1) = R(1) = 0$$

Παράδειγμα 2.4.1: Ο κλασσικός αριθμός, έστω $r \in M$ *μπορεί να αποδοθεί με την παρακάτω χαρακτηριστική συνάρτηση:*

$$\mu_r(x) = \begin{cases} \mu_r(x) = 1 \ \text{αν} \ \ x = r \\ \mu_r(x) = 0 \ \text{αν} \ \ x \neq r \end{cases} \tag{2.23}$$

Παράδειγμα 2.4.2: Οι ασαφείς τριγωνικοί αριθμοί είναι L – R ασαφείς αριθμοί με την εξής συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{\alpha_2 - x}{c_1}\right) & \text{αν} \ x \leq \alpha_2 \\ R\left(\dfrac{x - \alpha_2}{c_2}\right) & \text{αν} \ \alpha_2 < x \end{cases} \tag{2.24}$$

με τις εξής L, R συναρτήσεις:

$$L(x) = \max(0, 1 - x'), R(x) = \max(0, 1 - x'')$$

$$x' = \frac{\alpha_2 - x}{c_1}, \ x'' = \frac{x - \alpha_2}{c_2}$$

όπου $\alpha_1 = \alpha_2 - c_1, \alpha_3 = \alpha_2 + c_2$

Παράδειγμα 2.4.3: Για την περίπτωση των ασαφών συμμετρικά L αριθμών ισχύει:

$\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_4 - \alpha_2 = \text{w(ή c)}$, *όπου c το ημιπλάτος.*

Για την περίπτωση των ασαφών συμμετρικά τριγωνικών αριθμών η συνάρτηση συμμετοχής είναι:

$$\mu_A(x) = L\left(\frac{\alpha_2 - x}{c}\right) \tag{2.25.α}$$

όπου $L(x) = \max\left(0, 1 - |x'|\right)$ (2.25.β)

ΟΙ ΤΡΕΙΣ ΘΕΜΕΛΙΏΔΕΙΣ ΠΡΆΞΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΑΦΏΝ ΣΥΝΌΛΩΝ

- Όπως και στα κλασσικά σύνολα ομοίως και στα ασαφή σύνολα ορίζονται οι τρεις θεμελιώδεις πράξεις των κλασσικών συνόλων: άρνηση, τομή και ένωση. Οι πράξεις αυτές στα ασαφή σύνολα γενικεύονται για διάφορες οικογένειες άρνησης, τομής και συμπληρώματος που μπορούν να υιοθετηθούν σε κάθε περίπτωση. Οι θεμελιώδεις πράξεις των ασαφών συνόλων ορίζονται αξιωματικά.

Ασαφές συμπλήρωμα

Έστω c(A) το ασαφές συμπλήρωμα ή άρνηση του A, που μπορεί να ερμηνευθεί σαν το βαθμό για τον οποίο το x δεν ανήκει στο σύνολο A. Το (κλασσικό) συμπλήρωμα της κλασσικής λογικής ισχύει και στα ασαφή σύνολα:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{I.1}$$

Ωστόσο, για την περίπτωση όπου η συνάρτηση συμμετοχής έχει τιμές 0 ή 1 τότε ισχύουν οι ιδιότητες του συμπληρώματος της κλασσικής λογικής, όπως της αντίφασης και του αποκλειόμενου τρίτου.

Δεν είναι όμως η παραπάνω σχέση η μοναδική ερμηνεία του συμπληρώματος για την ασαφή λογική. Περισσότερο ή λιγότερο αυστηρές ερμηνείες του συμπληρώματος μπορούν να υιοθετηθούν. Στη γενική περίπτωση το ασαφές συμπλήρωμα μπορεί να ορισθεί αξιωματικά:

Ασαφής άρνηση, αξιωματικός ορισμός

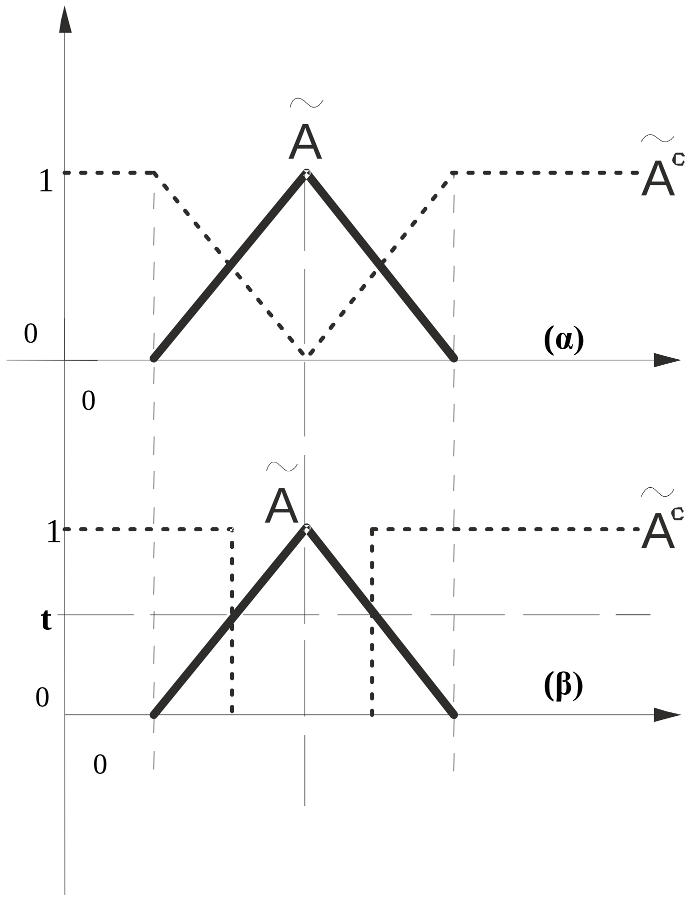
Ορισμός (ασαφής άρνηση): Η απεικόνιση $c:[0,1]\rightarrow[0,1]$ που ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα είναι το ασαφές συμπλήρωμα ενός ασαφούς συνόλου:

$$\left.\begin{aligned}&\textit{Αξίωμα } C1: c(0)=1 \text{ και } c(1)=0 \ \text{(οριακές συνθήκες)}\\&\textit{Αξίωμα } C_2: \forall x,y\in[0,1], \alpha\nu\, x\leq y \text{ τότε } c(x)\geq c(y) \ \text{(μονοτονία)}\end{aligned}\right\} \qquad (I.2)$$

Τα παραπάνω αξιώματα αποτελούν τον *αξιωματικό σκελετό της ασαφούς συμπλήρωσης*. Επιπρόσθετα αξιώματα μπορούν να υιοθετηθούν με τη διαφορά όμως ότι κάθε αξίωμα μειώνει τη γενική κλήση σε υποσύνολά της. Τα χαρακτηριστικότερα επιπρόσθετα αξιώματα είναι τα παρακάτω:

Αξίωμα C3**:** Η c είναι συνεχής συνάρτηση (I.3)

Αξίωμα C4: Η c είναι αντιστρέψιμη, που σημαίνει ότι $(c(c(x)))=x$ για κάθε $x\in[0,1]$ (νόμος της διπλής άρνησης ή της αντιστρεψιμότητας). (I.4)



Σχ.Ι.1 Κλασσικό (α) και t - αυστηρό (β) συμπλήρωμα ασαφούς συνόλου.

Ασαφής ένωση και τομή - συμβατική προσέγγιση

Η ένωση και η τομή της κλασικής λογικής ισχύει και στην ασαφή λογική και μπορούν να εκφρασθούν αριθμητικά με τη βοήθεια της συνάρτησης συμμετοχής:

Ασαφής ένωση: $\mu_{A\cup B}(x)=\max\left[\mu_A(x),\mu_B(x)\right],\forall x\in X$ (Ι.7)

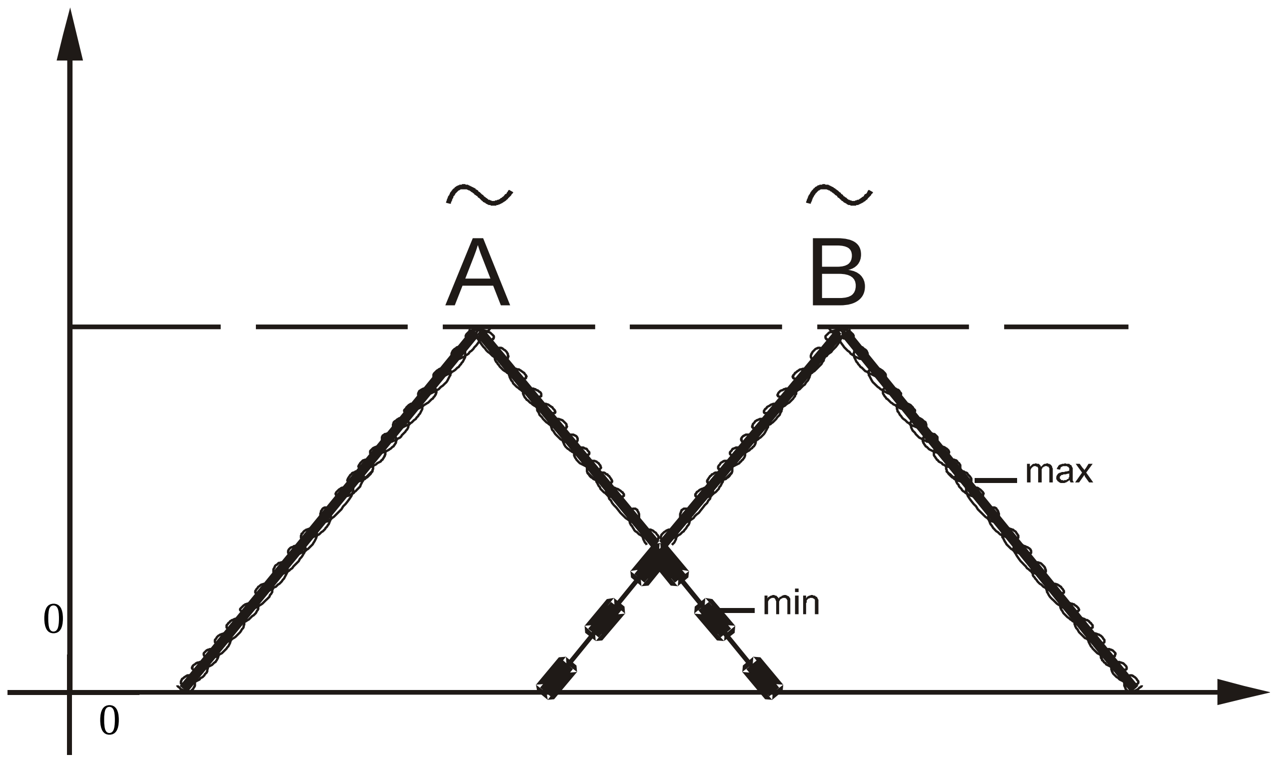
Ασαφής τομή: $\mu_{A\cap B}(x)=\min\left[\mu_A(x),\mu_B(x)\right],\forall x\in X$ (Ι.8)

Μία βασική αιτία για τη χρησιμοποίηση επιπρόσθετων συναρτήσεων για την ασαφή ένωση και την τομή είναι ότι το maximum και το minimum των τιμών εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το ένα από τα δύο ορίσματα.

Για παράδειγμα αν υποθέσουμε ότι $\mu_A(x)=\mu_B(x)=0.1$ και $\mu_\Gamma(x)=0.9$, στην περίπτωση αυτή η ασαφής τομή όπως ορίσθηκε προηγουμένως δίνει:

$$\mu_{A\cap B}(x)=\min(0.1,\ 0.1)=\mu_{A\cap\Gamma}(x)=\min(0.1,\ 0.9)=0.1$$

Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε αντίφαση με τη διαίσθησή μας. Αντίστοιχα προβλήματα υπάρχουν και στον κλασσικό ορισμό της ασαφούς ένωσης.



Σχ.Ι.3. Η κλασική ένωση και τομή στην ασαφή λογική

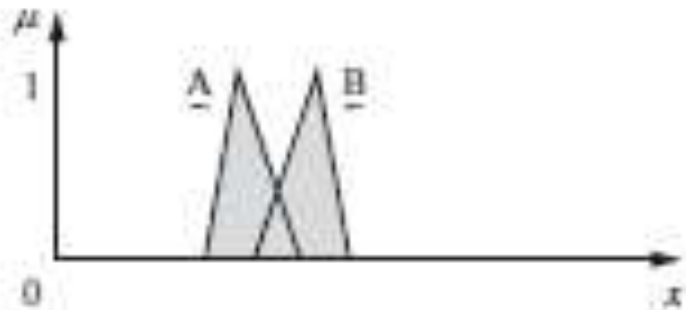
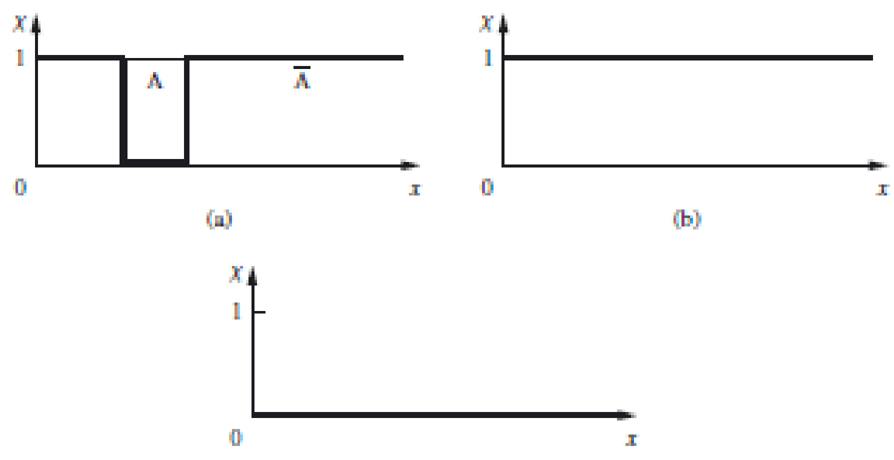


FIGURE 2.12
Union of fuzzy sets A and B.

FIGURE 2.13
Intersection of fuzzy sets A and B.

FIGURE 2.14
Complement of fuzzy set A.



To illustrate these ideas numerically, let us say we have two discrete fuzzy sets, namely,

$$\underset{\sim}{A} = \left\{\frac{1}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.2}{5}\right\} \quad \text{and} \quad \underset{\sim}{B} = \left\{\frac{0.5}{2} + \frac{0.7}{3} + \frac{0.2}{4} + \frac{0.4}{5}\right\}.$$

We can now calculate several of the operations just discussed (membership for element 1 in both $\underset{\sim}{A}$ and $\underset{\sim}{B}$ is implicitly 0):

Complement

$$\overline{\underset{\sim}{A}} = \left\{\frac{1}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.7}{4} + \frac{0.8}{5}\right\}.$$

$$\overline{\underset{\sim}{B}} = \left\{\frac{1}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{0.6}{5}\right\}.$$

Union

$$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \left\{\frac{1}{2} + \frac{0.7}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.4}{5}\right\}.$$

Intersection

$$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \left\{\frac{0.5}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.2}{4} + \frac{0.2}{5}\right\}.$$

I.2.2 Αρχή του αποκλειόμενου μέσου και της αντίφασης

Μία βασική αρχή των κλασικών συνόλων αλλά και της κλασικής λογικής γενικότερα, είναι ο νόμος της αντίφασης:

$$A \cap \bar{A} = \varnothing$$

και του αποκλειόμενου τρίτου:

$$A \cup \bar{A} = X,$$

όπου X το γενικό σύνολο.

Οι παραπάνω σχέσεις *δεν* ισχύουν για κάθε ασαφή ένωση και τομή στα ασαφή σύνολα ακόμη και αν χρησιμοποιηθούν η κλασσική ένωση και τομή (Σχ. I.4).

Παράδειγμα: Για την κλασσική ένωση και τομή:

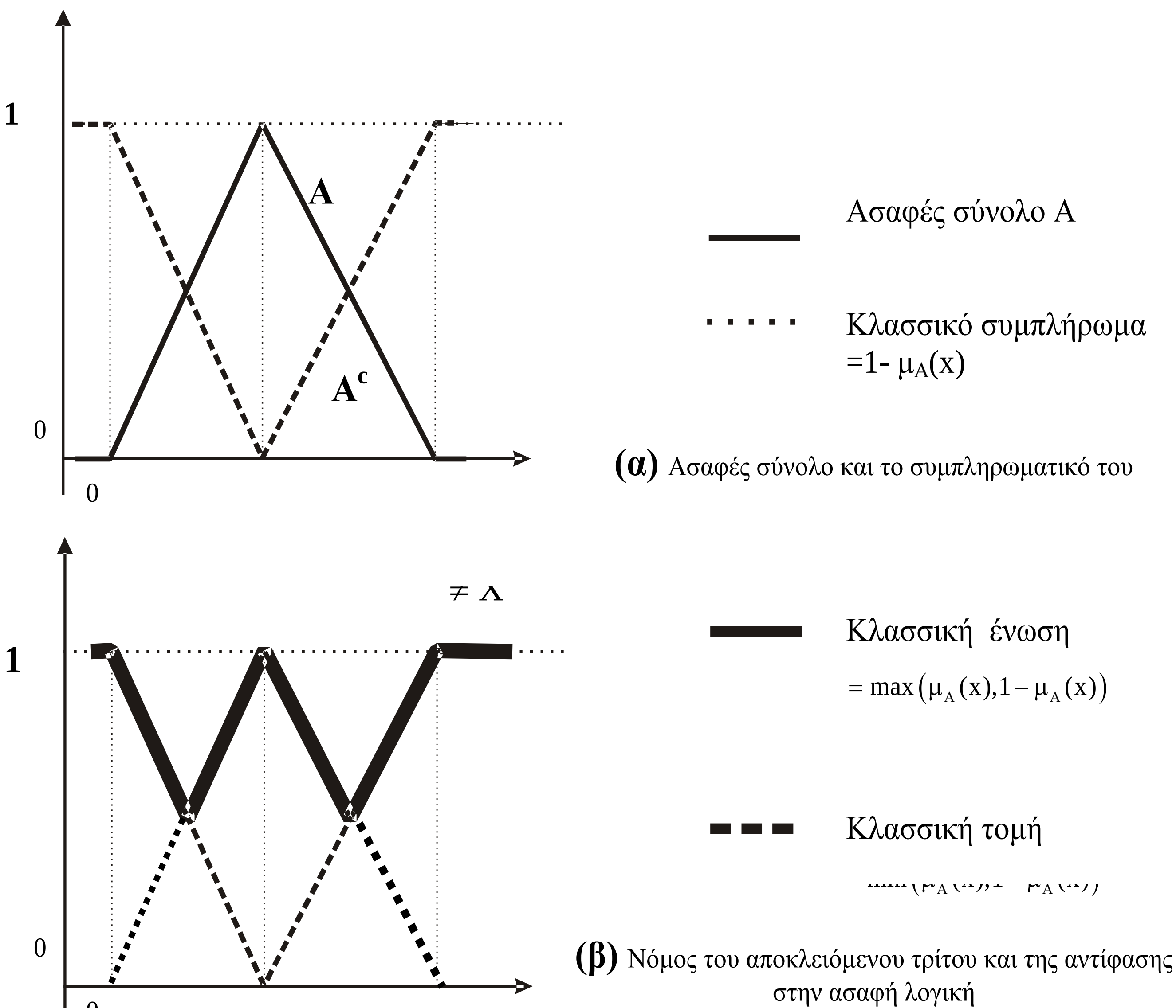
$$\left(A \cap \bar{A}\right)(x) = \min\left[\ A(x), \left(1 - A(x)\right)\right] \neq 0,$$

$$\left(A \cup \bar{A}\right)(x) = \max\left[\ A(x), \left(1 - A(x)\right)\right] \neq 1$$

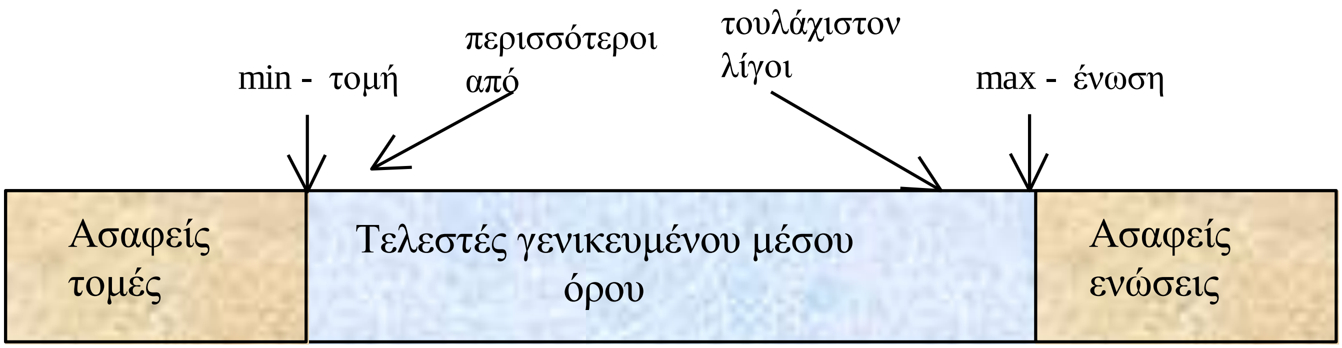
για $A(x) = 0.2$*, τότε*

$$\left(A \cap \bar{A}\right)(x) = \min\left[0.2,\ 0.8\right] = 0.2 \neq 0,$$

$$\left(A \cup \bar{A}\right)(x) = \max\left[0.2,\ 0.8\right] = 0.8 \neq 1$$



Σχ Ι.4. Ασαφές σύνολο και το κλασσικό του συμπλήρωμα (α) και η μη ισχύς του νόμου της αντίφασης και του αποκλειόμενου τρίτου γι' αυτή την περίπτωση με τη χρήση της κλασσικής ένωσης και τομής (β).



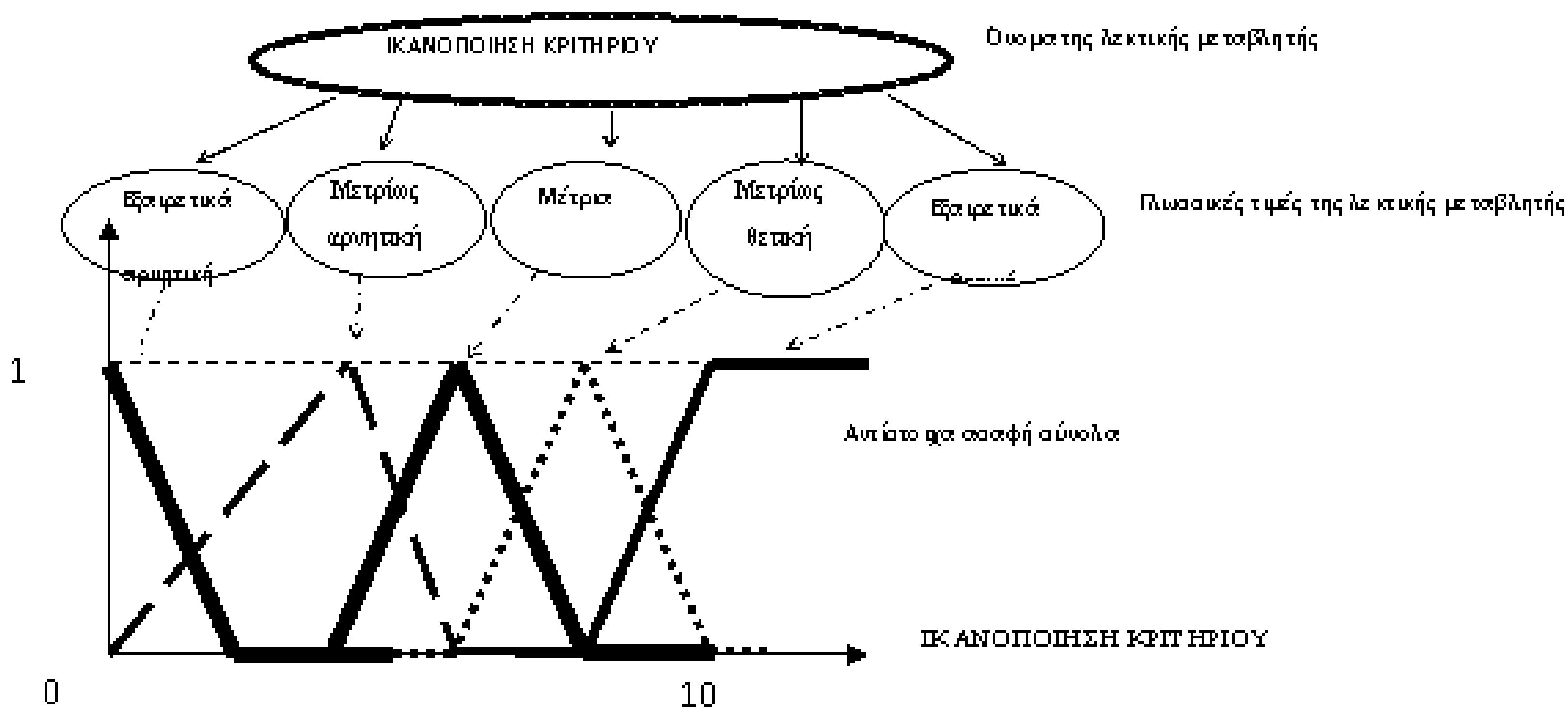
Σχ.Ι.5. Περιπτώσεις Ασαφών τελεστών

ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΈΣ ΚΑΙ ΛΕΚΤΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΤΕΣ

Η λεκτική μεταβλητή (linguistic variable) σε πιο ελεύθερη απόδοση έχει ως τιμές λέξεις οι οποίες αντιστοιχούν σε ασαφή σύνολα. Για παράδειγμα η ικανοποίηση ενός κριτηρίου είναι μία λεκτική μεταβλητή και δέχεται ως τιμές τις λέξεις: εξαιρετικά θετική, θετική, μετρία, μετρίως αρνητική, εξαιρετικά αρνητική. Σε κάθε λέξη αντιστοιχεί ένα ασαφές σύνολο, συνεπώς κάθε λέξη μπορεί να ερμηνευθεί με αριθμητικές τιμές. Ο ορισμός είναι ο ακόλουθος:

Λεκτικές μεταβλητές

Ορισμός: Μία *λεκτική μεταβλητή* αποτελείται από το πεντάπτυχο (x, T, U, G, M), όπου x το όνομα της μεταβλητής, $T(x)$ το σύνολο των λεκτικών όρων της γλωσσικής μεταβλητής, U το γενικό σύνολο, G ο συντακτικός κανόνας (για τους γλωσσικούς όρους) ο οποίος αντιστοιχεί για κάθε λεκτικό όρο $t \in T$ ένα ασαφές υποσύνολο M(t) στο X (που υποδηλώνει την αντιστοίχιση του γλωσσικού όρου με το ασαφές σύνολο).



Σχήμα Ι.6: Η ικανοποίηση του κριτηρίου ως λεκτική μεταβλητή

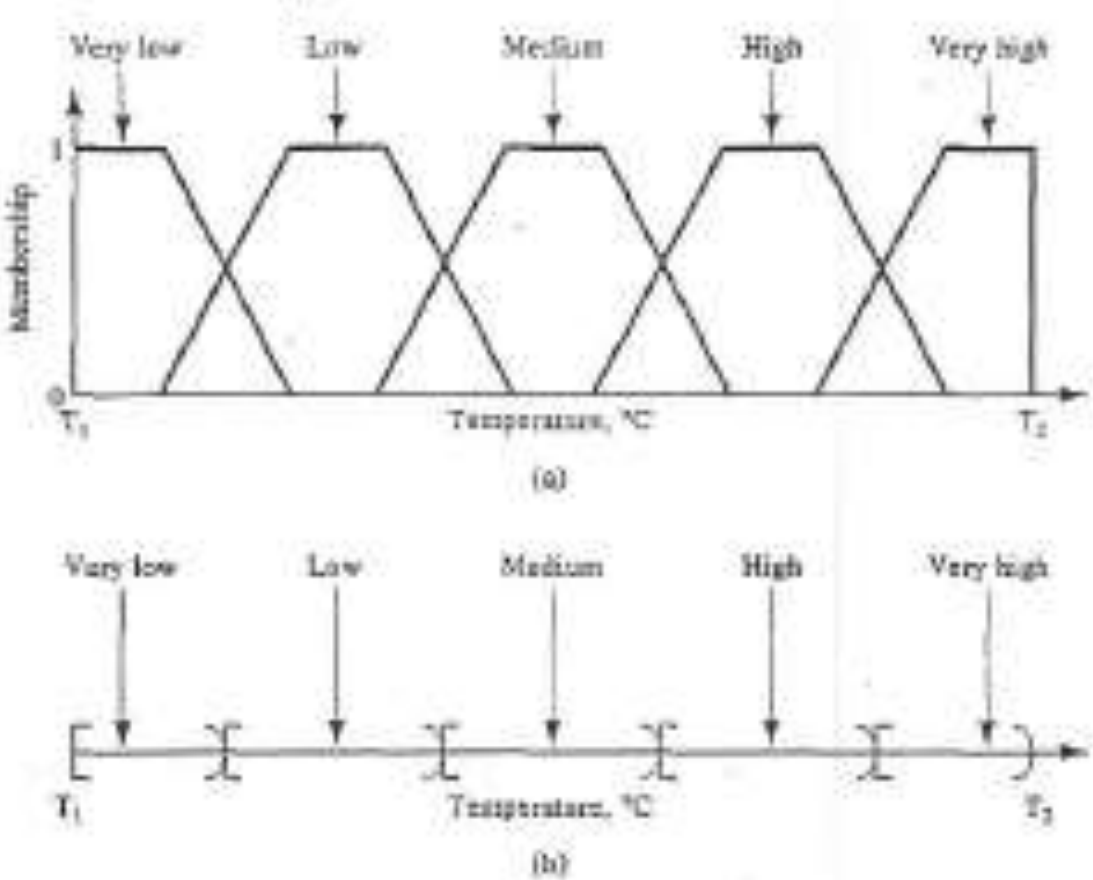


Figure 1.4 Temperature in the range $[T_1, T_2]$ conceived as: (a) a fuzzy variable; (b) a traditional (crisp) variable.

ΓΛΩΣΣΟΛΟΓΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΤΕΣ [1],[2]

Οι τροποποιητές μπορούν να αυξάνουν ή να μικραίνουν την αβεβαιότητα σε ένα ασαφές σύνολο τροποποιώντας την χαρακτηριστική συνάρτηση. Μερικοί από αυτούς είναι: very (πολύ), fairly (μετρίως), mostly (ως επί το πλείστον), often (συχνά), somewhat (κάπως), indeed (αληθώς), κ.α

Αυτοί οι τροποποιητές εφαρμόζονται σε αβέβαιες έννοιες με αποτέλεσμα μία πιο ακριβή είτε μια ανακριβή (αβέβαιη) περιγραφή.

Παρατίθονται μερικοί βασικοί τύποι τροποποιητών

- Μία τυπική τροποποίηση είναι η τροποποίηση πολύ (VERY):

$$\mu_{very}(x) = \mu(x)^2 \quad (19)$$

Επειδή $x^2 < x$, για $0 < x < 1$ η παραπάνω πράξη μειώνει την συνάρτηση συμμετοχής των «αβέβαιων» στοιχείων του ασαφούς συνόλου. Αυτή η πράξη λέγεται συχνά concentration(συμπύκνωση).

- Μία άλλη πράξη είναι η διαστολή (dilation) η οποία είναι η αντίθετη της συστολής (συμπύκνωσης) και αντιστοιχεί στον τροποποιητή περισσότερο ή λιγότερο(MORE OR LESS) (κατά μάλλον ή ήττον) και εκφράζεται ως:

$$\mu_{\text{MORE OR LESS}}(x) = \sqrt{\mu(x)} \quad (20)$$

Το νέο ασαφές σύνολο που προκύπτει μας προσδίδει μία περισσότερο χαλαρή πληροφορία για τα στοιχεία του X. Αυτή η πράξη αυξάνει την τιμή της συνάρτησης συμμετοχής των αβέβαιων στοιχείων εφώσον «χαλαρώνει» και η απαίτηση για πληροφορία.

- Ο τροποποιητής πράγματι (INDEED) μπορεί να μπορεί να αντιστοιχηθεί με μία πράξη τόνωση της αντίθεσης.

$$\mu_{\text{αντίθεσης}}(A) = \begin{cases} 2(\mu_A(x))^2 \; \gamma\iota\alpha \;\; 0 \le \mu_A(x) \le 0.5 \\ 1 - 2(1 - \mu_A(x))^2 \; \gamma\iota\alpha \;\; 0.5 \le \mu_A(x) \le 1 \end{cases} \quad (21)$$

Example 1.10

Consider the universe $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ and the fuzzy sets $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ defined by the table

x	x_1	x_2	x_3	x_4
$\mu_A(x)$	0.2	0.7	1	0
$\mu_B(x)$	0.5	0.3	1	0.1

Using (1.9) and (1.10) gives

x	x_1	x_2	x_3	x_4
$\mu_{A \cap B}(x)$	0.2	0.3	1	0
$\mu_{A \cup B}(x)$	0.5	0.7	1	0.1

$\square$

Schematic representation of operations on fuzzy sets

Η *επέκταση του κανόνα* είναι μία πολύ σημαντική αρχή της ασαφούς λογικής και αποτελεί την γέφυρα για την επέκταση των λειτουργιών των πραγματικών αριθμών στους ασαφείς αριθμούς. Οπότε η χρήση συναρτήσεων μιάς ή περισσοτέρων μεταβλητών, οι πράξεις των ασαφών αριθμών καθώς και η έννοια του ασαφούς MIN και MAX επιτυγχάνονται δια μέσου της αρχής της επέκτασης του κανόνα.

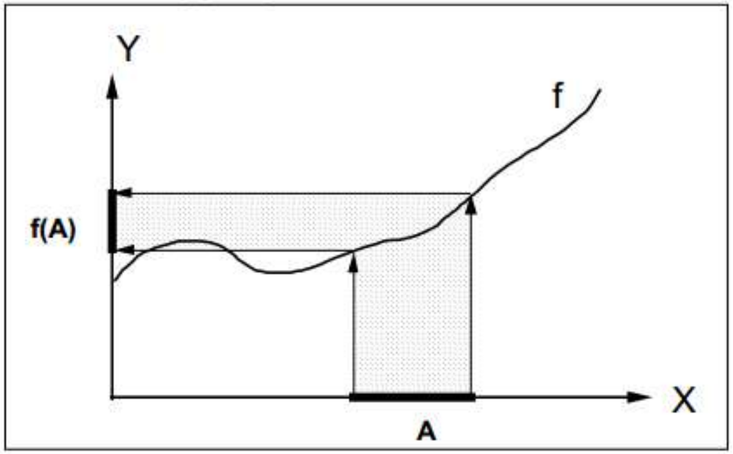
Θεώρημα 2.10.1 (Η επέκταση του κανόνα σε συνάρτηση μιας μεταβλητής): Έστω δύο γενικά σύνολα X και Y. Έστω η συνάρτηση:

$$f : X \to Y$$

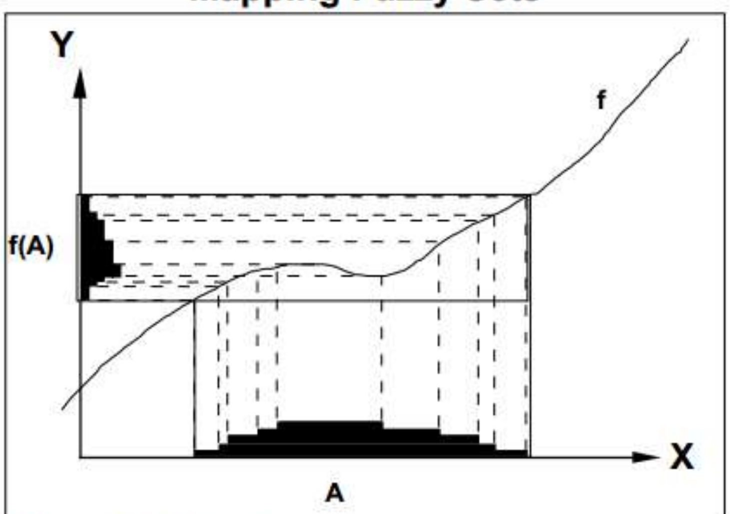
Έστω $\mu_A(x)$ η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου A, τότε η εικόνα του A στο Y θα είναι το ασαφές σύνολο B με την ακόλουθη συνάρτηση συμμετοχής (π.χ Bardossy and Duckstein 1995):

$$\mu_B(y) = \sup_{x \mid y = f(\times)} \mu_A(x) \tag{I.48}$$

Mapping Conventional Sets



Mapping Fuzzy Sets



2.3 Extension principle for fuzzy set

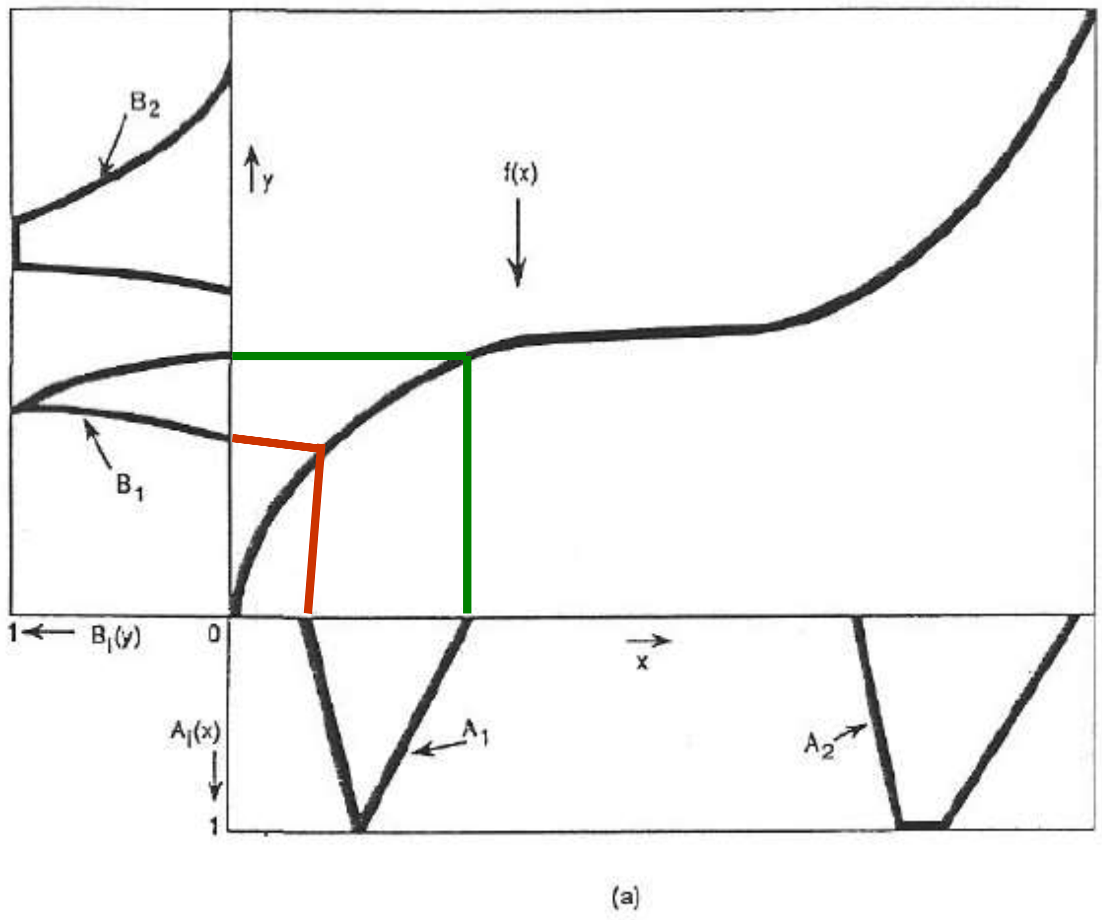


Figure 2.5 Illustration of the extension principle when f is continuous.

$$[f(A)](y) = \sup_{x|y=f(x)} A(x)$$

for all $A \in \mathcal{F}(X)$ and

$$[f^{-1}(B)](x) = B(f(x))$$

for all $B \in \mathcal{F}(Y)$.

Example 12.3. Let a fuzzy set $\underset{\sim}{A}$ be defined on the universe $U = \{1, 2, 3\}$. We wish to map elements of this fuzzy set to another universe, V, under the function

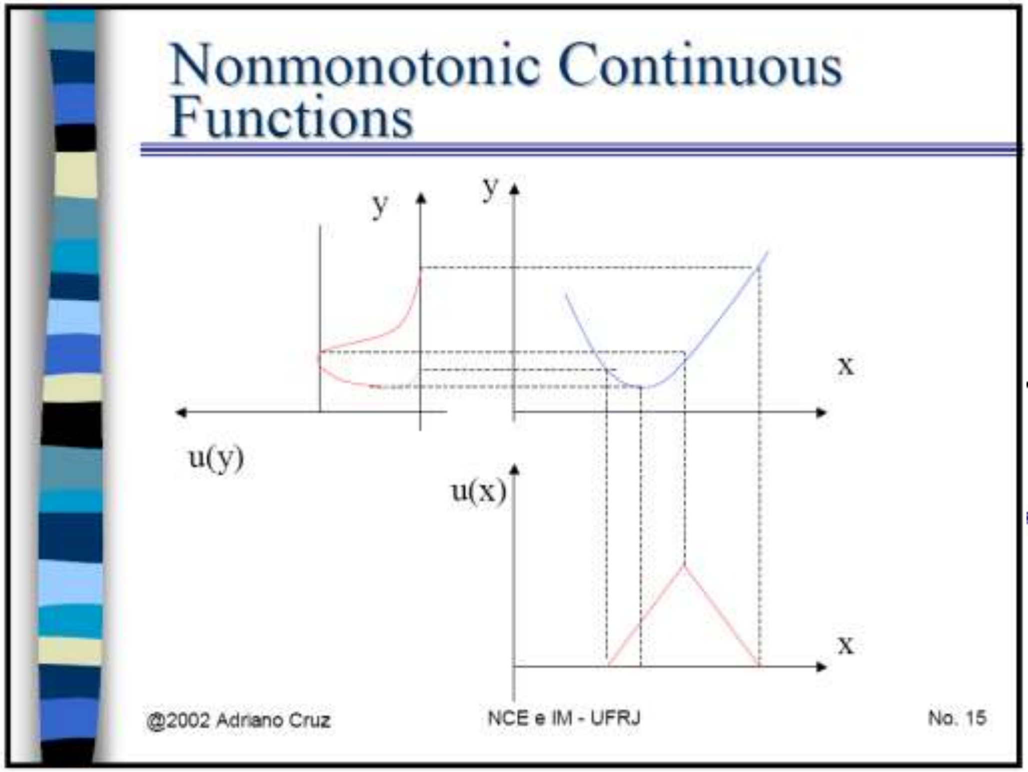
$$v = f(u) = 2u - 1.$$

We see that the elements of V are $V = \{1, 3, 5\}$. Suppose the fuzzy set $\underset{\sim}{A}$ is given as

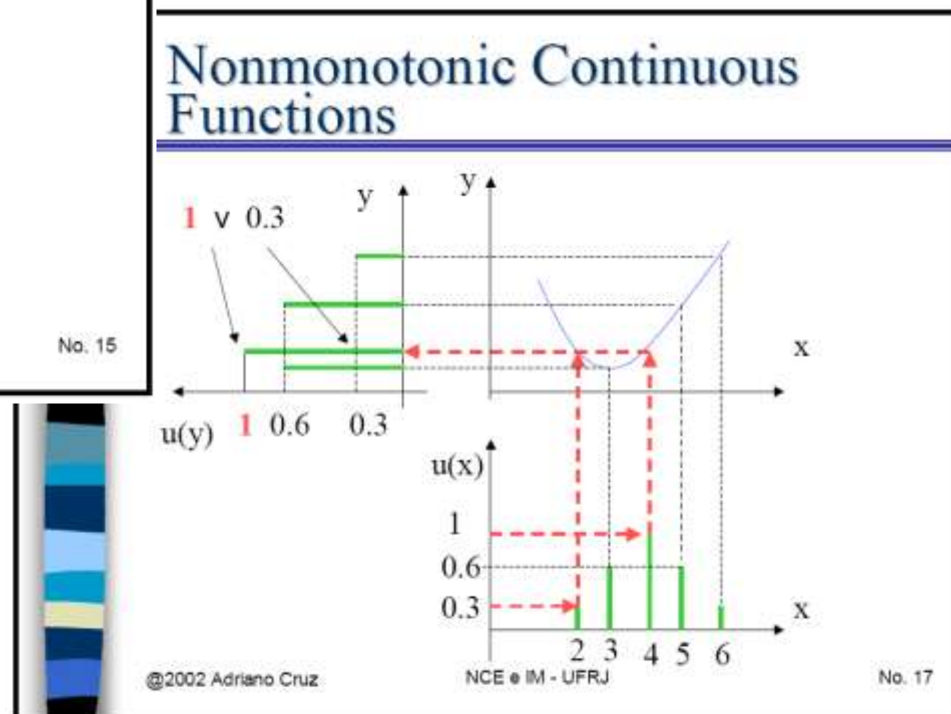
$$\underset{\sim}{A} = \left\{\frac{0.6}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3}\right\}.$$

Then, the fuzzy membership function for $v = f(u) = 2u - 1$ would be

$$f(\underset{\sim}{A}) = \left\{\frac{0.6}{1} + \frac{1}{3} + \frac{0.8}{5}\right\}.$$



Nonmonotonic Continuous Functions
y
y
x
u(y)
u(x)
x
@2002 Adriano Cruz
NCE e IM - UFRJ
No. 15



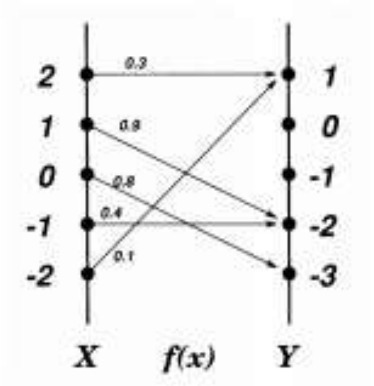
Nonmonotonic Continuous Functions
1 v 0.3
y
y
x
u(y)
1 0.6 0.3
u(x)
1
0.6
0.3
x
2 3 4 5 6
@2002 Adriano Cruz
NCE e IM - UFRJ
No. 17

Extension Principle: Example

Let A=0.1/-2+0.4/-1+0.8/0+0.9/1+0.3/2
And $f(x) = x^2-3$

Upon applying the extension principle, we have

B = 0.1/1+0.4/-2+0.8/-3+0.9/-2+0.3/1
= 0.8/-3+max(0.4, 0.9)/-2+
max(0.1, 0.3)/1
= 0.8/-3+0.9/-2+0.3/1



Η επέκταση κανόνα στο διάστημα του καρτεσιανού γινομένου με βάση μία κλασσική απεικόνιση, δηλαδή για συναρτήσεις πολλαπλών μεταβλητών επιτυγχάνεται με βάση το παρακάτω θεώρημα που είναι γενικότερο του προηγουμένου.

Θεώρημα 2.10.2 (Η επέκταση του κανόνα σε συναρτήσεις πολλαπλών μεταβλητών): Έστω το καρτεσιανό γινόμενο X των γενικών συνόλων X = $X_1 \times \ldots \times X_n$. Έστω Y γενικό σύνολο και η απεικόνιση:

$f: X_1 \times \ldots \times X_n \rightarrow Y$

Η λειτουργία της f επεκτείνεται για το καρτεσιανό γινόμενο των ασαφών υποσύνολων A_1, A_2,...A_n, που είναι υποσύνολα των γενικών συνόλων X_1, ...X_n στο Y. Η εικόνα του καρτεσιανού γινομένου $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ στο Y θα είναι το ασαφές σύνολο B με την ακόλουθη συνάρτηση συμμετοχής (π.χ. Zimmermann, 1991):

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{\substack{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \\ f^{-1}(y)}} \min\left(\mu_{A_n}(x_1), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)\right) & \text{αν } f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & \text{αν } f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases} \qquad (I.49)$$

Σε όσα αναφέρθησαν προηγουμένως η συνάρτηση f ήταν μία κλασσική απεικόνιση. Συνεπώς για την περίπτωση όπου η είσοδος είναι ένα κλασσικό σύνολο, η έξοδος θα είναι επίσης κλασσικό σύνολο. Για μία κλασσική απεικόνιση αν η είσοδος είναι ένα ή περισσότερα ασαφή σύνολα η έξοδος θα είναι ένα ασαφές σύνολο.