ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ – ΑΝΤΟΧΗ ΥΛΙΚΩΝ

ΤΡΙΤΗ

09:00 – 13:00

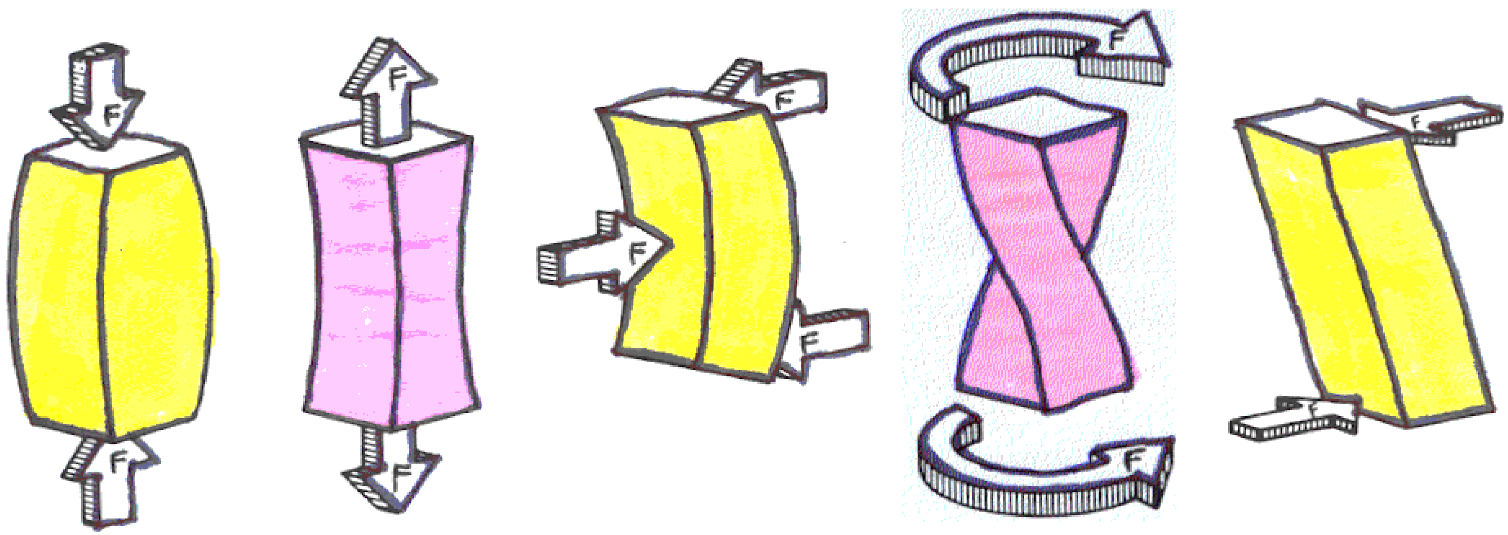
ΑΙΘΟΥΣΑ Α2

Γιατί μελετούμε την Μηχανική των Υλικών;

Οποιοσδήποτε ασχολείται με την αντοχή και την φυσιολογική λειτουργία / συμπεριφορά των ανθρώπινων ή φυσικών κατασκευών θα πρέπει να μελετήσει Μηχανική των Υλικών (Mechanics of Materials)

Εισαγωγή στη Μηχανική των Υλικών

Ορισμός: Η μηχανική των υλικών (ή μηχανική των παραμορφωσίμων σωμάτων) είναι ο κλάδος της εφαρμοσμένης μηχανικής που ασχολείται με τη συμπεριφορά των στερεών σωμάτων, όταν αυτά υπόκεινται σε φορτίσεις διαφορετικών τύπων

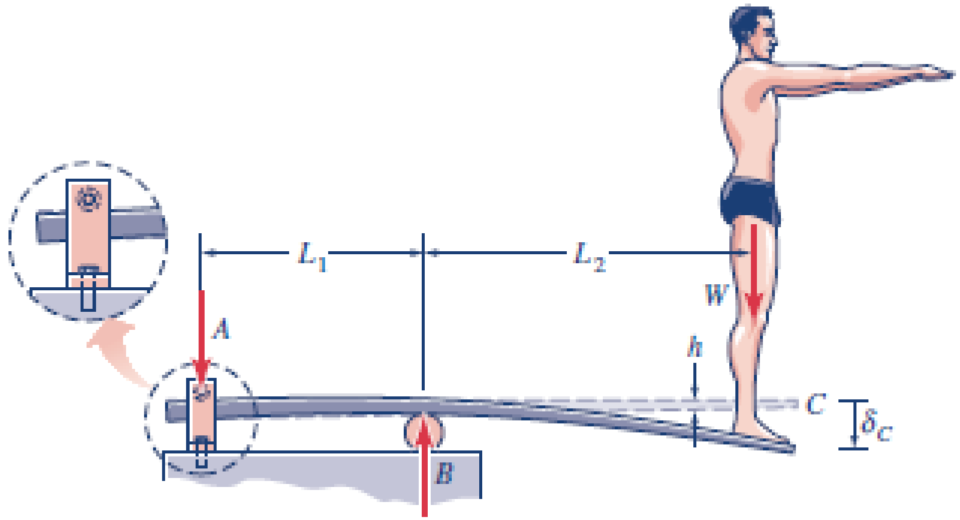


Compression *Tension (stretched)* *Bending* *Torsion (twisted)* *Shearing*

Χρήσιμοι Ορισμοί

- Ένα παραμορφώσιμο σώμα (deformable body) είναι ένα στερεό σώμα που μεταβάλλει μέγεθος ή σχήμα ως αποτέλεσμα των δυνάμεων που εφαρμόζονται σε αυτό ή ως αποτέλεσμα θερμοκρασιακών μεταβολών.
- Η σχέση της παραμόρφωσης με το επιβαλλόμενο φορτίο καθορίζεται από το πώς συμπεριφέρεται το υλικό.
- Η τάση (stress) και η παραμόρφωση (strain) είναι τα κλειδιά της αντοχής των υλικών σε όλη την έκταση του μελετώμενου φορέα (κατανομή τάσεων και παραμορφώσεων).

Παράδειγμα



1. Ποιο βάρος ***W*** θα προκαλέσει τη θραύση του βατήρα, και σε ποιο σημείο θα συμβεί;
2. Για μια δεδομένη γεωμετρία του βατήρα και θέση της κύλισης B, ποια είναι η σχέση μεταξύ της μετατόπισης $\boldsymbol{\delta_c}$ στο σημείο C και του βάρους W του ανθρώπου;
3. Είναι προτιμότερο ένα μεταβαλλόμενο πάχος του βατήρα ***h*** μεταξύ των σημείων A και C;
4. Είναι προτιμότερος ένας βατήρας από fiberglass ή από αλουμίνιο;

Strength & Stiffness

- Όλα τα στατικά προβλήματα που μελετά η μηχανική των παραμορφώσιμων σωμάτων εμπίπτουν σε δύο κατηγορίες : προβλήματα αντοχής (**strength problems**) και προβλήματα στιβαρότητας (**stiffness problems**).
- Μια κατασκευή ή ένας μηχανισμός πρέπει να είναι «αρκετά ανθεκτική», δηλ. πρέπει να ικανοποιεί προκαθορισμένα κριτήρια αντοχής.
- Επίσης, πρέπει να είναι «αρκετά στιβαρή» ώστε η παραμόρφωσή της να βρίσκεται εντός αποδεκτών ορίων.
- Η 1^{η} ερώτηση της προηγούμενης διαφάνειας αφορά την αντοχή ενώ η δεύτερη την στιβαρότητα.

Ανάλυση και Σχεδιασμός

- Οι 2 πρώτες ερωτήσεις αφορούν την ανάλυση.
  - Δεδομένης του υπό μελέτη συστήματος και της φόρτισης ο σκοπός της ανάλυσης είναι να αναλύσει τη συμπεριφορά του συγκεκριμένου συστήματος και φόρτισης.
- Οι 2 τελευταίες ερωτήσεις αφορούν το σχεδιασμό.
  - Δεδομένης της φόρτισης και των κριτηρίων απόδοσης (π.χ. το εύρος του βάρους των αθλητών και τι αποτελεί έναν «καλύτερο» βατήρα) ο σκοπός του σχεδιασμού είναι να επιλέξει την καταλληλότερη διαμόρφωση του βατήρα και του υλικού κατασκευής.
  - Η διαδικασία του σχεδιασμού είναι μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία.

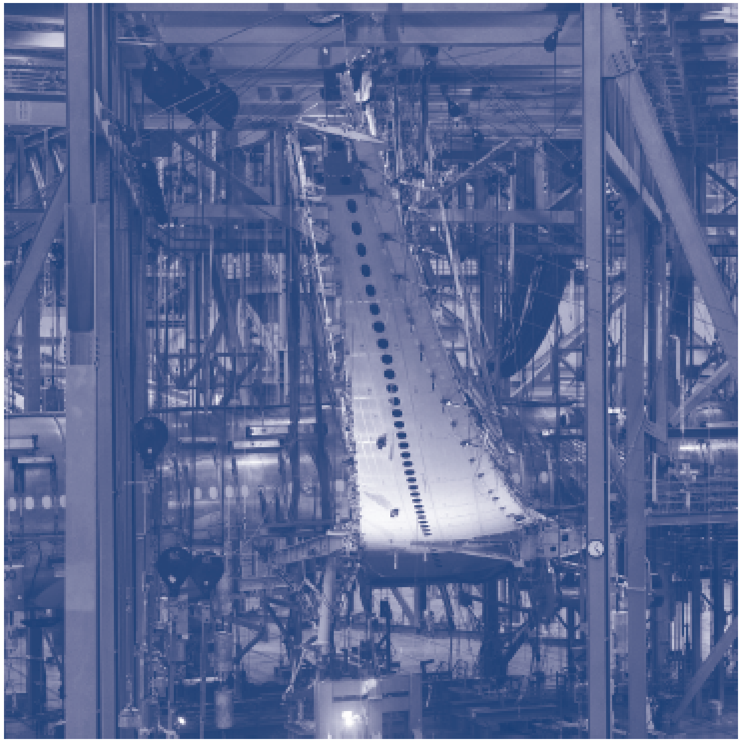
Αντικείμενο της Αντοχής των υλικών

- Είναι η μελέτη της συμπεριφοράς ενός δομικού στοιχείου ή ενός τμήματος μιας κατασκευής όταν αυτή καταπονείται με εξωτερικά φορτία ή φορτία που προκύπτουν από θερμοκρασιακές μεταβολές , μεταβολές πίεσης, εσωτερικές ατέλειες κλπ.
- Αναπτύσσει δηλαδή τις **σχέσεις που συνδέουν** τα **εξωτερικά φορτία** με τις **εσωτερικές δυνάμεις και παραμορφώσεις** που αναπτύσσονται στο σώμα.

Σκοπός της Αντοχής των υλικών

- Σκοπός της είναι η παροχή στοιχείων για τη διαμόρφωση των κατασκευών με τον ασφαλέστερο και οικονομικότερο τρόπο αλλά και τη μέγιστη εκμετάλλευση διαθέσιμων υλικών και μεθόδων αλλά και αναζήτηση νέων μεθόδων σχεδιασμού και υλοποίησης (διαμόρφωσης) των κατασκευών.

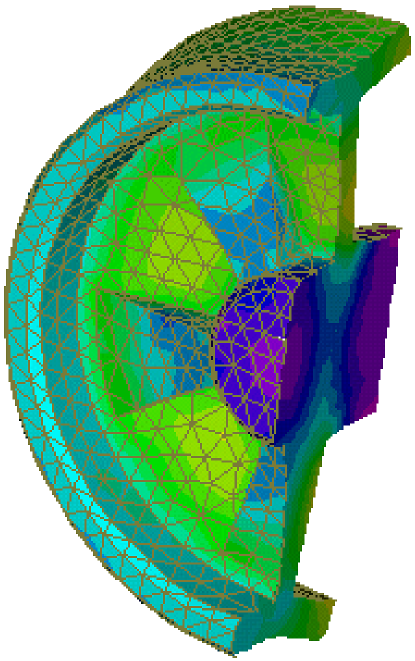
Εφαρμογές της Αντοχής των Υλικών

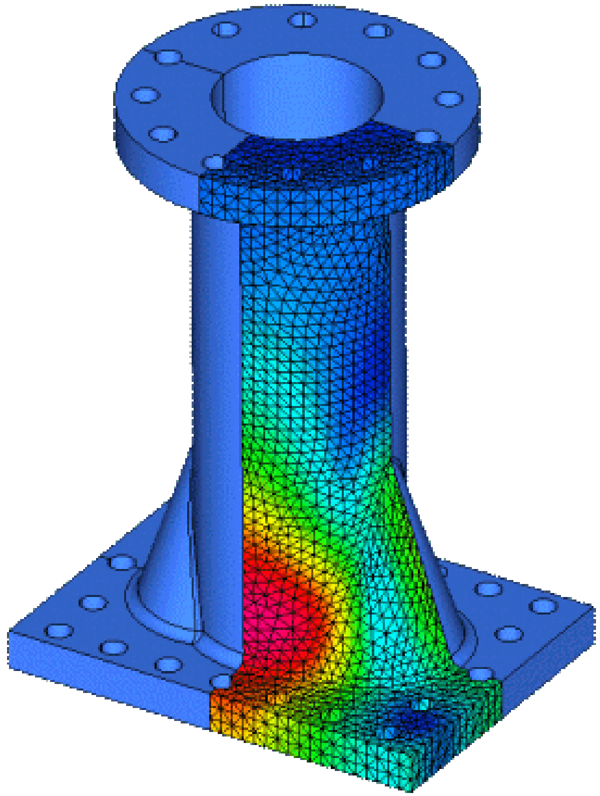


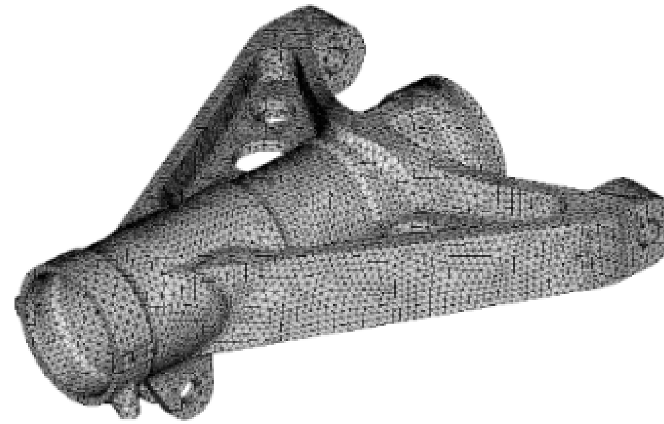
Finite element analysis (FEA) – λογισμικά (NASTRAN, ANSYS, ABAQUS)

Computer-Aided-Design (CAD) : σημαντικός και ουσιώδης ρόλος στον καθορισμό της γεωμετρίας των συστατικών, τη δημιουργία των μαθηματικών μοντέλων και την πραγματοποίηση της ανάλυσης του παραμορφώσιμου σώματος.

Finite Elements Analysis– Examples







Virtual prototyping of engineering designs

Example: Industry

- First jetliner to be digitally designed, "pre-assembled" on computer, eliminating need for costly, full-scale mockup.
- Computational modeling improved the quality of work and reduced changes, errors, and rework.

- The Boeing 777 is the first jetliner to be 100% digitally designed using three-dimensional solids technology. Throughout the design process, the airplane was "preassembled" on the computer, eliminating the need for a costly, full-scale mock-up.
- The 230 000 kg plane is the biggest twin-engine aircraft ever to fly-it can carry 375 passengers 7400 km-and from its first service flight in June 1995, has been certified for extended-range twin-engine operations.
- Boeing invested more than $4 billion (and insiders say much more) in CAD infrastructure for the design of the Boeing 777 and reaped huge benefits from design automation. The more than 3 million parts were represented in an integrated database that allowed designers to do a complete 3D virtual mock-up of the vehicle.

- Boeing based its CAD system on CATIA (short for Computer-aided Three-dimensional Interactive Application) and ELFINI (Finite Element Analysis System), both developed by Dassault Systemes of France (Dassault systems acquired ABAQUS in 2005 and ABAQUS+CATIA is known as SIMULIA) and licensed in the United States through IBM. Designers also used EPIC (Electronic Preassembly Integration on CATIA) and other digital preassembly applications developed by Boeing. Much of the same technology was used on the B-2 program.
- To design the 777, Boeing organized its workers into 238 cross-functional "design build teams" responsible for specific products. The teams used 2200 terminals and the computer-aided three dimensional interactive application (CATIA) system to produce a "paperless" design that allowed engineers to simulate assembly of the 777. **The system worked so well that only a nose mockup (to check critical wiring) was built before assembly of the first flight vehicle which was only 0.03 mm out of alignment when the port wing was attached.** Boeing also included customers and operators, down to line mechanics, to help tell them how to design the plane.

Τρόποι επίτευξης σκοπού της αντοχής των υλικών

Οι τρόποι που επιτυγχάνεται αυτό είναι :

- Ο υπολογισμός του μέγιστου φορτίου που μπορεί να δεχτεί ένας φορέας.
- Η πρόβλεψη των κρίσιμων διατομών που είναι υποψήφιες για να οδηγήσουν το δομικό στοιχείο στην αστοχία.
- Ο προσδιορισμός των ανώτατων αλλά και των επιτρεπτών ορίων φόρτισης των διαφόρων υλικών σε όλα τα είδη φόρτισης.
- Ο καθορισμός του προφίλ της διατομής των φορέων αλλά και η διαστασιολόγηση της με τρόπο τέτοιο ώστε να μπορούν να παραλάβουν με ασφάλεια τα φορτία που καλούνται να δεχτούν.

Επιστημονικός κλάδος στον οποίο εντάσσεται η αντοχή υλικών

- Η Αντοχή υλικών όπως και η θεωρία της ελαστικότητας περιλαμβάνονται στην επιστήμη της τεχνικής μηχανικής των **παραμορφωσίμων σωμάτων (deformable bodies).**
- Στηρίζεται τόσο σε εμπειρικούς τύπους που προέκυψαν από πειραματικές μετρήσεις όσο και σε ακριβείς μαθηματικές αναλύσεις και μαθηματικά υπολογιστικά μοντέλα.
- Χρησιμοποιείται στην επίλυση πλήθους πρακτικών προβλημάτων βασιζόμενη σε απλές αναλυτικές μεθόδους.

Παραδοχές αντοχής υλικών

- **Παραδοχή συμπαγούς σώματος :**

Κάθε σημείο έχει τις αυτές ιδιότητες , έτσι και κάθε στοιχειώδες τμήμα του υλικού έχει τις αυτές **ελαστικές ιδιότητες** όπως όλο το σώμα.

- **Παραδοχή ελαστικού σώματος :**

Τα υλικά κατασκευών μπορούν να θεωρηθούν ως απολύτως ελαστικά σώματα **εντός συγκεκριμένων ορίων που εξαρτώνται από τις ιδιότητες των υλικών**.

Χαρακτηρισμός υλικών

- ΟΜΟΓΕΝΕΣ : όταν έχει σε κάθε σημείο τις ίδιες ιδιότητες.
- ΙΣΟΤΡΟΠΟ : όταν έχει σε όλες τις διευθύνσεις τις ίδιες ιδιότητες.
- ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΟ: όταν οι ιδιότητες είναι διαφορετικές ανά διεύθυνση
- ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟ : όταν οι παραμορφώσεις μεταβάλλονται ανάλογα με τις επιβαλλόμενες δυνάμεις.

Χαρακτηρισμός δυνάμεων

- ΔΥΝΑΜΕΙΣ
  - Ανάλογα με τον τρόπο που ασκούνται
    - ΣΤΑΤΙΚΕΣ Ή ΗΜΙΣΤΑΤΙΚΕΣ
    - ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ Ή ΚΡΟΥΣΤΙΚΕΣ
  - Ανάλογα με την περιοχή που καταλαμβάνουν
    - ΜΟΝΑΧΙΚΕΣ Ή ΣΥΓΚΕΝΤΡΩ-ΜΕΝΕΣ
    - ΚΑΤΑΝΕΜΗ-ΜΕΝΕΣ

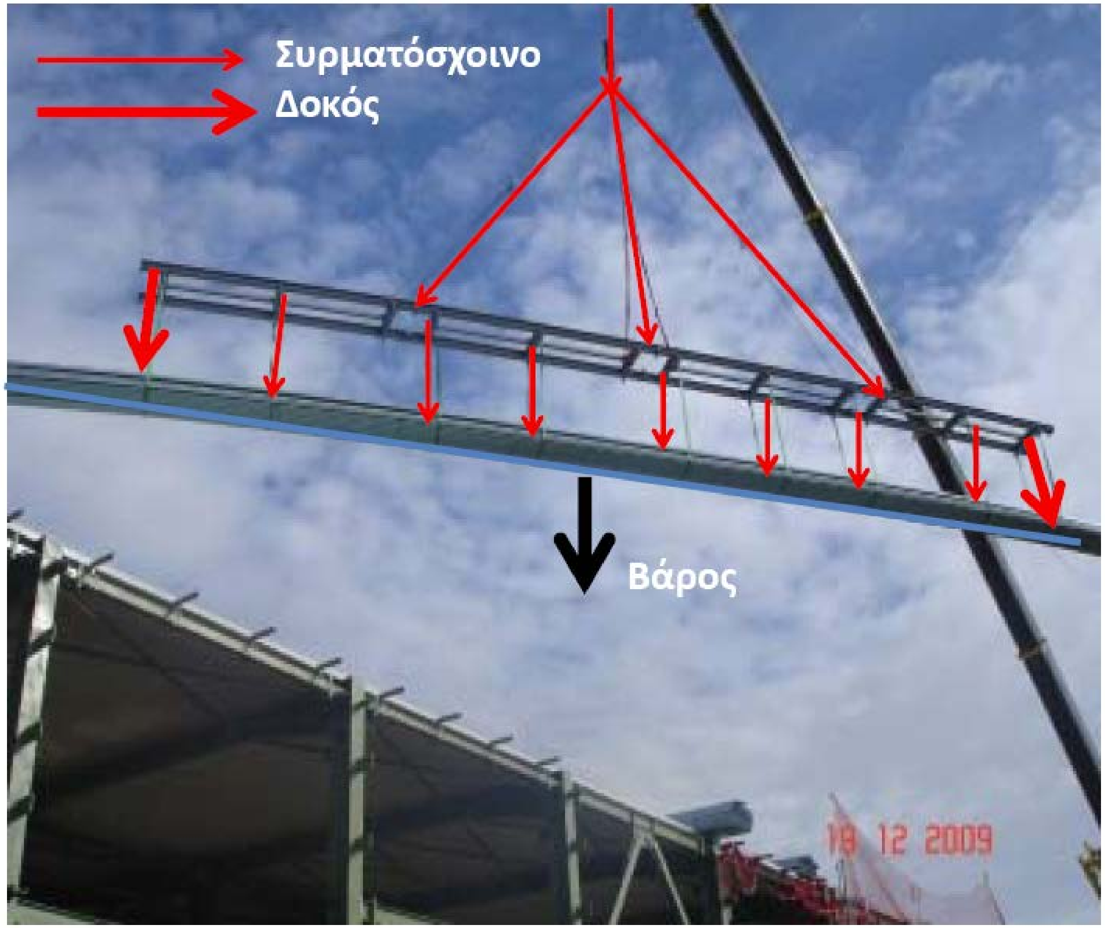
Χαρακτηρισμός φορτίων

- ΗΜΙΣΤΑΤΙΚΑ : όταν αυξάνουν ομαλά , διατηρούνται για μικρό χρονικό διάστημα και μετά απομακρύνονται.
- ΜΟΝΙΜΑ Ή ΠΑΓΙΑ: όταν καταπονούν μόνιμα μια κατασκευή (πχ το βάρος της κατασκευής).
- ΚΡΟΥΣΤΙΚΑ : όταν δρούν απότομα με μεγάλη ισχύ σε μια κατασκευή.
- ΕΝΑΛΛΑΣΟΜΕΝΑ : όταν μεταβάλλονται με το χρόνο (για πολλές χιλιάδες ή εκατομμύρια κύκλους).

Τρόποι αστοχίας μιας κατασκευής

- Το υλικό του στοιχείου αστοχεί πλήρως και επέρχεται θραύση
- Το υλικό έχει υποστεί εκτεταμένη παραμόρφωση και γίνεται ακατάλληλο προς χρήση
- Η κατασκευή είναι ασταθής και δεν μπορεί να δεχτεί μεγάλα φορτία

Πρόληψη αστοχίας



Έστω ότι μελετάμε τη συγκεκριμένη ανυψωτική κατασκευή.
Τα ερωτήματα που προκύπτουν και πρέπει να μελετηθούν είναι πολλά.

Ερωτήματα που εγείρονται

- Ποιό το βάρος και οι διαστάσεις του φορτίου
- Ποιό το κέντρο βάρους
- Ποιά η συναρμογή του συστήματος των ράβδων με το υπόλοιπο σύστημα
- Ποιό το υλικό των ράβδων
- Τι διατομή θα έχουν οι ράβδοι
- Ποιο το υλικό των συρματόσχοινων και ποιά η διατομή τους

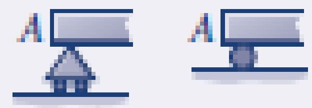
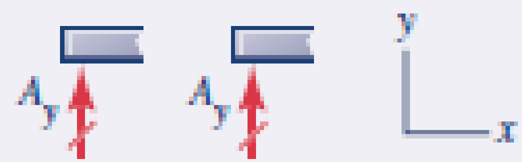
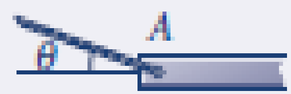
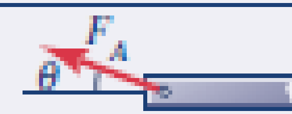
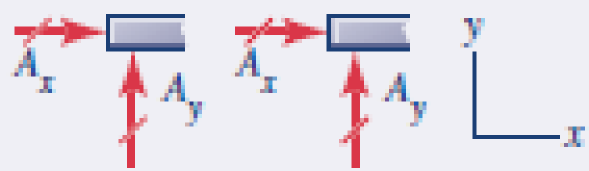
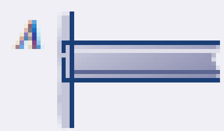
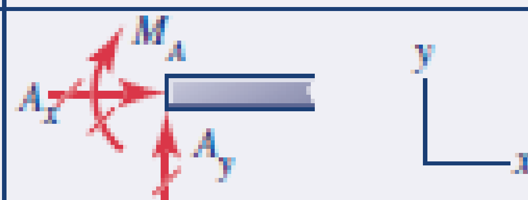
Μηχανική των Υλικών

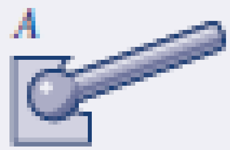
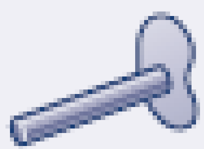
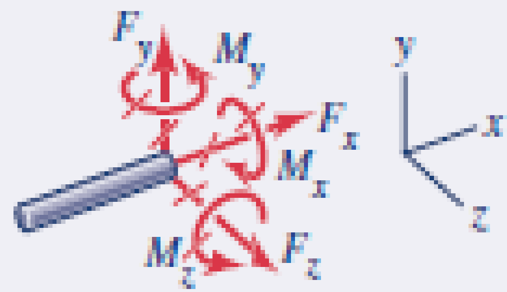
- Τα εξωτερικά φορτία δημιουργούν εσωτερικά φορτία
- Τα εσωτερικά φορτία προξενούν παραμόρφωση του σώματος
- Τα εσωτερικά φορτία προξενούν τάση (stress)
- Κατά πόσο μπορεί να παραμορφωθεί ένα σώμα;
- Πόση τάση μπορεί να αναπτυχθεί;
- Υπό την τάση αυτή είναι το σώμα ασφαλές;
- Πόσο φορτίο μπορεί να δεχθεί ένα σώμα ώστε η τάση που αναπτύσσεται να είναι αρκετά μικρή;

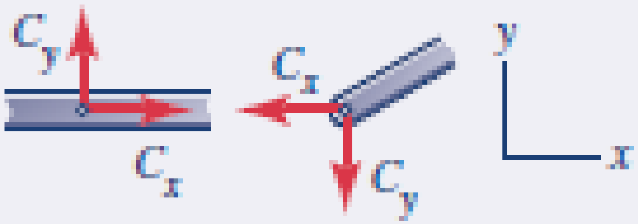
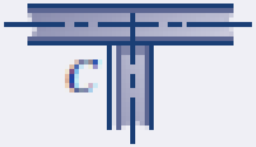
Οι θεμελιώδεις εξισώσεις της Μηχανικής των Παραμορφωσίμων Σωμάτων

1. Πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες ισορροπίας
2. Πρέπει να περιγράφεται η γεωμετρία των παραμορφώσεων
    1. Ορισμοί των ορθών και διατμητικών παραμορφώσεων
    2. Χρήση απλουστεύσεων και ιδανικών καταστάσεων (“rigid body”, “fixed support”, οι επίπεδες τομές παραμένουν επίπεδες, οι μετατοπίσεις είναι μικρές).
    3. Τρόποι σύνδεσης των διαφόρων μελών και γεωμετρική συμβατότητα
    4. Θεώρηση των οριακών συνθηκών και άλλων περιορισμών
3. Πρέπει να εξετάζεται η συμπεριφορά του υλικού (δηλ. οι σχέσεις μεταξύ δύναμης – θερμοκρασίας – παραμόρφωσης των υλικών)

Θεμελιώδεις γνώσεις

REACTIONS – 2D		
1. Roller support		
2. Cable or rod		
3. Pin support		
4. Cantilever support (fixed end)		

<table>
<tr><th>REACTIONS – 3D</th><th></th><th></th></tr>
<tr><td>5. Ball joint</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>6. Cantilever support
(fixed end)</td><td></td><td>
</td></tr>
</table>

CONNECTIONS – 2D		
7. Pinned connection		
8. Rigid connection (e.g., welded, bolted)		

$$1\ \mathrm{N/mm^2} = 1\ \mathrm{MPa}$$

$$1\ \mathrm{kN/mm^2} = 1\ \mathrm{GPa}$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^3}{5!} - \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

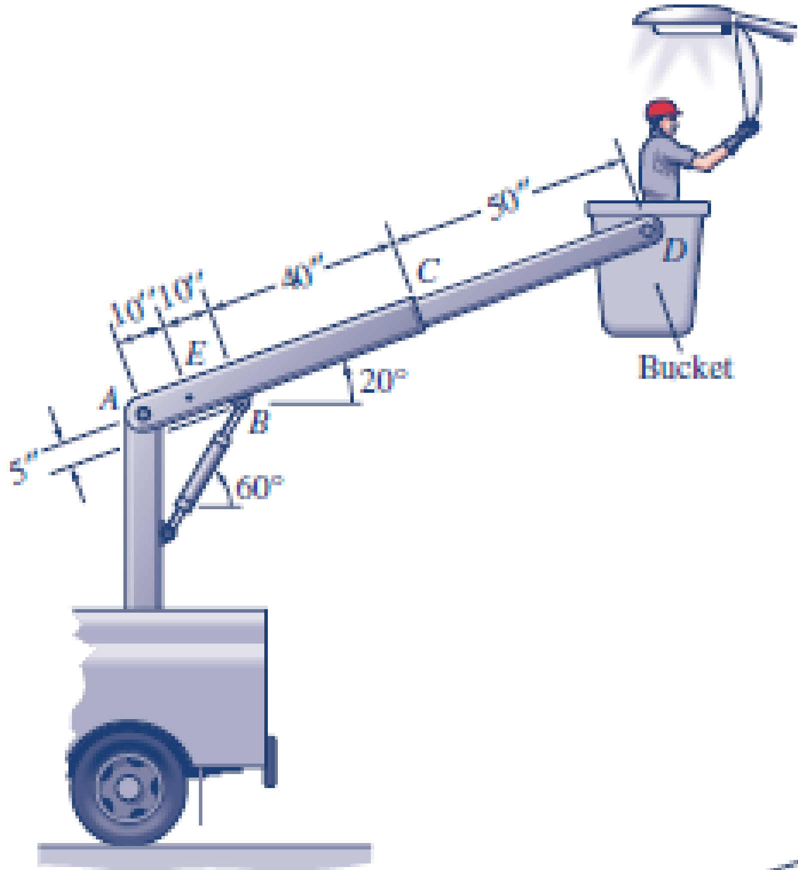
$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^3}{15} + \cdots$$

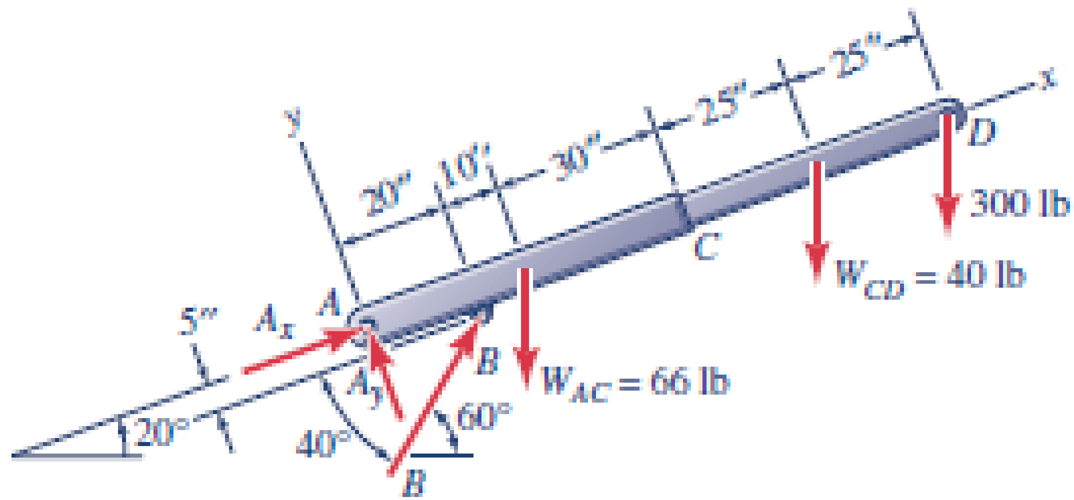
$$\theta \ll 1, \qquad \boxed{\sin\theta \approx \theta, \quad \cos\theta \approx 1, \quad \tan\theta \approx \theta}$$

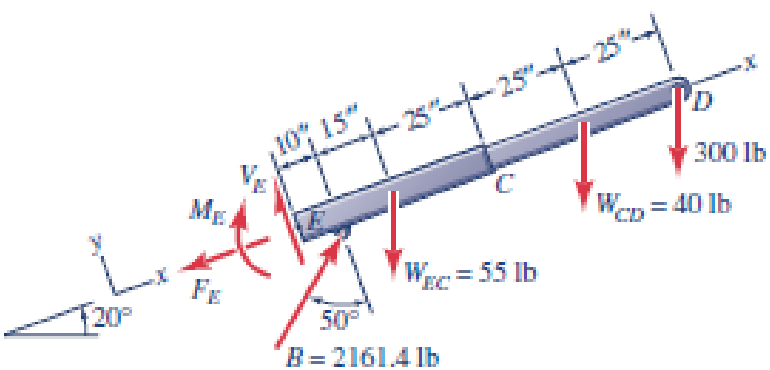
$$(1+\beta)^n = 1 + n\beta + \frac{n(n-1)}{2!}\beta^2 + \cdots$$

$$\beta \ll 1, \qquad \boxed{(1+\beta)^n \approx 1 + n\beta}$$

Διαγράμματα Ελευθέρου Σώματος

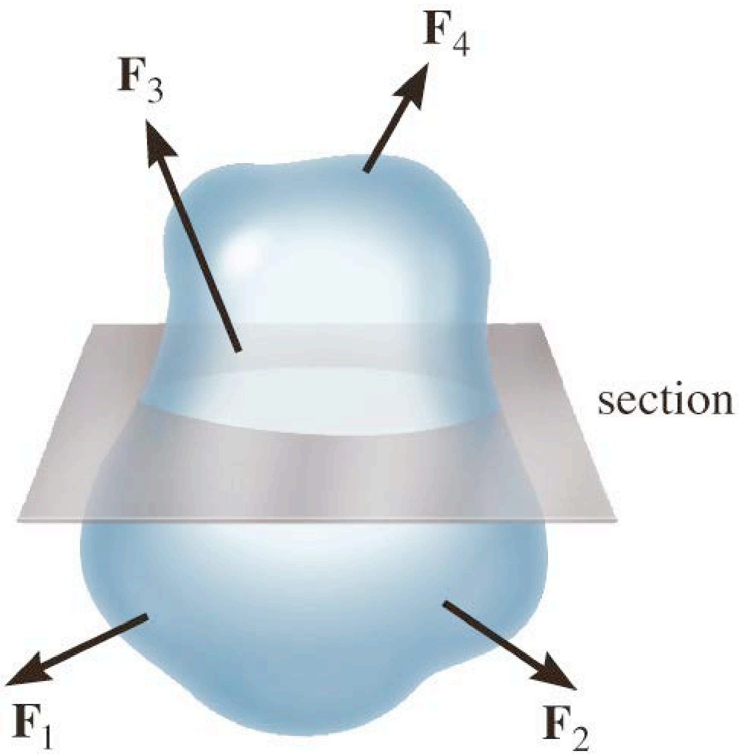






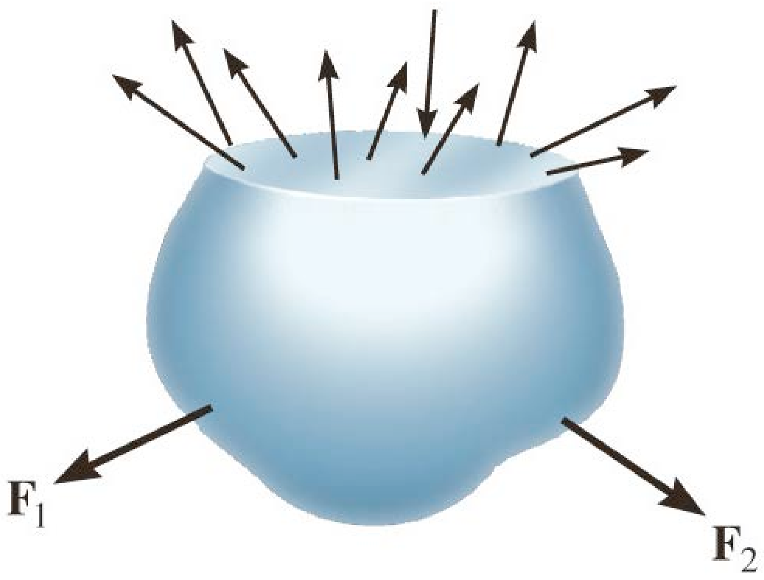
Τάσεις και Παραμορφώσεις στα Υλικά

Internal Reactions



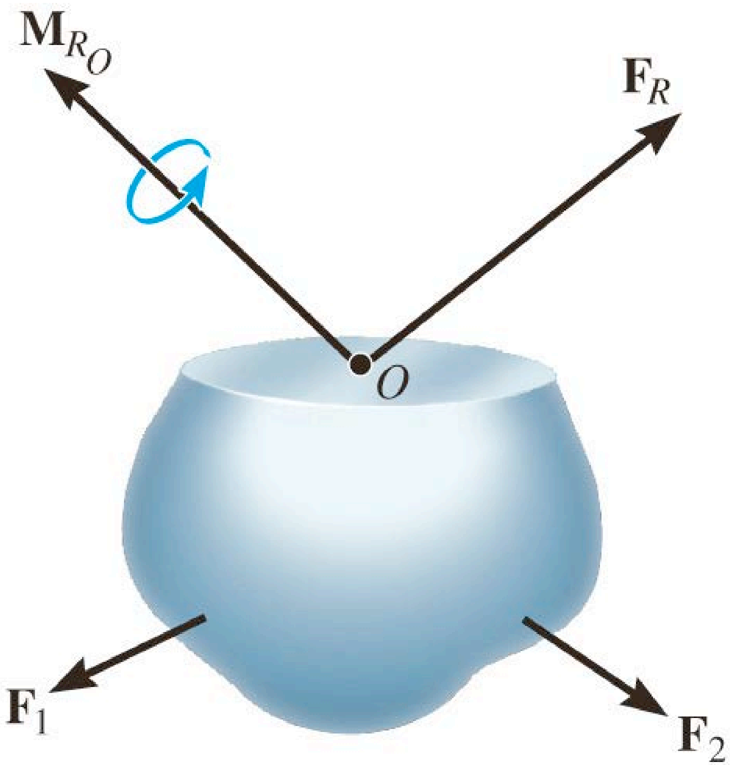
- Internal reactions are necessary to hold body together under loading.
- **Method of sections** - make a cut through body to find internal reactions at the point of the cut.

FBD After Cut



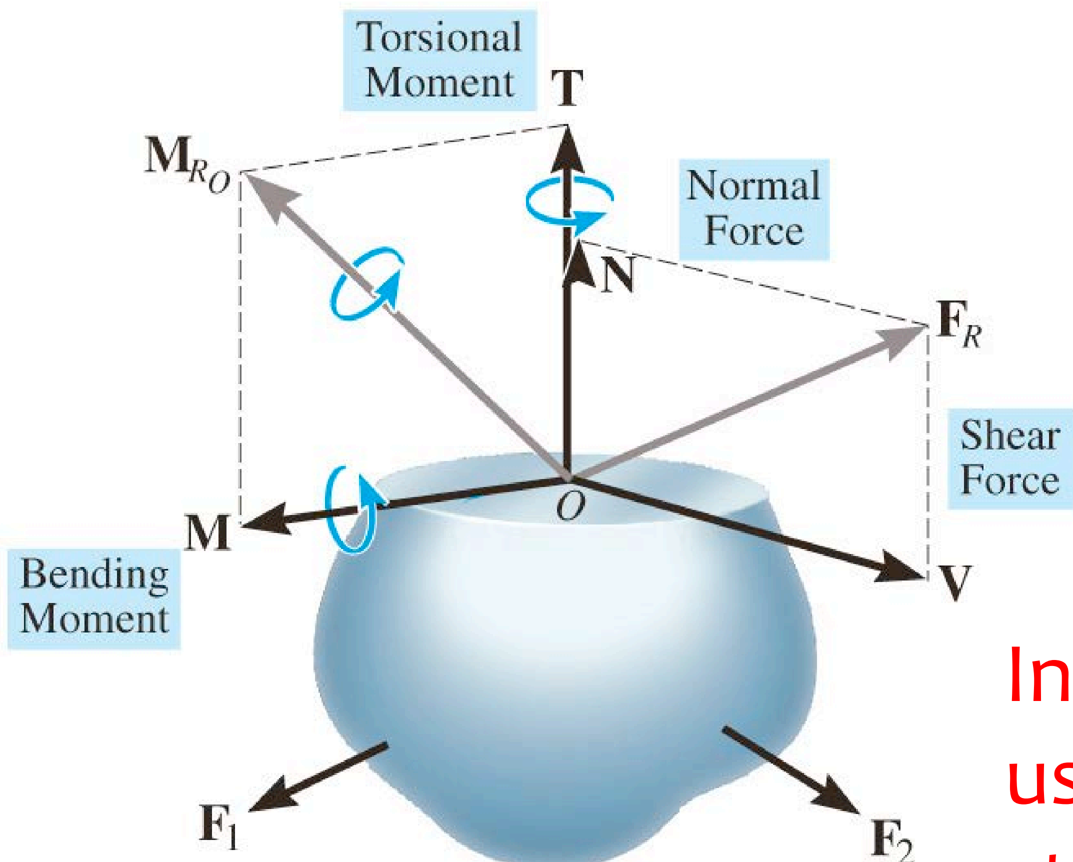
- Separate the two parts and draw a FBD of either side
- Use equations of equilibrium to relate the external loading to the internal reactions.

Resultant Force and Moment



- Point O is taken at the centroid of the section.
- If the member (body) is long and slender, like a rod or beam, the section is generally taken perpendicular to the longitudinal axis.
- Section is called the cross section.

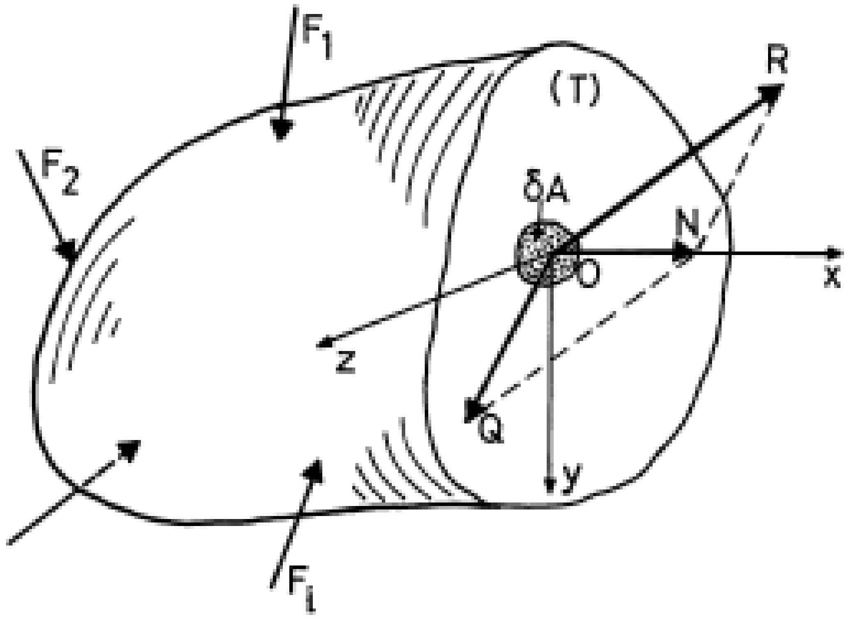
Components of Resultant



- Components are found perpendicular & parallel to the section plane.

Internal reactions are used to determine stresses.

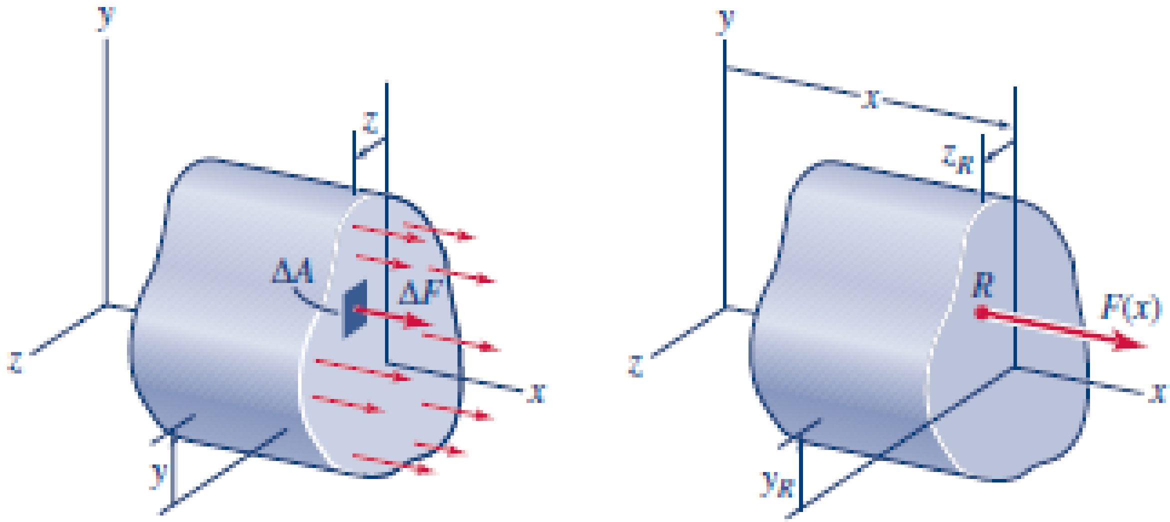
Ορθή τάση (normal stress)



Ορθή τάση $\sigma = lim_{\delta A \to 0} \dfrac{\delta N}{\delta A}$

Διατμητική τάση $\tau = lim_{\delta A \to 0} \dfrac{\delta Q}{\delta A}$

Ορθή τάση (normal stress)



1 MPa = 145.0377 psi

$$\boxed{\sigma(x, y, z) = \lim_{\Delta A \to 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta A} \right)}$$

Normal Stress

$$\boxed{\sigma_{avg} = \frac{F}{A}}$$

Average Normal Stress

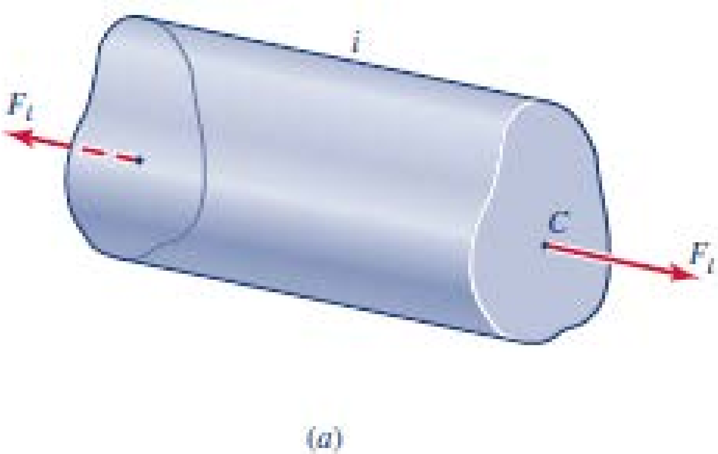
Αξονική Τάση

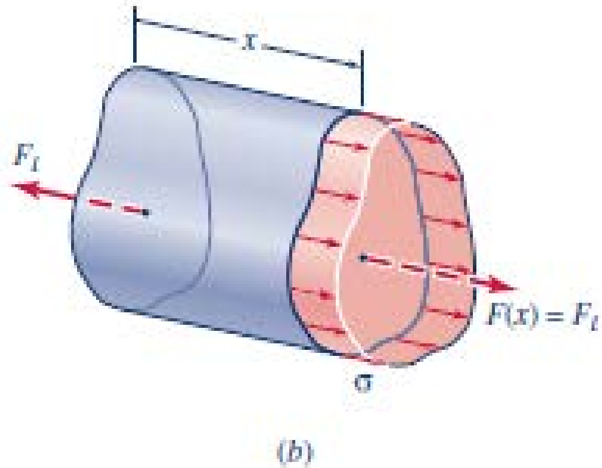
Η ορθή τάση που παραμένει σταθερή σε μια κάθετη διατομή, σε απόσταση x, αντιστοιχεί σε μια αξονική δύναμη:

$$F(x) = A(x) \cdot \sigma(x)$$

η οποία δρα στο κεντροειδές της διατομής στην απόσταση x

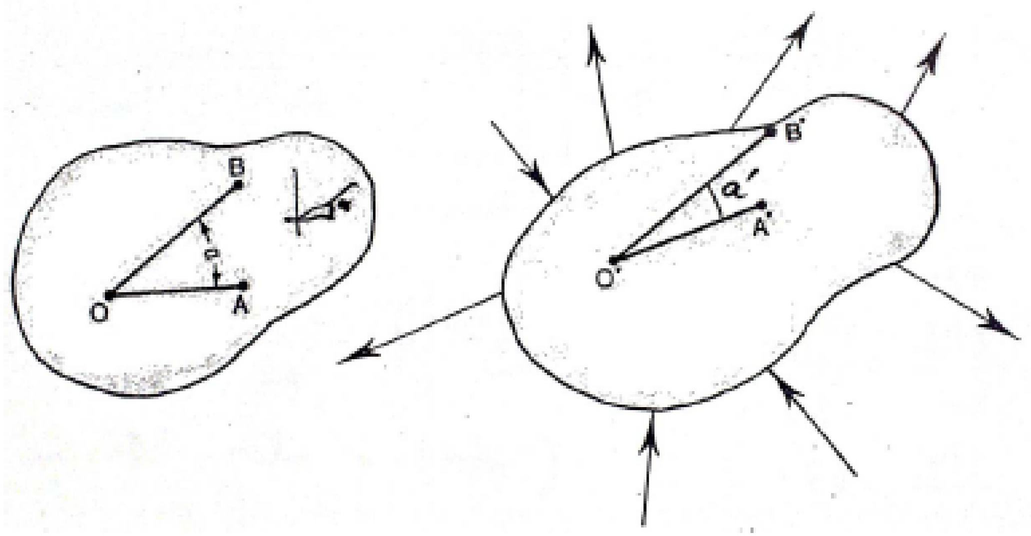
$$\boxed{\sigma(x) = \frac{F(x)}{A(x)}}$$



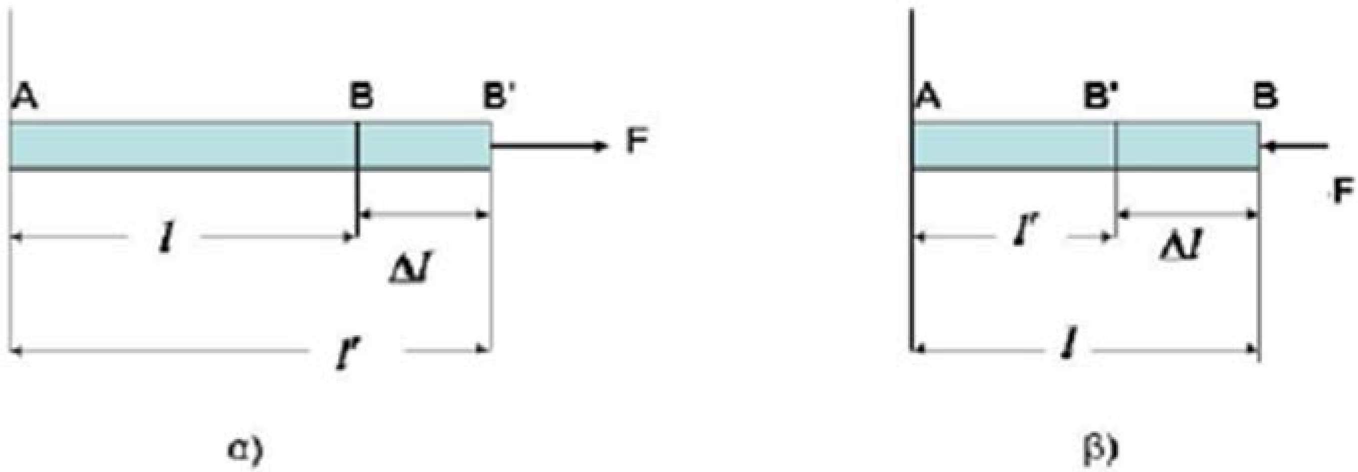


Ορισμός παραμόρφωσης (strain)

Παραμόρφωση ορίζεται ως το σύνολο των μετατοπίσεων των σημείων ενός σώματος που οδηγούν στην μεταβολή της γεωμετρίας του σχήματος. Μακροσκοπικά εκφράζεται από το παρακάτω σχήμα.

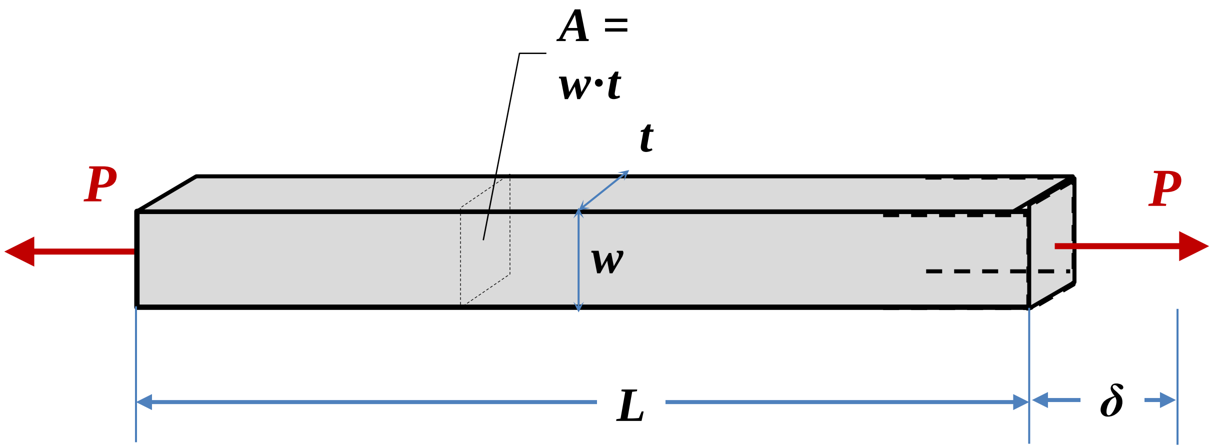


Αξονική παραμόρφωση (axial strain)



α) Επιμήκυνση εφελκυόμενης ράβδου
και β) επιβράχυνση θλιβόμενης ράβδου

Β) <u>Η σχετική (ή ανηγμένη) παραμόρφωση ε (strain),</u> έχει ιδιαίτερες ονομασίες ανάλογα με το είδος της παραμόρφωσης που υφίσταται το σώμα, όπως για παράδειγμα, σχετική διόγκωση $\frac{\Delta V}{V}$ και σχετική επιμήκυνση (ή σχετική επιβράχυνση) $\frac{\Delta l}{l}$, που είναι η επιμήκυνση (ή επιβράχυνση) Δl που υφίσταται ένα υλικό ως προς το αρχικό του μήκος l.



$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{wt}$$ *Normal* stress

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$ *Normal* strain

Dimensions

Typical units

$$\doteq \frac{[F]}{[A]} \doteq \frac{[F]}{[L]^2}$$

$$\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{m}^2} \equiv \mathbf{Pa}$$

Dimensions

Typical units

$$\doteq \frac{[L]}{[L]}$$ (dimensionless)

μ-strain $= 10^{-6}$

Normal Strain

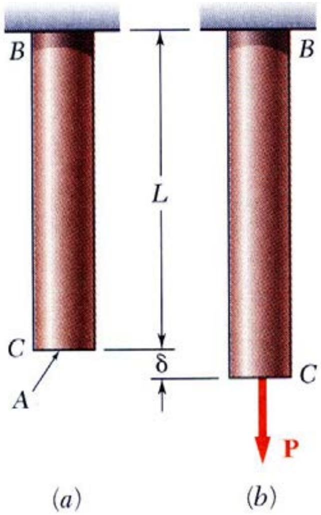


Fig. 2.1

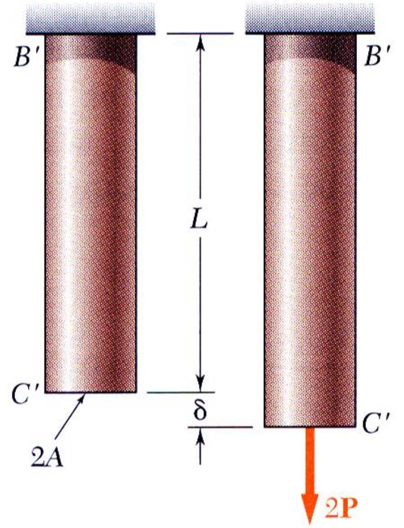


Fig. 2.3

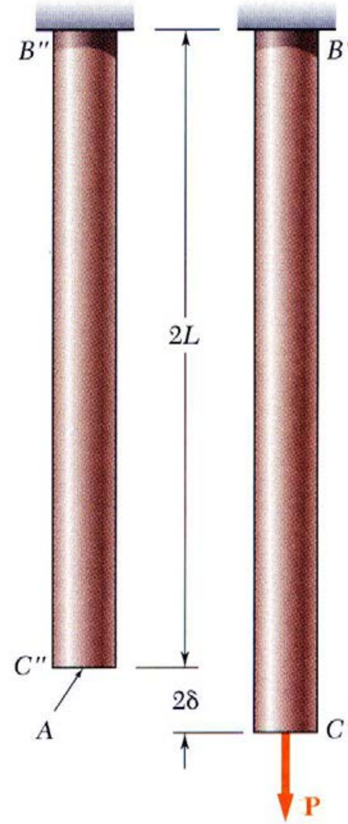


Fig. 2.4

$$\sigma = \frac{P}{A} = \text{stress}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \text{normal strain}$$

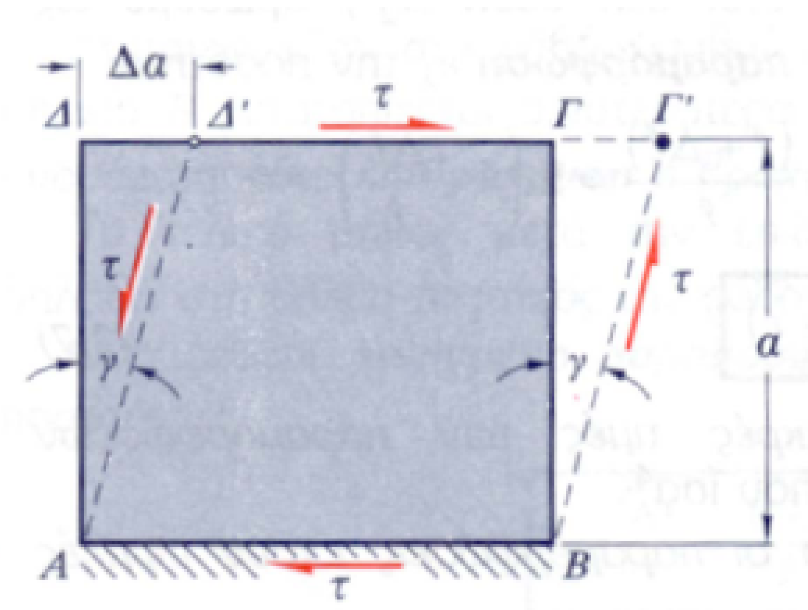
$$\sigma = \frac{2P}{2A} = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{2\delta}{2L} = \frac{\delta}{L}$$

Διατμητική παραμόρφωση (shear strain)



Η *γωνιακή* ή *διατμητική παραμόρφωση*, *γ (σε ακτίνια rad)*, στο στοιχείο κύβου σε επίπεδη εντατική παραμόρφωση ορίζεται ως:

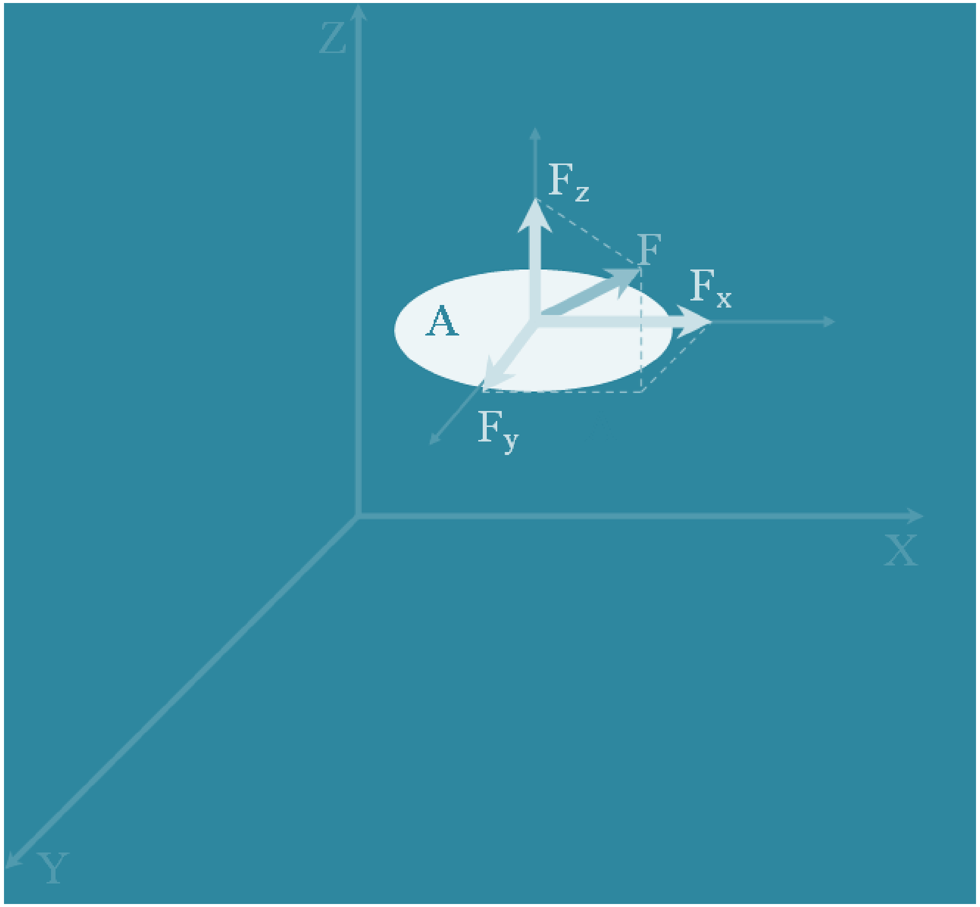
$$\gamma \approx \tan\gamma = \frac{\Delta\alpha}{\alpha}$$

Είδη παραμόρφωσης

- **Ελαστική παραμόρφωση** το σώμα επανέρχεται στο αρχικό του σχήμα όταν πάψει να ενεργεί η δύναμη που προκάλεσε την παραμόρφωση. Παράδειγμα ελαστικής παραμόρφωσης είναι αυτή ενός ελατηρίου, που επανέρχεται στο αρχικό του μήκος μόλις πάψει να του ασκείται δύναμη. **Η ελαστική παραμόρφωση περιγράφεται μαθηματικά από το νόμο του Hooke.**
- **Πλαστική παραμόρφωση** είναι αυτή που είναι μόνιμη, δηλαδή το σώμα δεν επανέρχεται στο αρχικό του σχήμα. Παράδειγμα μπορεί να είναι το τράβηγμα ενός κομματιού πλαστελίνης, το ξεχείλωμα μιας πλαστικής σακούλας κλπ.

Ορισμός ορθών και διατμητικών τάσεων

F = τυχαία δύναμη ασκούμενη στην επιφάνεια εμβαδού A



ΟΡΘΗ ΤΑΣΗ (Normal stress)

$$\tau_{zz} = \frac{F_z}{A}$$

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΤΑΣΗ (Shear stress)

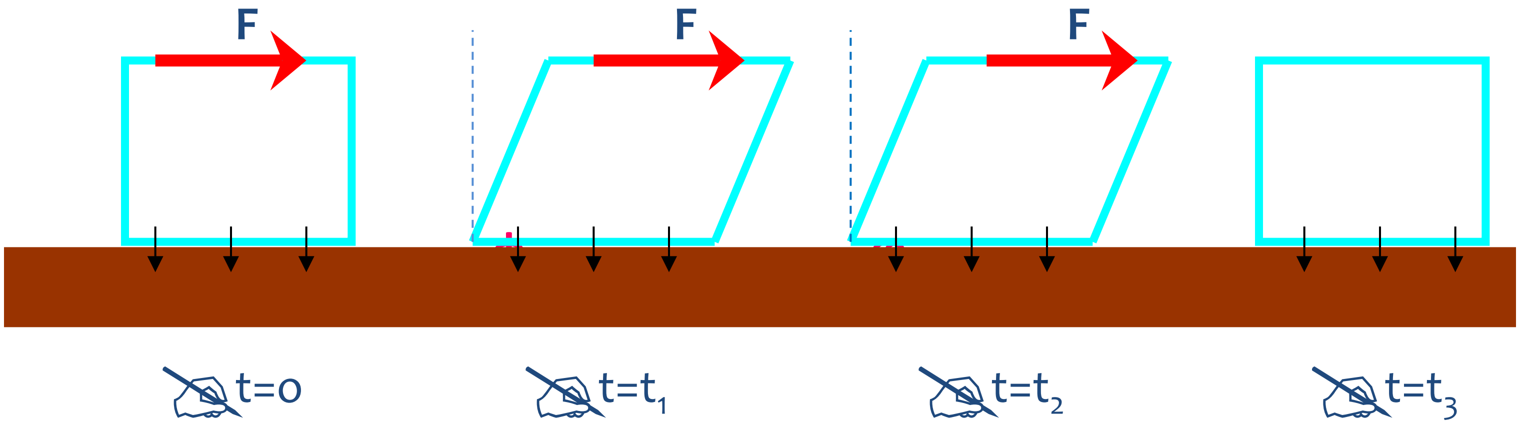
$$\tau_{zx} = \frac{F_x}{A} \qquad \tau_{zy} = \frac{F_y}{A}$$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ ΤΑΣΕΩΝ

$\tau_{\boxed{z}y}$

δείχνει τον άξονα κάθετα στον οποίο βρίσκεται η επιφάνεια στην οποία ασκείται η τάση

δείχνει τον άξονα στον οποίο βρίσκεται η δύναμη η οποία ασκεί τη τάση



Η άσκηση σταθερής τάσης προκαλεί σταθερή παραμόρφωση

Εξαφάνιση παραμόρφωσης όταν παύει να ασκείται τάση

Νόμος Hooke **F ~ φ** **Δύναμη ανάλογη της παραμόρφωσης**

Νόμος του Hooke

Στα **στερεά ελαστικά υλικά σώματα** υπάρχει ο **νόμος Hooke** που συνδέει **την εφελκυστική τάση** (tensile stress) ως αίτιο**,** με την **ελαστική παραμόρφωση** (strain) ως αποτέλεσμα**,** εισάγοντας το **μέτρο ελαστικότητας *Y* (Young's Modulus):**

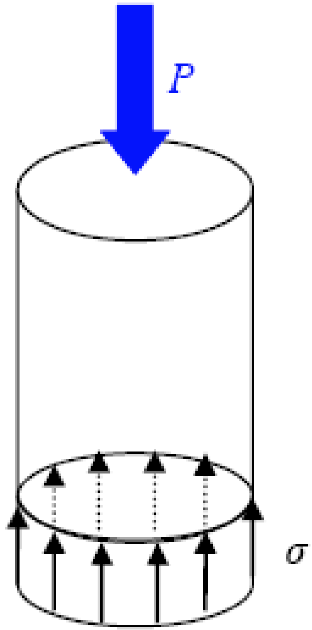
$$Y = \frac{\text{Εφελκυστική Τάση}}{\text{Ελαστική Παραμόρφωση}} = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta L}{L}}$$

Νόμος του Hooke σε μονοαξονική φόρτιση

Isotropic = material properties do not vary with direction or orientation.   E.g.: metals

Anisotropic = material properties vary with direction or orientation. E.g.: wood, composites

Τάση – Παραμόρφωση – Ελαστικότητα - Πλαστικότητα



$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$1\text{MPa} = 10^6 \frac{N}{m^2}(\text{Pa}) = 10^3 \frac{kN}{m^2} = 0.1 \frac{kN}{cm^2}$$

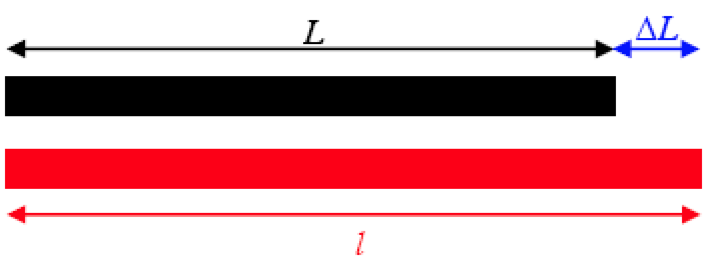
$$1\text{GPa} = 10^9 \frac{N}{m^2}(\text{Pa}) = 10^6 \frac{kN}{m^2} = 100 \frac{kN}{cm^2}$$

Τάση είναι η μέση δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα ανά μονάδα επιφανείας. Είναι ένα μέτρο της έντασης που αναπτύσσεται εντός ενός σώματος, σε μια νοητή επιφάνεια, ως αντίδραση των εξωτερικά επιβαλλόμενων δυνάμεων.

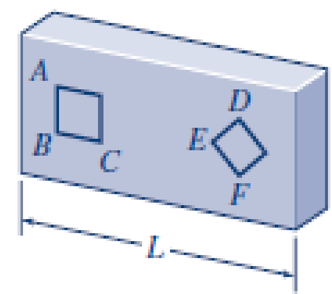
Παραμόρφωση

Παραμόρφωση (για μονοαξονική φόρτιση) είναι ο λόγος της μεταβολής του μήκους ενός σώματος προς το μήκος του σώματος. Είναι το αποτέλεσμα της ανάπτυξης των τάσεων ως αντίδραση στις εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις ***ή στη μεταβολή της θερμοκρασίας***. Η παραμόρφωση είναι **αδιάστατη** ποσότητα.

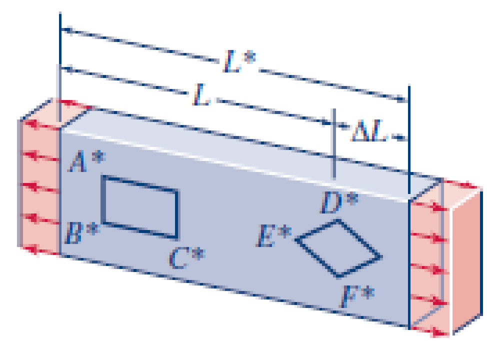
$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{l - L}{L}$$



$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{l - L}{L}$$



(a) The undeformed bar.



(b) The deformed bar.

Παραμόρφωση ευθύγραμμου φορέα : μέση εφελκυστική (θετική τιμή) ή θλιπτική (αρνητική τιμή) παραμόρφωση. Μονάδες μm/m, μin/in

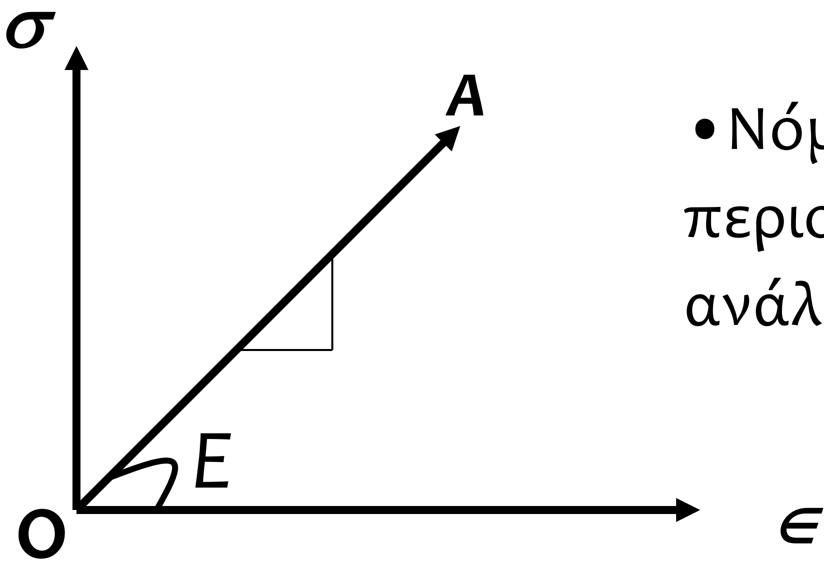
- Στην απλούστερη περίπτωση της μονοαξονικής έντασης ισχύει ο νόμος του Hooke

$$\sigma = E\varepsilon$$

E είναι το μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young (***Y***)

Ελαστικότητα είναι η ιδιότητα ενός σώματος να παραμορφώνεται κατά **μη μόνιμο** τρόπο μετά την επιβολή μιας έντασης (δύναμης).

Πλαστικότητα είναι η είναι η ιδιότητα ενός σώματος να παραμορφώνεται κατά **μόνιμο τρόπο** μετά την επιβολή μιας έντασης (δύναμης).



- Νόμος του Hooke: στην ελαστική περιοχή, η παραμόρφωση είναι ανάλογη της τάσης δηλ. $\sigma \alpha \in$

$\sigma = E \in$, **όπου** E=Young's modulus

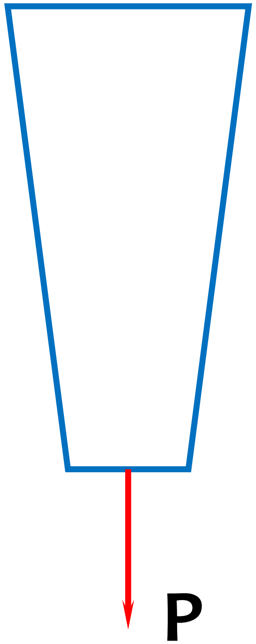
$\sigma = P/A$ και $\in = \delta / L$ → $P/A = E\,(\delta / L)$

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

Για ομογενή υλικά

Όταν υπάρχουν μεταβολές στη φόρτιση, στις διατομές ή στα υλικά τότε ισχύει :

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$



$$d\delta = \varepsilon dx = \frac{Pdx}{AE}$$

(για ράβδους μεταβλητής διατομής)

$$\delta = \int_{o}^{L} \frac{Pdx}{AE}$$

$$\boldsymbol{\delta_{B/A} = \delta_B - \delta_A = \frac{PL}{AE}}$$

True Stress and True Strain

Eng. Stress = P/A_o

A_o = original area

True Stress = P/A

A = instantaneous area

Eng. Strain = $\dfrac{\delta}{L_o}$

L_o = original length

True Strain = $\varepsilon_t = \Sigma\Delta\varepsilon = \Sigma(\Delta L / L)$

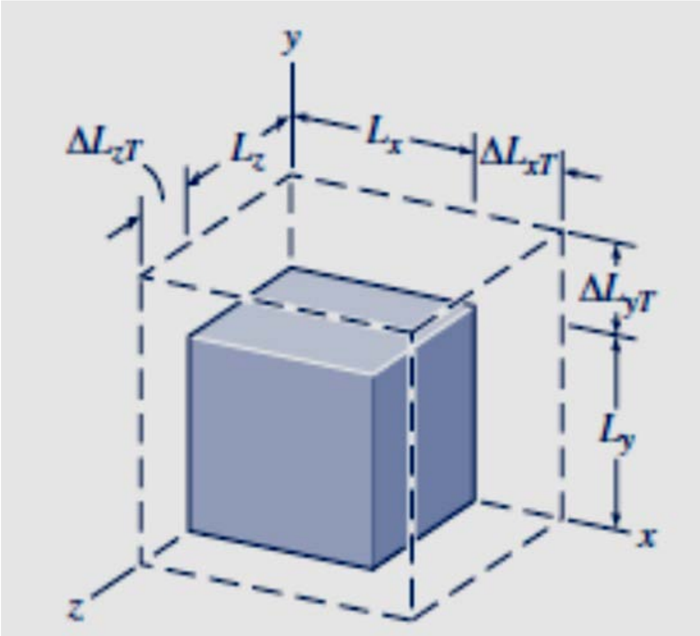
L = instantaneous length

$$\varepsilon_t = \int_{L_o}^{L} \frac{dL}{L} = \ell n \frac{L}{L_o}$$

Θερμική Παραμόρφωση

$$\epsilon_T = \alpha \Delta T$$

α = συντελεστής θερμικής διαστολής



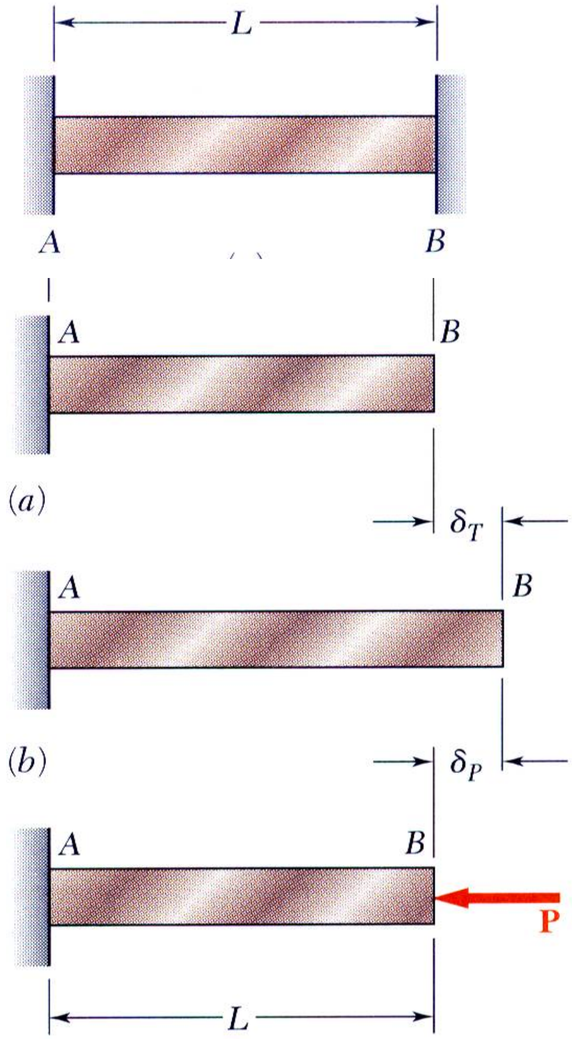
$$\epsilon_{xT} = \epsilon_{yT} = \epsilon_{zT} = \alpha \Delta T$$

$$\Delta L_{xT} = (\alpha \Delta T) L_x$$

$$\Delta L_{yT} = (\alpha \Delta T) L_y$$

$$\Delta L_{zT} = (\alpha \Delta T) L_z$$

Θερμικές Τάσεις



- A temperature change results in a change in length or *thermal strain*. There is no stress associated with the thermal strain unless the elongation is restrained by the supports.

- Treat the additional support as redundant and apply the principle of superposition.

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \qquad \delta_P = \frac{PL}{AE}$$

$$\alpha = \text{thermal expansion coef.}$$

- The thermal deformation and the deformation from the redundant support must be compatible.

$$\delta = \delta_T + \delta_P = 0$$

$$\alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$$

$$\delta = \delta_T + \delta_P = 0$$

$$P = -AE\alpha(\Delta T)$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = -E\alpha(\Delta T)$$

Statically Indeterminate Problems

A. **Statically Determinate Problems:**

-- Problems that can be solved by Statics, i.e. $\Sigma F = 0$ and $\Sigma M = 0$ & the FBD

B. **Statically Indeterminate Problems:**

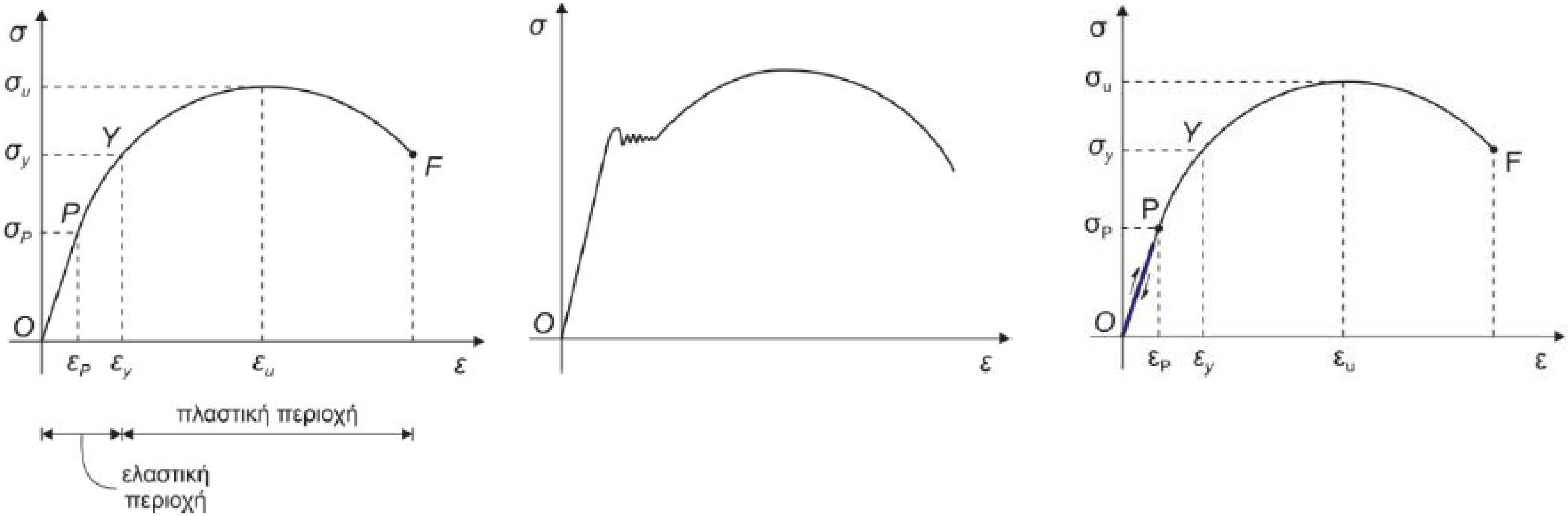
-- Problems that cannot be solved by Statics

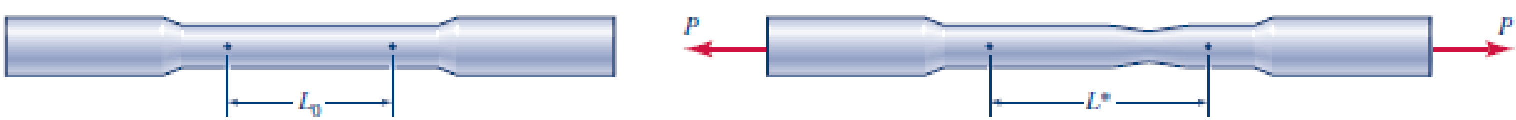
-- The number of unknowns > the number of equations

-- Must involve "deformation"

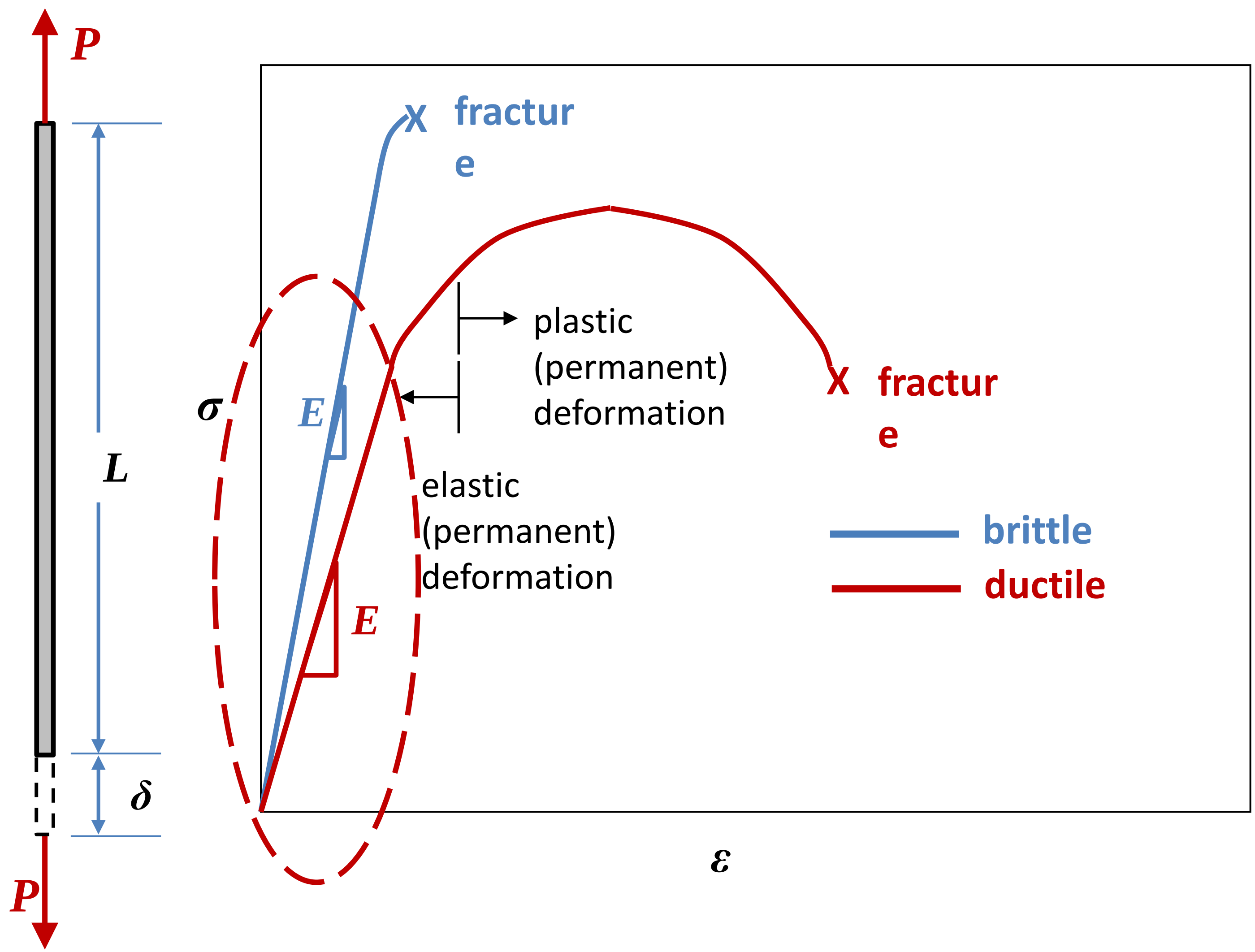
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΤΑΣΕΩΝ - ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

Η πειραματική δοκιμή του μονοαξονικού εφελκυσμού





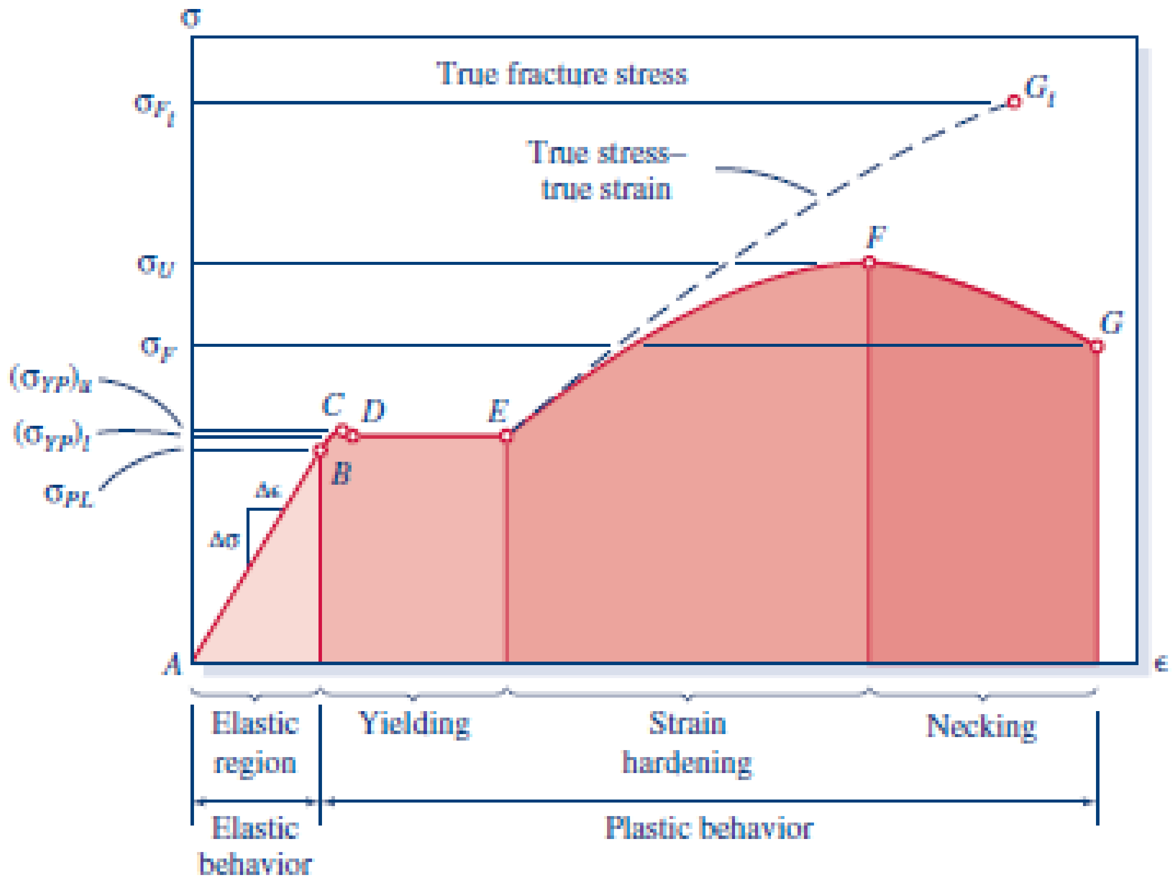
How are stress and strain related to each other?



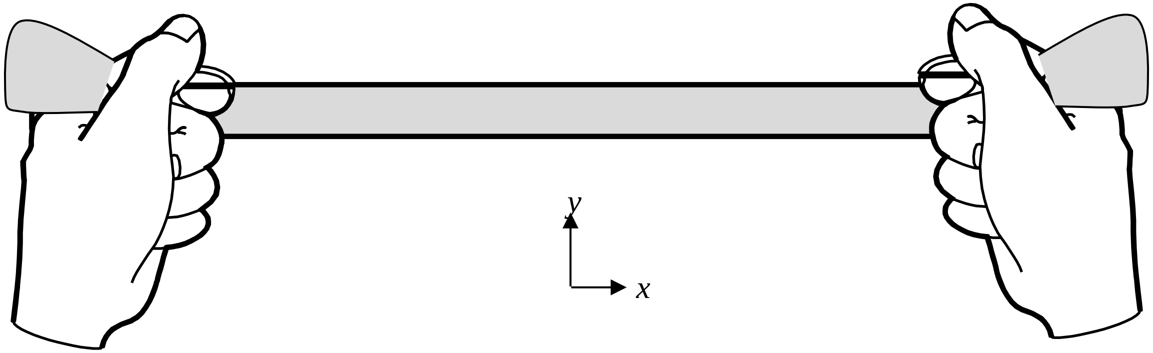
$$\sigma = E \ \varepsilon$$

Young's modulus
(Modulus of
elasticity,
Elastic modulus)

Διάγραμμα τάσης – παραμόρφωσης για δομικό χάλυβα σε εφελκυσμό



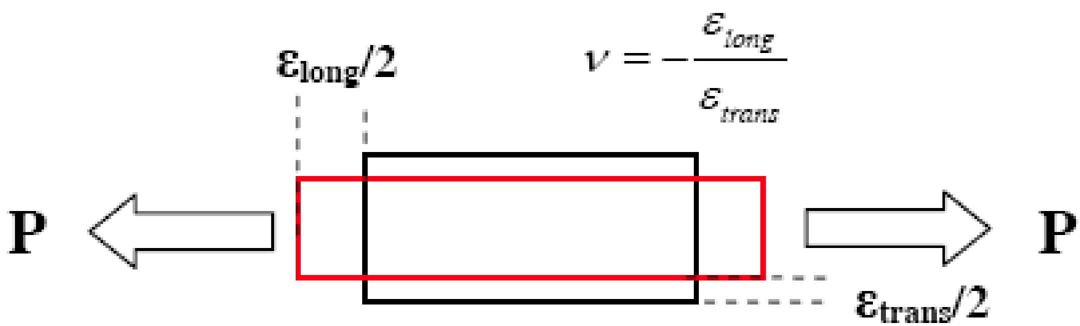
Η παραμόρφωση σε μία διάσταση προκαλεί παραμορφώσεις στις υπόλοιπες διαστάσεις



$$\epsilon_y = -\nu \, \epsilon_x$$

Poisson's ratio

Συντελεστής (λόγος) του Poisson

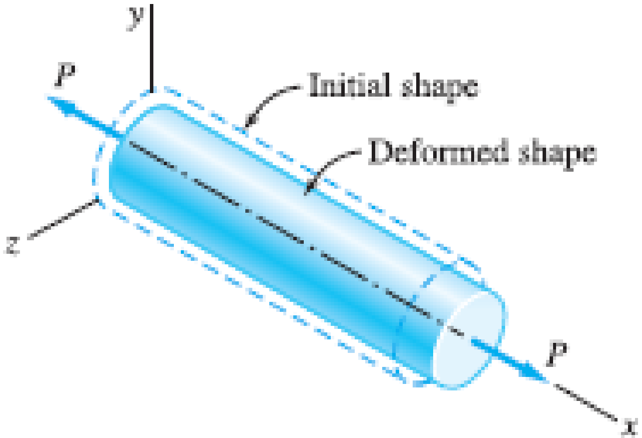


$$\boxed{\nu = -\frac{\varepsilon_{long}}{\varepsilon_{trans}}}$$

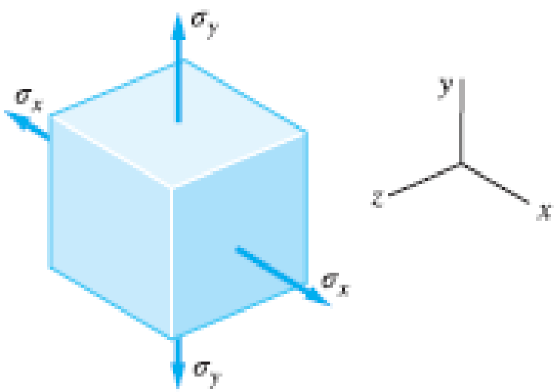
Ο λόγος του Poisson ορίζεται ως ο αρνητικός λόγος της εγκάρσιας προς τη διαμήκη παραμόρφωση του υλικού όταν αυτό εντείνεται μονοαξονικά κατά τη διαμήκη διεύθυνση.

Όταν ένα υλικό παρουσιάζει θετικό συντελεστή Poisson συμπεραίνουμε ότι σε περίπτωση επιμήκυνσης ενός στοιχειώδους τμήματος κατά τη διαμήκη διεύθυνση λόγω αξονικής εφελκυστικής δύναμης θα παρατηρηθεί βράχυνση του στοιχειώδους τμήματος στις άλλες δύο διευθύνσεις

Γενικευμένος νόμος του Hooke

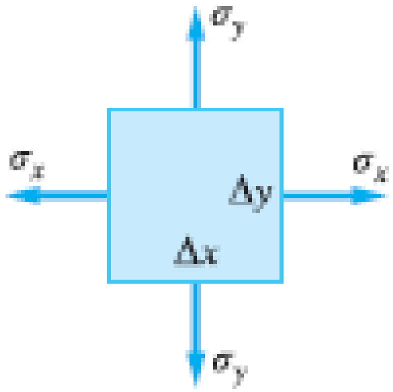


$$\boxed{\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\epsilon_x}$$

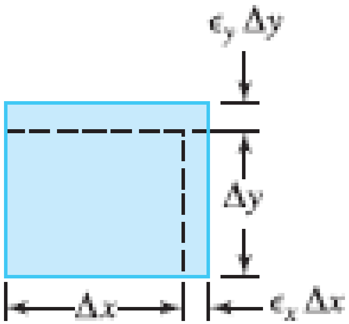


$$\boxed{\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}}$$

Φόρτιση σε 2 διαστάσεις

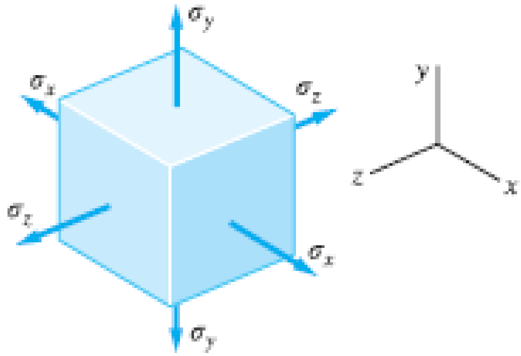


$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad \epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$



$$\sigma_x = \frac{(\epsilon_x + \nu\epsilon_y)E}{1-\nu^2} \qquad \sigma_y = \frac{(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)E}{1-\nu^2}$$

Φόρτιση σε 3 διαστάσεις



$$\epsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right]$$

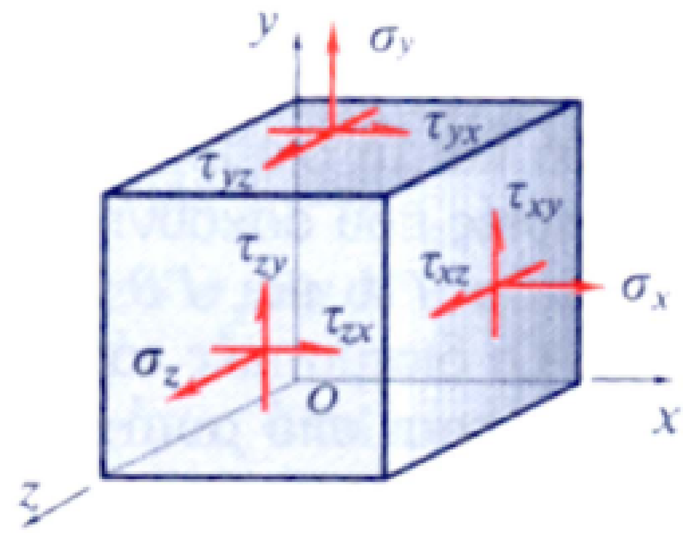
$$\epsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

Τάσεις στις 3 διαστάσεις

- Η έννοια του «απειροελάχιστου κύβου» για την μελέτη των τάσεων/ παραμορφώσεων σε πραγματικά υλικά.

- Τάσεις εξασκούνται κάθετα στις πλευρές του κύβου (ορθές τάσεις) αλλά και στα επίπεδα των πλευρών

- Λόγω συμμετρίας η ανάλυση γίνεται μόνο στην θετική φορά των τριών πλευρών του σχήματος



Τριαξονική καταπόνηση σε Oxyz

Ορθές και Διατμητικές Τάσεις

Στον απειροελάχιστο «κύβο» εξασκούνται 3 *ορθές* και 6 *διατμητικές* τάσεις. Οι τάσεις συμβολίζονται ως εξής:

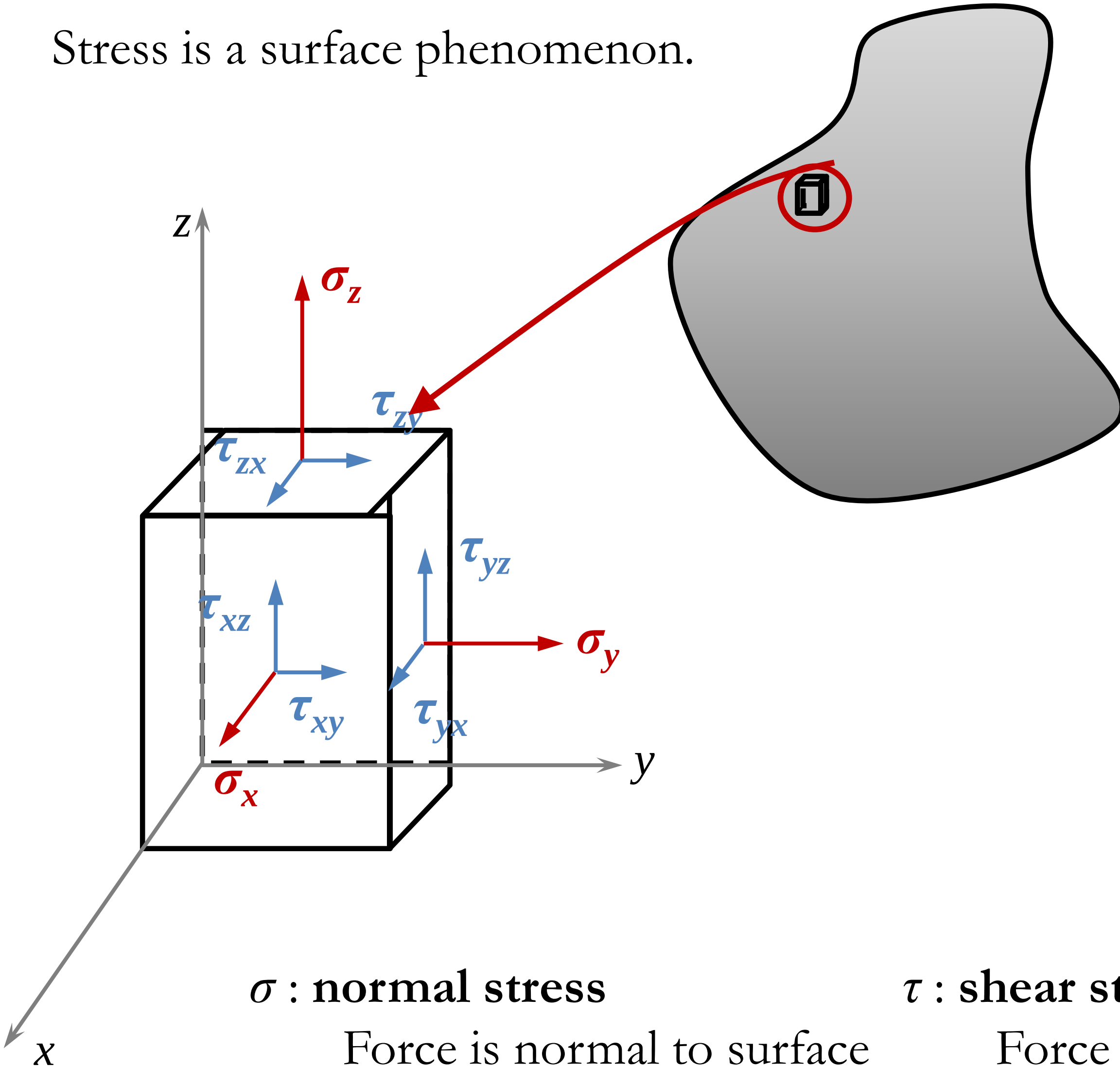
$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}$$

Το *i* αναφέρεται στο επίπεδο που η τάση ***δρα***

Κάθε «επίπεδο» ορίζεται από τον κάθετο άξονα του. Π.χ. “*yz*”=*x*, “*xy*”=*z*, “*xz*”=*y*

Το *j* αναφέρεται στην παραλληλία με άξονα συντεταγμένων

Stress is a surface phenomenon.



$$\Sigma \mathbf{F} = 0, \ \Sigma \mathbf{M}_o = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$
$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

σ : **normal stress**

Force is normal to surface

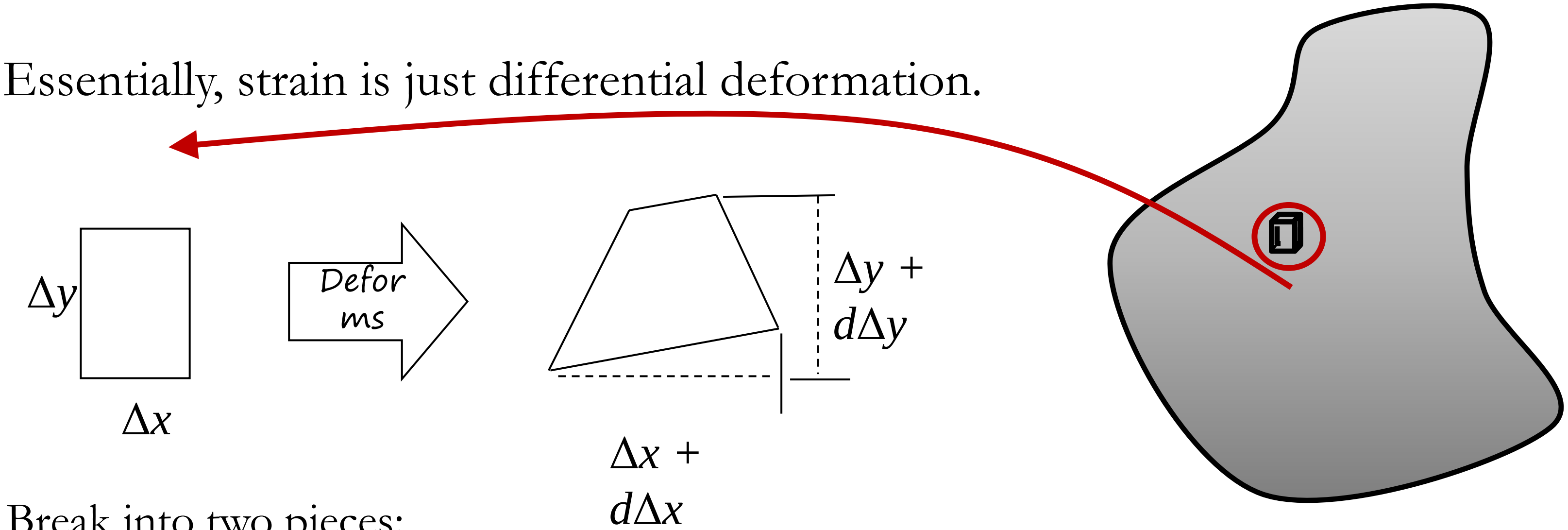
σ_x → stress normal to x-surface

τ : **shear stress**

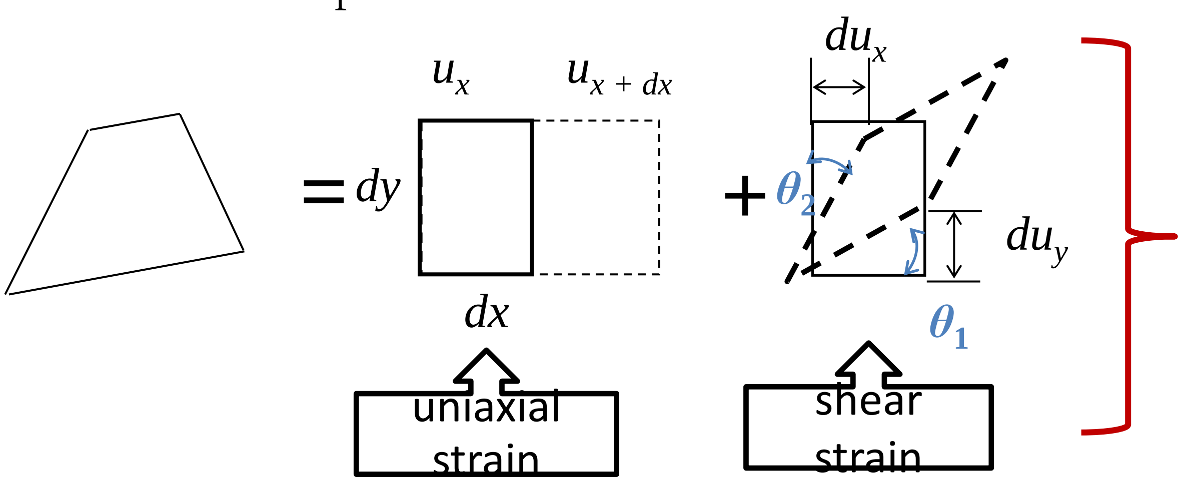
Force is parallel to surface

τ_{xy} → stress on x-surface in y-direction

Essentially, strain is just differential deformation.



Break into two pieces:



Shear strain is strain with no volume change.

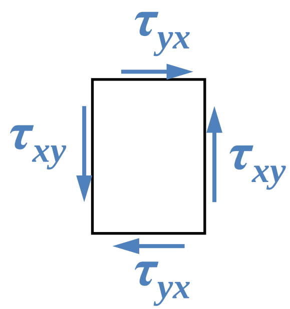
u: displacement

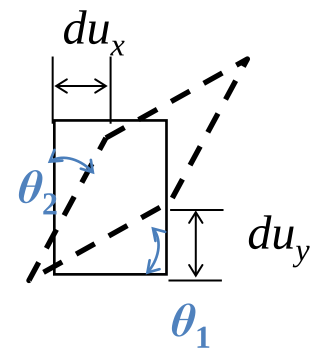
$$\varepsilon_x = \frac{du_x}{dx} \qquad \gamma_{xy} = \left(\frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx}\right) \approx \left(\theta_1 + \theta_2\right)$$

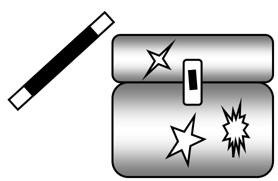
Just as normal stress causes uniaxial (normal) strain, shear stress causes shear strain.

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

shear modulus







Transformations

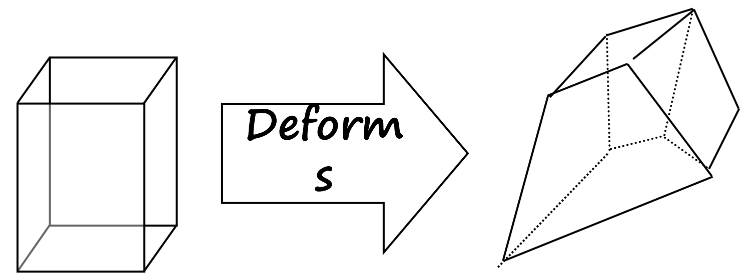
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- **Limits on ν:**

$$0 < \nu < 0.5$$

$\nu = 0.5 \rightarrow$ incompressible

The previous stress/strain relations hold for either pure uniaxial stress or pure shear stress. Most real deformations, however, are complicated combinations of both, and these relations do not hold



$$\varepsilon_x = \left[\ \frac{\sigma_x}{E}\ \right] + \left[\ -\nu\frac{\sigma_y}{E}\ \right] + \left[\ -\nu\frac{\sigma_z}{E}\ \right] \qquad \tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}$$

x normal strain due to x normal stress	x normal strain due to y normal stress	x normal strain due to z normal stress

Generalized Hooke's law

For a general 3-D deformation of an isotropic material, then

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \qquad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}$$

Generalized Hooke's Law

Σχέση τάσεων – παραμορφώσεων σε μορφή μητρώων

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{E}} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & & & & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

- Με αναστροφή του μητρώου

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \text{ όπου } \mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ & & & & 0.5-\nu & 0 \\ & & & & & 0.5-\nu \end{bmatrix}$$

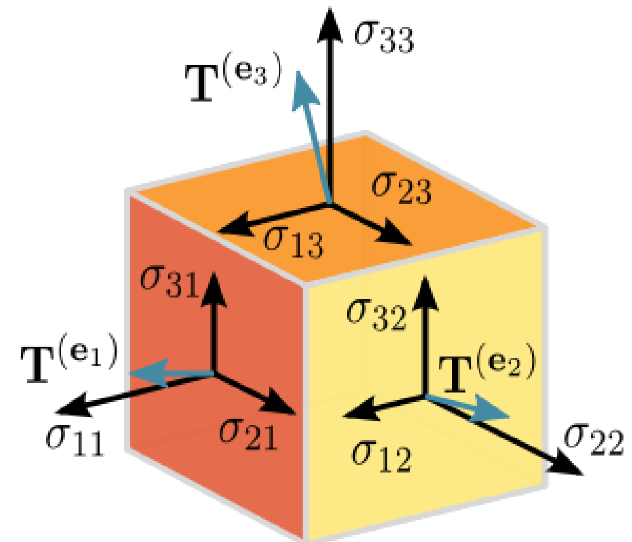
Τανυστές (tensors)

- Τα βαθμωτά και τα διανυσματικά μεγέθη είναι δύο ειδικές περιπτώσεις μιας πιο γενικής έννοιας, που ονομάζεται **τανυστής τάξεως n,** του οποίου ο προσδιορισμός σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων τριών διαστάσεων απαιτεί **3^n** αριθμούς, που ονομάζονται συνιστώσες του τανυστή. Τα βαθμωτά μεγέθη είναι τανυστές μηδενικής τάξεως (0) με μια συνιστώσα, τα διανύσματα είναι τανυστές τάξεως πρώτης (1) με 3 συνιστώσες και **οι τάσεις είναι τανυστές δεύτερης (2) τάξης με εννέα συνιστώσες**. Αντίστοιχα ένας τανυστής τρίτης τάξης έχει 27 συνιστώσες και τέταρτης τάξης έχει 81 συνιστώσες.
- Όμως, ένας τανυστής τάξεως n έχει ευρύτερη έννοια από ένα απλό σύνολο 3^n αριθμών. **Το κύριο χαρακτηριστικό ενός τανυστή είναι ο νόμος μετασχηματισμού των συνιστωσών του, δηλ. ο τρόπος με το οποίο οι συνιστώσες του (x, y, z), σε ένα σύστημα συντεταγμένων Ο, σχετίζονται με τις συνιστώσες του (x΄, y΄, z΄) σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων Ο΄.**

Τανυστές (tensors)

Οι **τανυστές** (tensors) είναι γεωμετρικά αντικείμενα που μπορούν να θεωρηθούν ως γενικευμένα διανύσματα. Περιγράφουν γραμμικές σχέσεις ανάμεσα σε διανύσματα, βαθμωτά μεγέθη και άλλους τανυστές. Βασικά παραδείγματα τέτοιων σχέσεων περιλαμβάνουν το εσωτερικό γινόμενο, το εξωτερικό γινόμενο και γραμμικούς μετασχηματισμούς. Τα διανύσματα και τα βαθμωτά μεγέθη είναι επίσης τανυστές.

Οι τανυστές χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν αντιστοιχίες ανάμεσα σε σύνολα γεωμετρικών διανυσμάτων. Για παράδειγμα, ο τανυστής τάσεων Cauchy **T** παίρνει τη διεύθυνση **v** σαν εισερχόμενα δεδομένα (input) και παράγει τις τάσεις $\mathbf{T}^{(v)}$ στην επιφάνεια κάθετα σε αυτό το διάνυσμα σαν εξερχόμενα δεδομένα (output), εκφράζοντας έτσι τη σχέση μεταξύ αυτών των δύο διανυσμάτων, όπως φαίνεται και στο σχήμα (δεξιά).



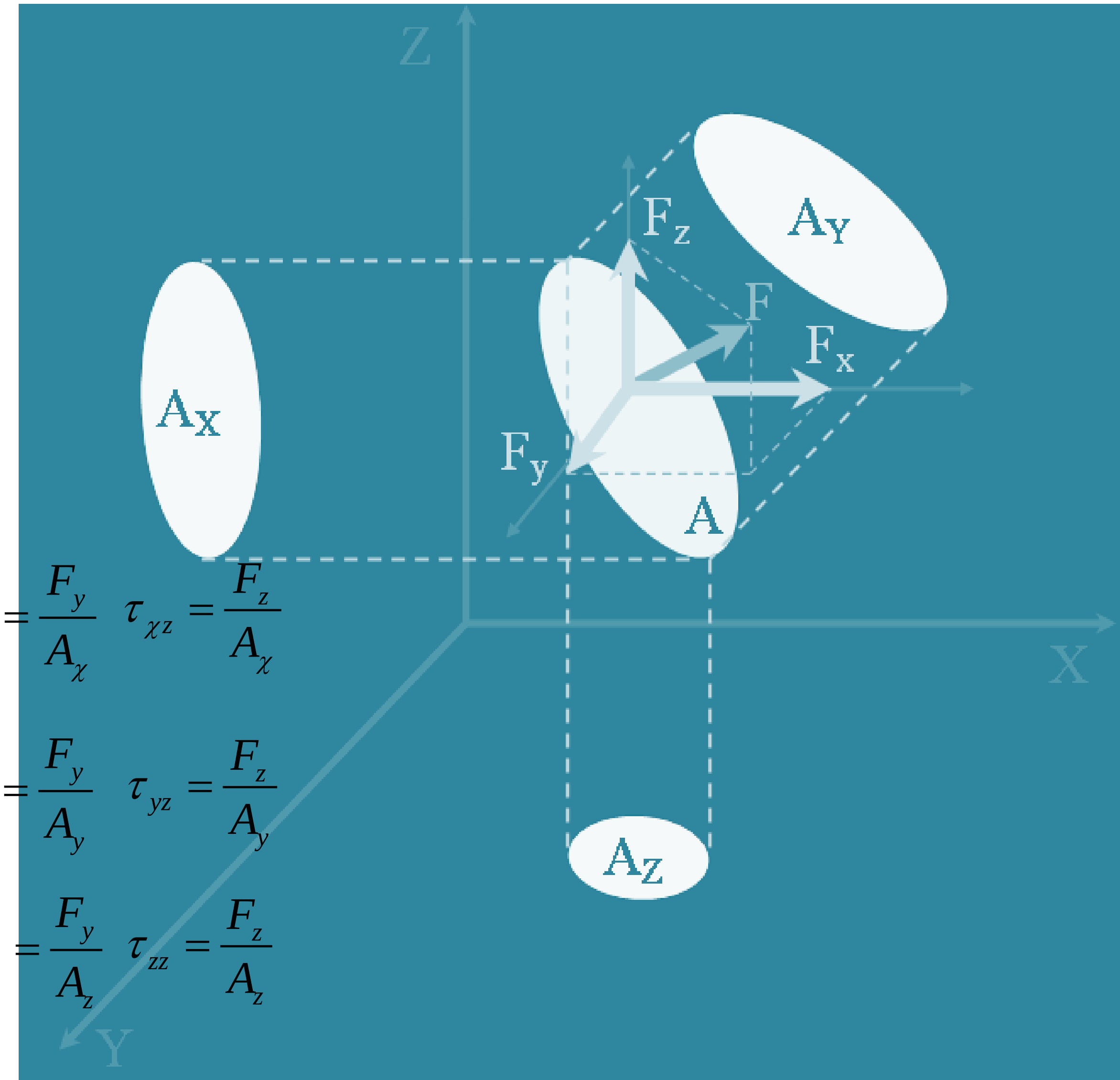
Τανυστής τάσεων του Cauchy, ένας τανυστής 2ης τάξης. Οι συνιστώσες του, σε ένα τρισδιάστατο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, σχηματίζουν τον πίνακα του οποίου οι στήλες είναι οι τάσεις (δύναμη ανά μονάδα όγκου) που δρουν στις πλευρές του κύβου οι οποίες είναι κάθετες στα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα **e**1, **e**2 και **e**3

Ο Καρτεσιανός τανυστής 2ης τάξης

- Ένας τανυστής 2ης τάξης αποτελεί μια γραμμική απεικόνιση από τον R^2 στον R^2. Δηλαδή δρα ως μια διανυσματική συνάρτηση μιας διανυσματικής μεταβλητής.
- Αυτό σημαίνει ότι για κάθε διάνυσμα που δίνεται ως ανεξάρτητη μεταβλητή (όρισμα) η συνάρτηση μας επιστρέφει ένα άλλο διάνυσμα ως εικόνα.
- Ένας τανυστής 2ης τάξης έχει 9 συνιστώσες που δίνονται υπό τη μορφή ενός μητρώου 3 Χ 3 που αλλάζει με την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων.

Τανυστής τάσεων σε καρτεσιανές συντεταγμένες (stress tensor)

Τυχαία δύναμη F ασκούμενη σε τυχαία επιφάνεια εμβαδού Α η οποία προβαλλόμενη στα τρία επίπεδα του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων XYZ δημιουργεί τις τρεις συνιστώσες επιφάνειες A_χ, A_Y, A_z



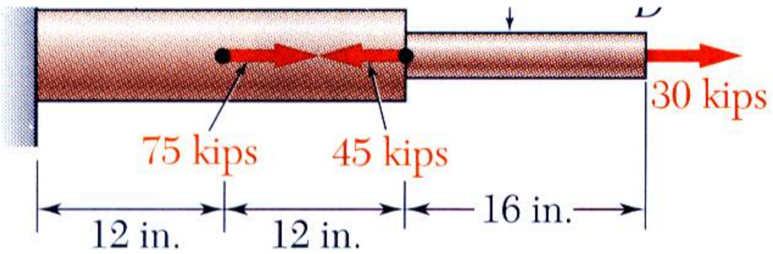
$$\tau = \frac{F}{A}$$

$$\tau_\chi = \frac{F_\chi}{A} \qquad \tau_{\chi\chi} = \frac{F_\chi}{A_\chi} \quad \tau_{\chi y} = \frac{F_y}{A_\chi} \quad \tau_{\chi z} = \frac{F_z}{A_\chi}$$

$$\tau_y = \frac{F_y}{A} \qquad \tau_{y\chi} = \frac{F_\chi}{A_y} \quad \tau_{yy} = \frac{F_y}{A_y} \quad \tau_{yz} = \frac{F_z}{A_y}$$

$$\tau_z = \frac{F_z}{A} \qquad \tau_{z\chi} = \frac{F_\chi}{A_z} \quad \tau_{zy} = \frac{F_y}{A_z} \quad \tau_{zz} = \frac{F_z}{A_z}$$

Παράδειγμα 1



$$E = 29\times10^{-6}\text{psi}$$

$$D = 1.07\text{ in.}\quad d = 0.618\text{ in.}$$

Προσδιορισμός της παραμόρφωσης της χαλύβδινης ράβδου υπό τις δεδομένες φορτίσεις.

ΛΥΣΗ:

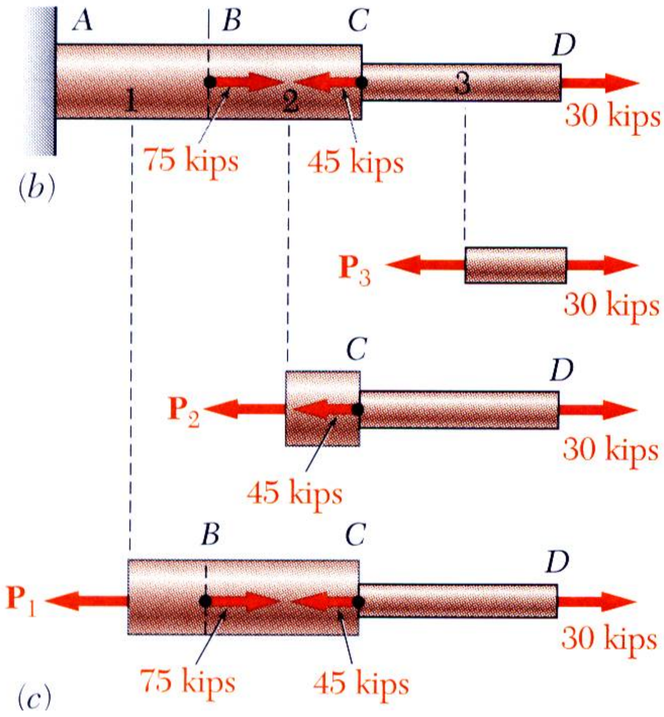
- Διαίρεση της ράβδου σε τμήματα με βάση τα σημεία εφαρμογής των φορτίων.

- Ανάλυση των διαγραμμάτων ελευθέρου σώματος κάθε τμήματος για τον προσδιορισμό των εσωτερικών δυνάμεων

- Υπολογισμός των συνολικών μετατοπίσεων των τμημάτων.

ΛΥΣΗ:

- Διαίρεση της ράβδου σε τρία τμήματα:



$L_1 = L_2 = 12\,\text{in.}$ $L_3 = 16\,\text{in.}$

$A_1 = A_2 = 0.9\,\text{in}^2$ $A_3 = 0.3\,\text{in}^2$

- Ανάλυση ελευθέρου σώματος σε κάθε τμήμα για τον προσδιορισμό των εσωτερικών δυνάμεων,

$$P_1 = 60\times 10^3\,\text{lb}$$

$$P_2 = -15\times 10^3\,\text{lb}$$

$$P_3 = 30\times 10^3\,\text{lb}$$

- **Υπολογισμός της ολικής παραμόρφωσης,**

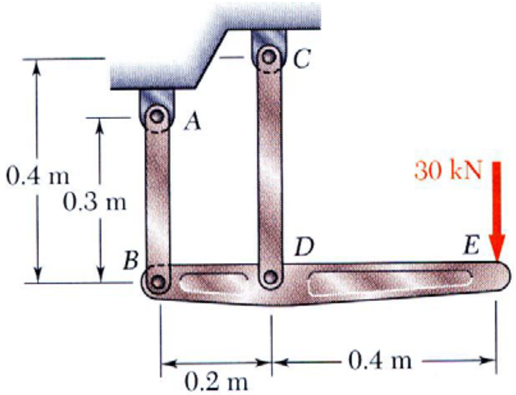
$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E}\left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3}\right)$$

$$= \frac{1}{29\times 10^6}\left[\frac{\left(60\times 10^3\right)12}{0.9} + \frac{\left(-15\times 10^3\right)12}{0.9} + \frac{\left(30\times 10^3\right)16}{0.3}\right]$$

$$= 75.9\times 10^{-3}\,\text{in.}$$

$$\boxed{\delta = 75.9\times 10^{-3}\,\text{in.}}$$

Παράδειγμα 2



Η άκαμπτη ράβδος *BDE* στηρίζεται από δύο συνδέσμους *AB* και *CD*.

Ο σύνδεσμος *AB* είναι από αλουμίνιο (*E* = 70 GPa) και έχει διατομή 500 mm². Ο σύνδεσμος *CD* είναι από χάλυβα (*E* = 200 GPa) και έχει διατομή 600 mm².

Να προσδιορίσετε τη μετατόπιση (deflection) υπό την επίδραση της δύναμης των 30-kN : α) στο *B*, β) στο *D*, και γ) στο *E*.

ΛΥΣΗ:

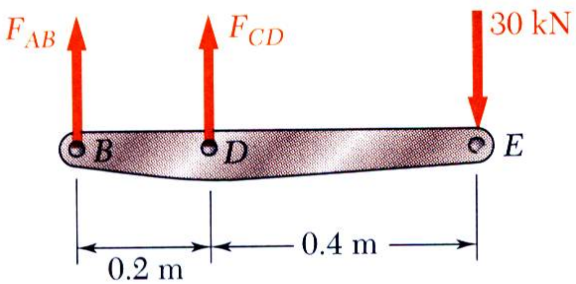
- Ανάλυση μέσω διαγράμματος ελευθέρου σώματος στη ράβδο *BDE* για την εύρεση των δυνάμεων στα μέλη *AB* και *DC*.

- Υπολογισμός της παραμόρφωσης των μελών *AB* και *DC* ή των μετατοπίσεων στα *B* και *D*.

- Χρήση της γεωμετρίας για την εύρεση της μετατόπισης στο Ε, γνωρίζοντας τις μετατοπίσεις στα B και D.

ΛΥΣΗ:

FBD: Ράβδος *BDE*



$$\sum M_B = 0$$

$$0 = -(30\,\text{kN} \times 0.6\,\text{m}) + F_{CD} \times 0.2\,\text{m}$$

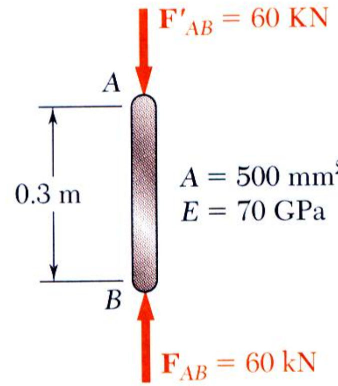
$$F_{CD} = +90\,\text{kN} \quad \varepsilon\varphi\varepsilon\lambda\kappa\upsilon\sigma\mu\acute{o}\varsigma$$

$$\sum \mathrm{M_D} = 0$$

$$0 = -(30\,\text{kN} \times 0.4\,\text{m}) - F_{AB} \times 0.2\,\text{m}$$

$$F_{AB} = -60\,\text{kN} \quad \theta\lambda\acute{\iota}\psi\eta$$

Μετατόπιση του *B*:



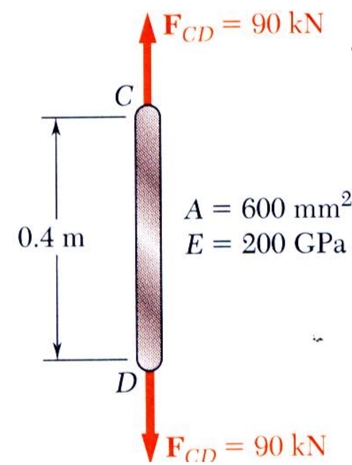
$$\delta_B = \frac{PL}{AE}$$

$$= \frac{(-60 \times 10^3\,\text{N})(0.3\,\text{m})}{(500 \times 10^{-6}\,\text{m}^2)(70 \times 10^9\,\text{Pa})}$$

$$= -514 \times 10^{-6}\,\text{m}$$

$$\boxed{\delta_B = 0.514\,\text{mm} \uparrow}$$

Μετατόπιση του *D*:

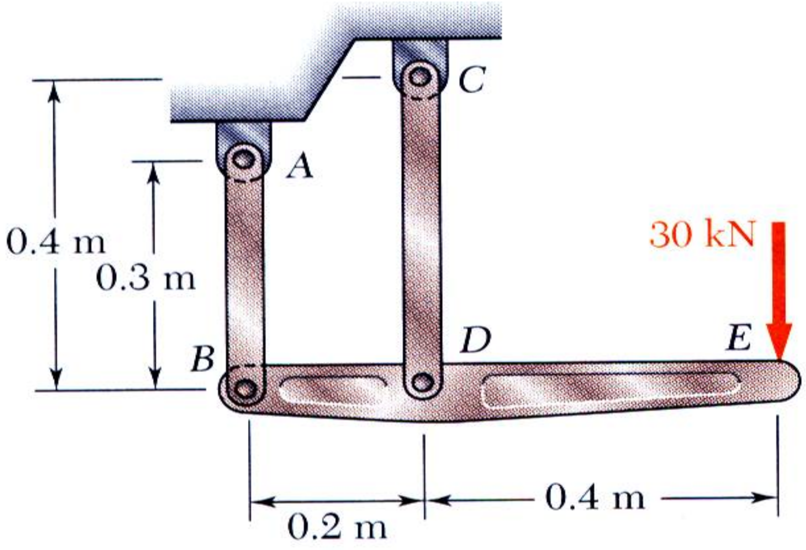


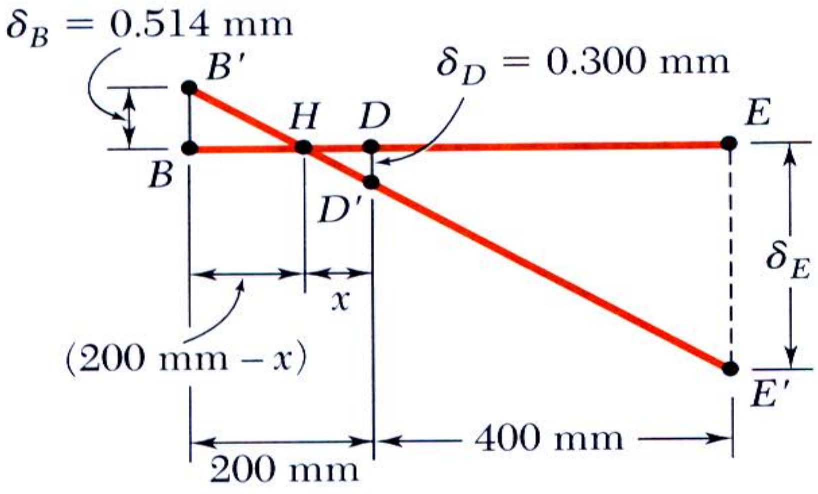
$$\delta_D = \frac{PL}{AE}$$

$$= \frac{(90 \times 10^3\,\text{N})(0.4\,\text{m})}{(600 \times 10^{-6}\,\text{m}^2)(200 \times 10^9\,\text{Pa})}$$

$$= 300 \times 10^{-6}\,\text{m}$$

$$\boxed{\delta_D = 0.300\,\text{mm} \downarrow}$$





Μετατόπιση του E:

$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD}$$

$$\frac{0.514\,\text{mm}}{0.300\,\text{mm}} = \frac{(200\,\text{mm}) - x}{x}$$

$$x = 73.7\,\text{mm}$$

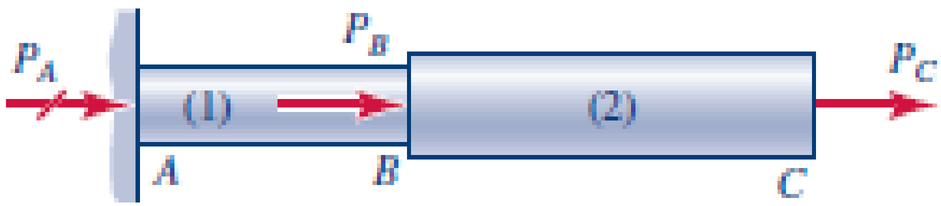
$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD}$$

$$\frac{\delta_E}{0.300\,\text{mm}} = \frac{(400 + 73.7)\text{mm}}{73.7\,\text{mm}}$$

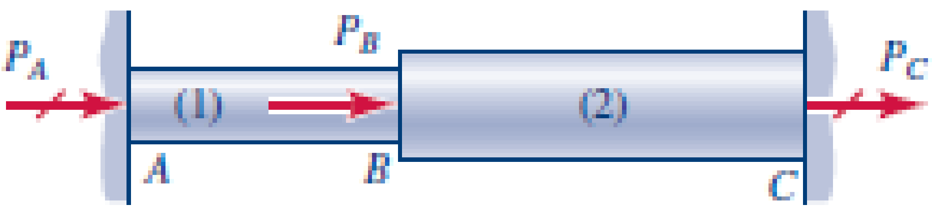
$$\delta_E = 1.928\,\text{mm}$$

$$\boxed{\delta_E = 1.928\,\text{mm} \downarrow}$$

Υπερστατικοί Φορείς



(a) A statically determinate structure.

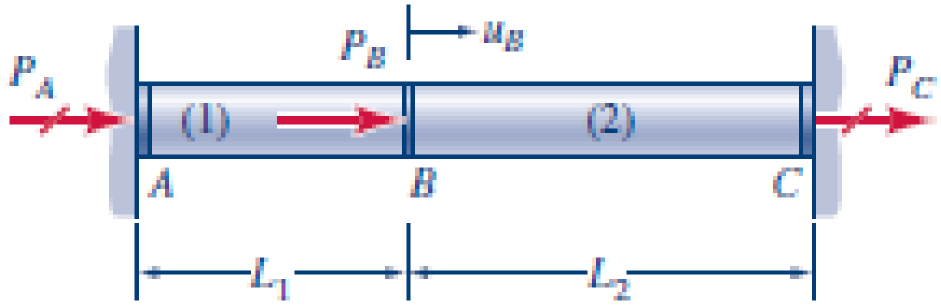


(b) A statically indeterminate structure.

Η επίλυση (ανάλυση) των υπερστατικών φορέων απαιτεί τη χρήση και των τριών τύπων των θεμελιωδών εξισώσεων:

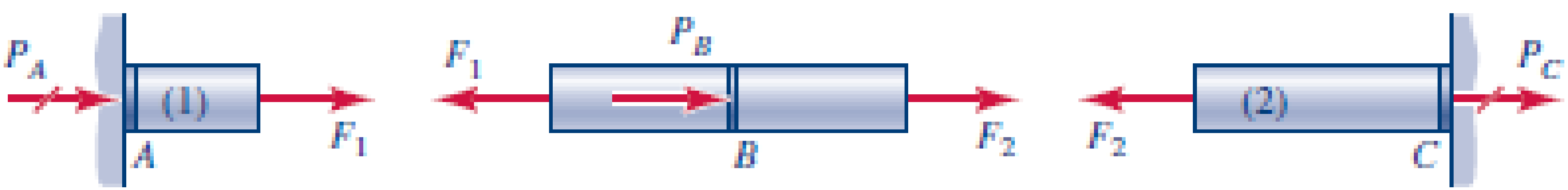
1. **Συνθήκες ισορροπίας**
2. **Συμπεριφορά του υπό εξέταση στοιχείου ως προς τις τάσεις – παραμορφώσεις**
3. **Γεωμετρικές σχέσεις που αφορούν τις παραμορφώσεις**

Ανάλυση μιας τυπικά υπερστατικής δομής

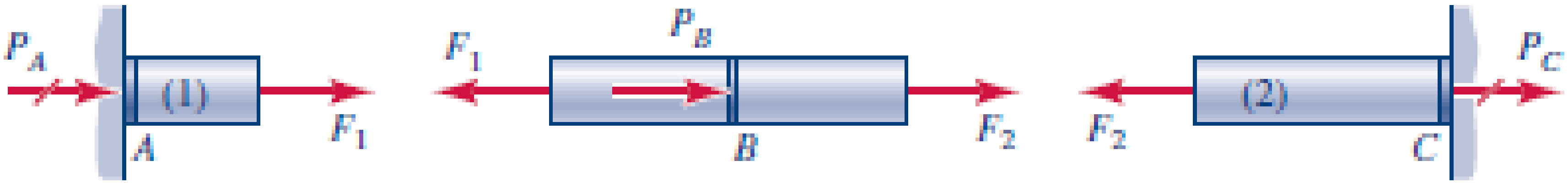


$A_1 = A_2 = A,\ E_1 = E_2 = E,\ L_1 = L,\ L_2 = 2L$

(α) μια δομή δύο στοιχείων με σταθερά άκρα



(β) διαγράμματα ελευθέρου σώματος των κόμβων A, B και C



Ισορροπία : $\xrightarrow{+} \sum F = 0$:

$$\boxed{F_1 - F_2 = P_B}$$

$$P_A = -F_1, \quad P_C = F_2$$

Αυτές οι συνθήκες ισορροπίας δεν εξασφαλίζουν τον προσδιορισμό των τριών άγνωστων αντιδράσεων στήριξης.
Το γεγονός ότι η ράβδος AC εφαρμόζει στα άκαμπτα τοιχώματα στα σημεία A και C εμποδίζει την μεταβολή του μήκους της , οδηγώντας στη συνθήκη ότι η συνολική παραμόρφωση (strain) είναι μηδενική. (περιορισμοί που πηγάζουν από την παραμόρφωση της δομής του στοιχείου και εμπλέκουν άμεσα και τη γεωμετρία του φορέα).

$$\varepsilon_1 = \frac{F_1 L}{AE} \quad , \varepsilon_2 = \frac{2F_1 L}{AE}, \varepsilon_{AC} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$$

$$F_1 = \frac{2P_B}{3}, F_2 = -\frac{P_B}{3}, u_B = \frac{2P_B L}{3AE}$$

Μεθοδολογία επίλυσης υπερστατικών φορέων

1. Δημιουργία των εξισώσεων ισορροπίας μέσω χρήσης των διαγραμμάτων ελευθέρου σώματος.
2. Δημιουργία μιας εξίσωσης που εμπλέκει δύναμη και παραμόρφωση για ΚΆΘΕ αξονική μετατόπιση $\delta_i = \frac{F_i L_i}{A_i E_i}$
3. Χρήση της γεωμετρίας της παραμόρφωσης για τη δημιουργία των κατάλληλων εξισώσεων – σχέσεων χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα δ_i
4. Αντικατάσταση των εξισώσεων από το βήμα (2) στις εξισώσεις του βήματος (3).
5. Προσδιορισμός των άγνωστων δυνάμεων επιλύοντας ταυτόχρονα τις εξισώσεις από τα βήματα (1) και (4).