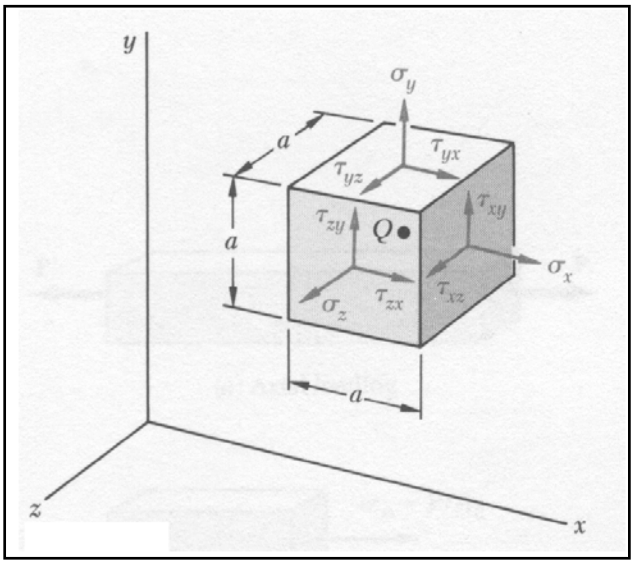
ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΥΛΙΚΩΝ

II. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΑΣΕΩΝ – ΚΥΡΙΕΣ ΤΑΣΕΙΣ

1. Τάσεις γύρω από ένα Σημείο

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, συχνά είναι πιο εύχρηστο να αναλύονται οι τάσεις γύρω από ένα σημείο σε *ορθές* και *διατμητικές συνιστώσες*. Στη γενική περίπτωση οι διατμητικές συνιστώσες σχηματίζουν τυχαίες γωνίες με τους άξονες συντεταγμένων, οπότε είναι πιο βολικό κάθε διατμητική τάση να αναλύεται περαιτέρω σε δύο διατμητικές συνιστώσες, οι διευθύνσεις των οποίων να συμπίπτουν με τους άξονες συντεταγμένων. Έτσι, η γενική περίπτωση τασικού πεδίου γύρω από ένα τυχαίο σημείο Q κάποιου στερεού υλικού φαίνεται στο **Σχ. 1**.

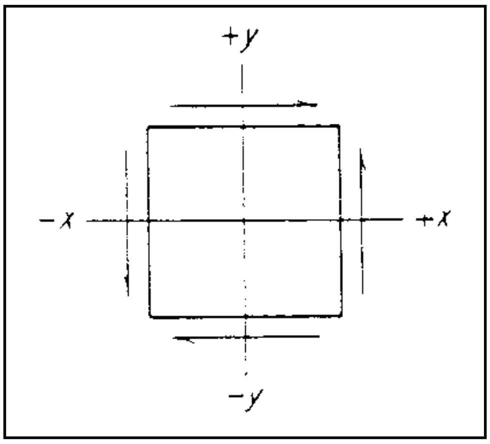


Σχ. 1

Για να μπορέσουμε να περιγράψουμε καλύτερα τις τάσεις στο σημείο αυτό, θεωρούμε ένα στοιχειώδες ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με μήκος ακμών Δx, Δy και Δz, το οποίο περικλείει το υπό εξέταση σημείο Q. Στο **Σχ. 1** έχουμε θεωρήσει έναν στοιχειώδη κύβο, όπου Δx=Δy=Δz=α, για απλούστευση. Οι τάσεις που επιδρούν κάθετα στις έδρες του στοιχειώδους παραλληλεπιπέδου (δηλαδή οι *ορθές τάσεις*) περιγράφονται με έναν μόνο δείκτη, ο οποίος αντιστοιχεί στη διεύθυνση της τάσης. Έτσι, σ_x είναι η ορθή τάση που επενεργεί προς την διεύθυνση του άξονα x, σ_y η ορθή τάση που επενεργεί προς την διεύθυνση του άξονα y και σ_z η ορθή τάση που επενεργεί προς την διεύθυνση του άξονα z. Όσον αφορά τις ορθές τάσεις, έχει συμφωνηθεί παγκοσμίως *οι εφελκυστικές ορθές τάσεις να θεωρούνται θετικές* (+) και *οι θλιπτικές ορθές τάσεις να θεωρούνται αρνητικές* (-). Σύμφωνα με αυτή τη σύμβαση, όλες οι ορθές τάσεις του **Σχ. 1** είναι θετικές.

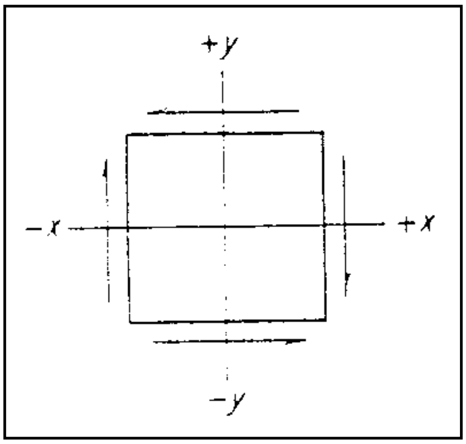
Για την περιγραφή των διατμητικών τάσεων απαιτούνται δύο δείκτες. Ο πρώτος δείκτης αναφέρεται στην κάθετη προς το επίπεδο επάνω στο οποίο επενεργεί η διατμητική τάση διεύθυνση. Ο δεύτερος δείκτης αναφέρεται στην διεύθυνση της διατμητικής τάσης. Για παράδειγμα, τ_{yz} είναι η διατμητική τάση που επενεργεί επάνω σε επίπεδο κάθετο προς τον άξονα y και η διεύθυνσή της είναι παράλληλη προς τον άξονα z. Ομοίως, τ_{yx} είναι η διατμητική τάση που επενεργεί επάνω σε επίπεδο κάθετο προς τον άξονα y και η διεύθυνσή της είναι παράλληλη προς τον άξονα x, κ.ο.κ. (βλ. **Σχ. 1**).

Μία διατμητική τάση θεωρείται θετική εάν η φορά της είναι προς την θετική διεύθυνση του αντίστοιχου άξονα και ταυτόχρονα επενεργεί επάνω στην ‘‘θετική’’ έδρα ενός στοιχειώδους παραλληλεπιπέδου. Επίσης, είναι θετική εάν η φορά της είναι προς την αρνητική διεύθυνση του αντίστοιχου άξονα και ταυτόχρονα επενεργεί επάνω στην ‘‘αρνητική’’ έδρα ενός στοιχειώδους παραλληλεπιπέδου. Σύμφωνα με αυτό, οι διατμητικές τάσεις του **Σχ. 2** είναι όλες θετικές.



Σχ. 2

Αντίθετα, αρνητική θεωρείται μία διατμητική τάση όταν επενεργεί στη ‘‘θετική’’ έδρα ενός στοιχειώδους κύβου και έχει φορά προς την αρνητική διεύθυνση του άξονα συντεταγμένων, ή όταν επενεργεί στην ‘‘αρνητική’’ έδρα ενός στοιχειώδους κύβου και έχει φορά προς την θετική διεύθυνση του άξονα συντεταγμένων. Για παράδειγμα, οι διατμητικές τάσεις του **Σχ. 3** είναι όλες αρνητικές.



Σχ. 3

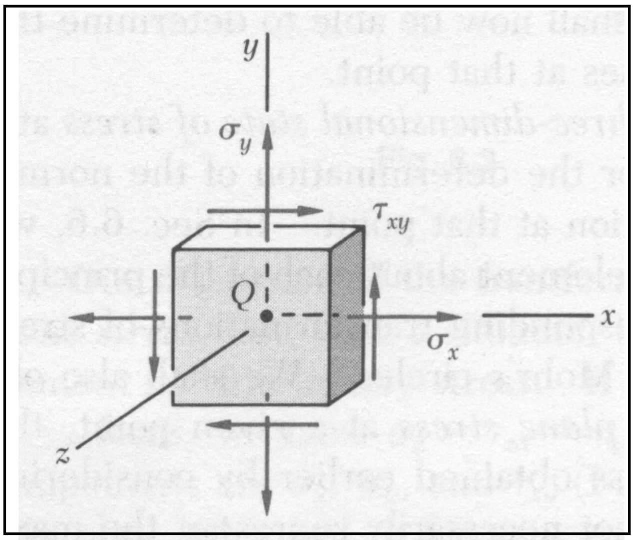
Επιστρέφοντας στο τασικό πεδίο γύρω από το τυχαίο σημείο Q του **Σχ. 1**, παρατηρούμε ότι για να περιγραφεί πλήρως η εντατική κατάσταση γύρω από το σημείο απαιτούνται εννέα ποσότητες, δηλαδή οι *εννέα συνιστώσες της τάσης*. Αυτές είναι οι σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zx} και τ_{zy}. Ωστόσο, πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι το στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο γύρω από το σημείο Q, εφόσον βρίσκεται σε στατική ισορροπία, δεν μπορεί να περιστρέφεται. Επομένως, γράφοντας την εξίσωση *ισορροπίας ροπών* ως προς τον άξονα z γύρω από το σημείο Q έχουμε:

$$\Sigma M_{z,(Q)} = 0 \Rightarrow 2\cdot(\tau_{xy}\cdot\Delta_y\cdot\Delta_z)\cdot(\Delta_x/2) - 2\cdot(\tau_{yx}\cdot\Delta_x\cdot\Delta_z)\cdot(\Delta_y/2) = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Με τον ίδιο τρόπο, λύνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας ροπών ως προς τους άξονες x και y γύρω από το σημείο Q ($\Sigma M_{x,(Q)} = 0$ και $\Sigma M_{y,(Q)} = 0$), προκύπτει αντίστοιχα ότι $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ και $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. Κατά συνέπεια, τα πράγματα απλουστεύονται και *για την πλήρη περιγραφή της εντατικής κατάστασης γύρω από τυχαίο σημείο ενός υλικού αρκούν μόνο έξι συνιστώσες τάσης*, τρεις ορθές και τρεις διατμητικές: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz} και τ_{yz}.

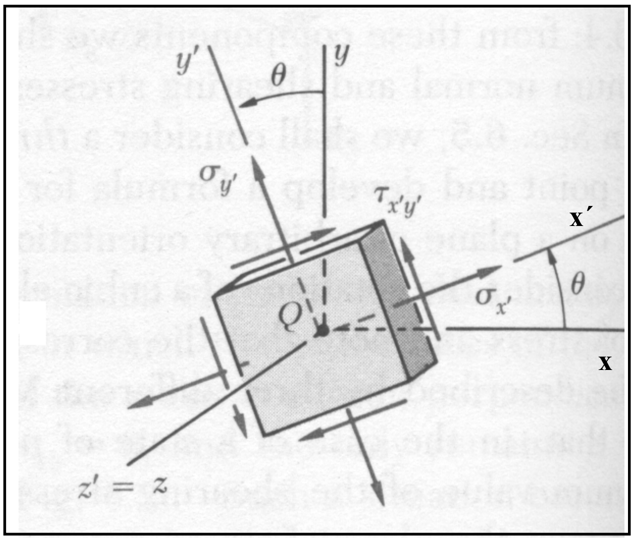
2. Μετασχηματισμοί Τάσης στην Επίπεδη Εντατική Κατάσταση

Πολλά προβλήματα μηχανικής μπορούν να απλοποιηθούν σημαντικά θεωρώντας *δισδιάστατη εντατική κατάσταση*. Η περίπτωση αυτή συναντάται συχνά στην πράξη όταν η μία διάσταση ενός σώματος είναι αρκετά μικρότερη σε σύγκριση με τις υπόλοιπες δύο διαστάσεις του. Ας πάρουμε για παράδειγμα μία λεπτή πλάκα, της οποίας το μήκος και το πλάτος είναι πολύ μεγαλύτερα από το πάχος της. Όταν επιβάλλεται εξωτερική φόρτιση παράλληλα προς το επίπεδο μιας τέτοιας πλάκας, τότε δεν αναπτύσσονται τάσεις κατά τη διεύθυνση του πάχους. Στην περίπτωση αυτή το τασικό πεδίο αποτελείται από δύο ορθές τάσεις, σ_x και σ_y, και από μία διατμητική τάση τ_{xy}, όπως δείχνει το **Σχ. 4**. Οι υπόλοιπες τάσεις είναι ίσες με μηδέν ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$). Μία εντατική κατάσταση αυτού του είδους ονομάζεται *επίπεδη εντατική κατάσταση* (plane stress).



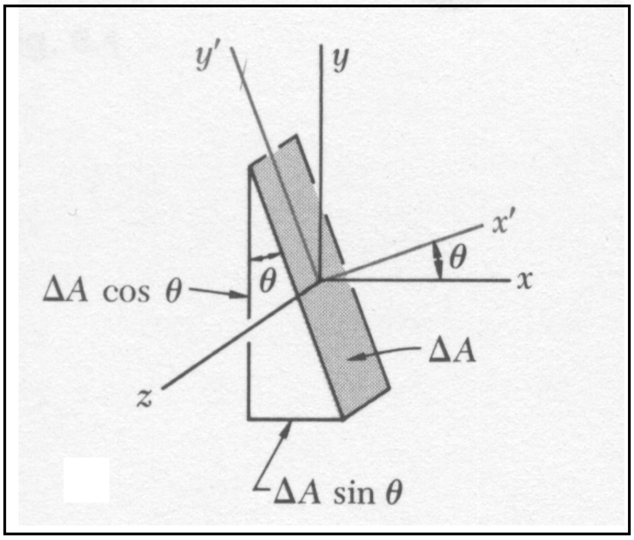
<u>Σχ. 4</u>

Ας θεωρήσουμε τώρα το σημείο Q του **Σχ. 4** γύρω από το οποίο επικρατεί επίπεδη εντατική κατάσταση, η οποία περιγράφεται από τις τάσεις σ_x, σ_y, και τ_{xy}. Σκοπός μας είναι να καθορίσουμε τις τάσεις $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ και $\tau_{x'y'}$ που σχετίζονται με ένα νέο σύστημα συντεταγμένων (x',y',z'), το οποίο είναι περιστρεμμένο γύρω από τον άξονα z κατά μία γωνία θ ως προς το αρχικό σύστημα συντεταγμένων (x,y,z), όπως δείχνει το **Σχ. 5**. (Ισοδύναμα θα μπορούσε να πει κανείς ότι έχει περιστραφεί το στοιχειώδες ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα z.)



<u>Σχ. 5</u>

Για να υπολογιστούν οι ορθές τάσεις $\sigma_{x'}$ και $\sigma_{y'}$ και η διατμητική τάση $\tau_{x'y'}$ θεωρούμε ένα στοιχειώδες πρισματικό στοιχείο, του οποίου οι έδρες είναι κάθετες προς τους άξονες x, y και x΄, όπως δείχνει το **Σχ. 6**. Εάν θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια της κεκλιμένης έδρας είναι ΔΑ, τότε οι επιφάνειες της κατακόρυφης και της οριζόντιας έδρας είναι ΔΑ·cosθ και ΔΑ·sinθ, αντίστοιχα.

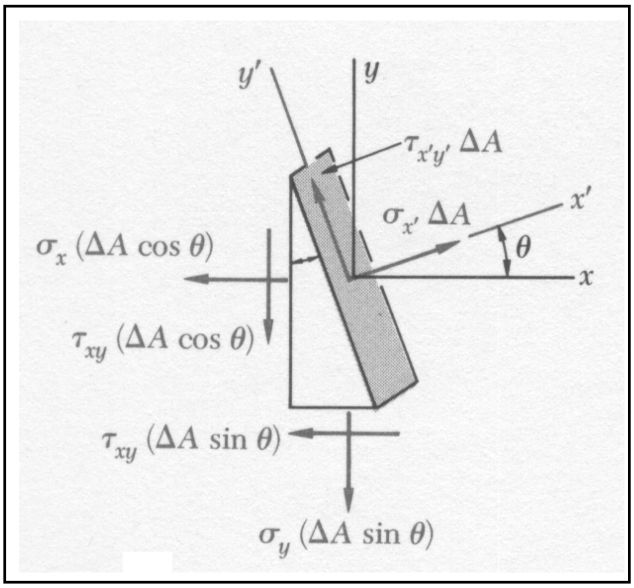


<u>Σχ. 6</u>

Οι *δυνάμεις* που επενεργούν στις τρεις έδρες του πρίσματος φαίνονται στο **Σχ. 7**. Οι εξισώσεις στατικής ισορροπίας των δυνάμεων ως προς τους άξονες x΄ και y΄ είναι:

$\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow \sigma_{x'} \Delta A - \sigma_x \cdot (\Delta A \cdot \cos\theta) \cdot \cos\theta - \tau_{xy} \cdot (\Delta A \cdot \cos\theta) \cdot \sin\theta - \sigma_y \cdot (\Delta A \cdot \sin\theta) \cdot \sin\theta - \tau_{xy} \cdot (\Delta A \cdot \sin\theta) \cdot \cos\theta = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma_{x'} = \sigma_x \cdot \cos^2\theta + \sigma_y \cdot \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}$ (1)

$\Sigma F_{y'} = 0 \Rightarrow \tau_{x'y'} \Delta A + \sigma_x \cdot (\Delta A \cdot \cos\theta) \cdot \sin\theta - \tau_{xy} \cdot (\Delta A \cdot \cos\theta) \cdot \cos\theta - \sigma_y \cdot (\Delta A \cdot \sin\theta) \cdot \cos\theta + \tau_{xy} \cdot (\Delta A \cdot \sin\theta) \cdot \sin\theta = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta + \tau_{xy} \cdot (\cos^2\theta - \sin^2\theta)}$ (2)



<u>Σχ. 7</u>

Από την τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$ και $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, όπως επίσης και ότι $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ και $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$. Αντικαθιστώντας τις τριγωνομετρικές αυτές σχέσεις στις Εξ.(1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (3)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (4)$$

Τέλος, για να υπολογίσουμε την τάση $\sigma_{y'}$ αρκεί να αντικαταστήσουμε την γωνία θ με την θ+(π/2) στην Εξ.(1), αφού οι άξονες y΄ και x΄ σχηματίζουν γωνία π/2 μεταξύ τους:

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (5)$$

Οι εξισώσεις (3), (4) και (5) αποτελούν τις *εξισώσεις μετασχηματισμού των τάσεων* για επίπεδη εντατική κατάσταση. Η χρησιμότητά τους έγκειται στο ότι εάν γνωρίζουμε τις τάσεις σ_x, σ_y και τ_{xy} γύρω από ένα σημείο του υλικού ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων (x,y,z), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις τάσεις $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ και $\tau_{x'y'}$ ως προς *οποιοδήποτε* άλλο σύστημα συντεταγμένων (x΄,y΄,z΄) περιστρεμμένο κατά γωνία θ ως προς το αρχικό. Επίσης, είναι σημαντικό να παρατηρήσει κανείς ότι $\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$. Αυτό σημαίνει ότι *το άθροισμα των ορθών τάσεων σε δύο κάθετα μεταξύ τους επίπεδα είναι αμετάβλητη ποσότητα* και δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό ή τη γωνία θ του συστήματος συντεταγμένων.

Οι εξισώσεις (3), (4) και (5) περιγράφουν τις ορθές και διατμητικές τάσεις σε οποιοδήποτε επίπεδο που διέρχεται από ένα σημείο κάποιου στερεού σώματος που υφίσταται επίπεδη εντατική κατάσταση. Το διάγραμμα του **Σχ. 8** δείχνει τη μεταβολή της ορθής και της διατμητικής τάσης σαν συνάρτηση της γωνίας προσανατολισμού θ για την επίπεδη εντατική κατάσταση που φαίνεται στην κορυφή του σχήματος. Από το διάγραμμα αυτό μπορούν να γίνουν οι εξής παρατηρήσεις:

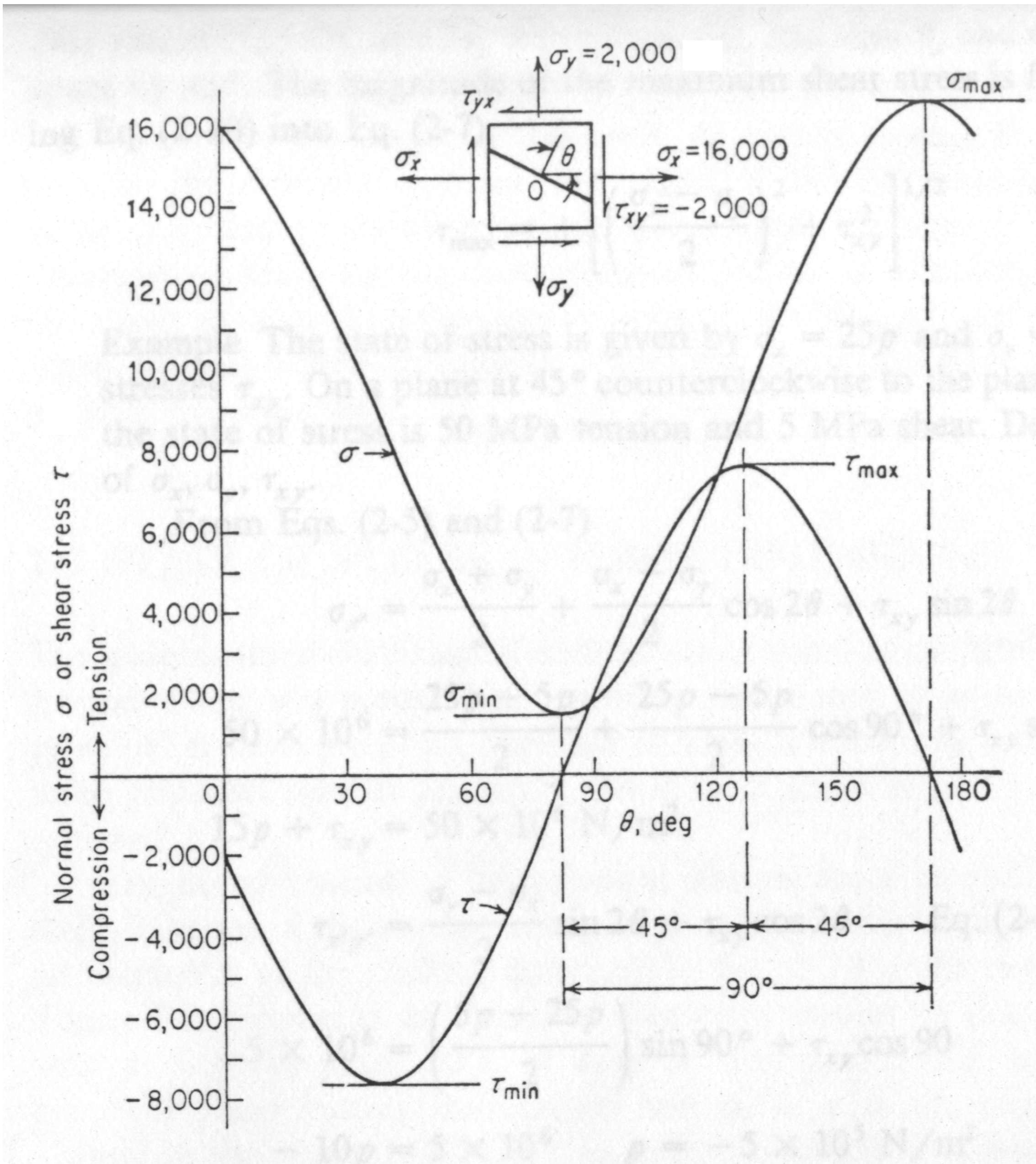
α) Οι ορθές τάσεις ($\sigma_{x'}$ και $\sigma_{y'}$) λαμβάνουν την μέγιστη (σ_{max}) και την ελάχιστη (σ_{min}) τιμή τους όταν η διατμητική τάση $\tau_{x'y'}$ μηδενίζεται.

β) Οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές τόσο των ορθών όσο και της διατμητικής τάσης εμφανίζονται σε γωνίες που ‘‘απέχουν’’ μεταξύ τους κατά 90^o.

γ) Η μέγιστη διατμητική τάση, τ_{max}, εμφανίζεται στη μισή γωνία ανάμεσα στην μέγιστη ορθή τάση, σ_{max}, και στην ελάχιστη ορθή τάση, σ_{min}.

δ) Η μεταβολή της ορθής και της διατμητικής τάσης είναι ημιτονοειδής, με περίοδο $\theta=180^o$.

Όλες *οι παραπάνω παρατηρήσεις ισχύουν για κάθε εντατική κατάσταση* και όχι μόνο για την επίπεδη εντατική κατάσταση.



Σχ. 8

3. Κύριες Τάσεις - Κύρια Επίπεδα και Διευθύνσεις

Σε οποιαδήποτε εντατική κατάσταση μπορεί πάντοτε να οριστεί ένα νέο σύστημα συντεταγμένων, τέτοιο ώστε οι άξονές του να είναι κάθετοι σε επίπεδα επάνω στα οποία εμφανίζονται μόνο ορθές τάσεις και στα οποία ταυτόχρονα μηδενίζονται οι διατμητικές τάσεις. Τα επίπεδα αυτά ονομάζονται *κύρια επίπεδα* (principal planes). Οι ορθές τάσεις που εμφανίζονται επάνω στα κύρια επίπεδα ονομάζονται *κύριες τάσεις* (principal stresses) και η χρησιμότητά τους είναι πολύ μεγάλη, όπως θα διαπιστωθεί αργότερα και κατά κύριο λόγο στη συζήτηση της θεωρίας πλαστικότητας.

Στην περίπτωση της επίπεδης εντατικής κατάστασης, που αναλύσαμε στην ενότητα 2, υπάρχουν δύο κύριες τάσεις, σ_1 και σ_2, οι οποίες εμφανίζονται σε κύρια επίπεδα που ‘‘απέχουν’’ μεταξύ τους κατά 90^o (είναι δηλαδή κάθετα μεταξύ τους). Ποιες είναι όμως οι τάσεις αυτές; Ας θυμηθούμε ότι, εξ ορισμού, στα κύρια επίπεδα μηδενίζονται οι διατμητικές τάσεις. Εξετάζοντας το **Σχ. 8**, διαπιστώνουμε ότι στις γωνίες όπου μηδενίζεται η διατμητική τάση ($\tau = 0$) εμφανίζονται η μέγιστη και η ελάχιστη ορθή τάση, σ_{max} και σ_{min}, αντίστοιχα. Κατά συνέπεια, στην περίπτωση της επίπεδης εντατικής κατάστασης, οι κύριες τάσεις είναι $\sigma_1 = \sigma_{max}$ και $\sigma_2 = \sigma_{min}$. Άλλωστε, οι σ_{max} και σ_{min} επενεργούν σε επίπεδα που σχηματίζουν γωνία 90^o μεταξύ τους, γεγονός που είδαμε ότι ισχύει επίσης εξ ορισμού για τα κύρια επίπεδα.

Στη γενική περίπτωση μίας **τρισδιάστατης εντατικής κατάστασης** εμφανίζονται **τρεις κύριες τάσεις**, οι σ_1, σ_2 και σ_3. Έχει επικρατήσει παγκοσμίως η σύμβαση με σ_1 να συμβολίζεται η αλγεβρικά μεγαλύτερη κύρια τάση, ενώ με σ_3 η αλγεβρικά μικρότερη κύρια τάση. Οι διευθύνσεις των κυρίων τάσεων ονομάζονται *κύριες διευθύνσεις* (principal directions) 1, 2 και 3. (Ας μην ξεχνάμε ότι οι κύριες διευθύνσεις είναι κάθετες στα κύρια επίπεδα.)

Παρότι στη γενική περίπτωση το σύστημα των κύριων διευθύνσεων 1, 2 και 3 *δεν* συμπίπτει με το χρησιμοποιούμενο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων x, y και z, υπάρχουν πάρα πολλές περιπτώσεις στην πράξη όπου λόγω συμμετρίας της φόρτισης τα δύο συστήματα συντεταγμένων (δηλαδή το σύστημα των κύριων διευθύνσεων 1, 2 και 3 και το χρησιμοποιούμενο σύστημα αξόνων x, y και z) συμπίπτουν. Ο υπολογισμός των κύριων τάσεων και διευθύνσεων είναι πολύ χρήσιμος, επειδή παρέχει έναν εύκολο τρόπο για να περιγραφεί η εντατική κατάσταση γύρω από ένα σημείο σε ένα σώμα.

4. Υπολογισμός Κυρίων Τάσεων και Μέγιστης Διατμητικής Τάσης

Ας γυρίσουμε πάλι στην επίπεδη εντατική κατάσταση. Εφόσον εξ ορισμού σε ένα κύριο επίπεδο δεν εμφανίζονται διατμητικές τάσεις, η γωνία θ_p που σχηματίζει το κύριο επίπεδο με τους άξονες συντεταγμένων x και y μπορεί να υπολογισθεί, βρίσκοντας τιμές της γωνίας $\theta = \theta_p$ στην Εξ.(2) για τις οποίες να ισχύει ότι $\tau_{x'y'} = 0$:

$$\tau_{x'y'} = 0 \;\Rightarrow\; -(\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta_p \cdot \cos\theta_p + \tau_{xy}(\cos^2\theta_p - \sin^2\theta_p) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\sin\theta_p \cdot \cos\theta_p}{\cos^2\theta_p - \sin^2\theta_p} = \frac{1}{2}\tan 2\theta_p \Rightarrow \boxed{\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}} \tag{6}$$

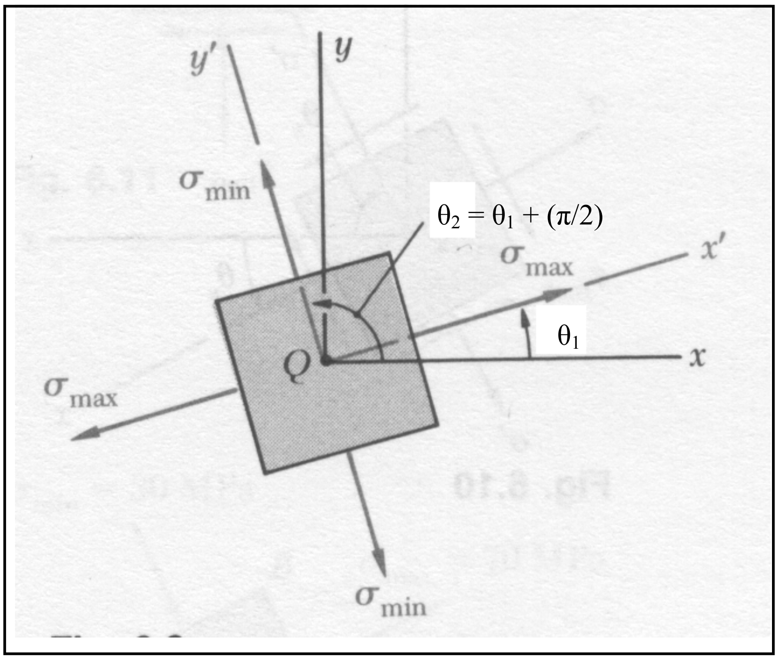
Εφόσον ισχύει ότι tan2θ = tan(π+2θ), η Εξ.(6) έχει δύο ρίζες (λύσεις) για την γωνία των κυρίων επιπέδων θ_p: τις θ_1 και $\theta_2 = \theta_1 + n\cdot(\pi/2)$, όπου n = 1, 2, 3, κ.τ.λ. Επομένως, η Εξ.(6) ορίζει δύο γωνίες, οι τιμές των οποίων διαφέρουν μεταξύ τους κατά 90^o. Αυτές οι δύο γωνίες ορίζουν δύο κάθετα μεταξύ τους επίπεδα, επάνω στα οποία δεν εμφανίζονται διατμητικές τάσεις. Επομένως, *οι γωνίες θ_1 και θ_2 καθορίζουν τα κύρια επίπεδα*, **Σχ. 9**.

Οι κύριες τάσεις μπορούν να υπολογιστούν εύκολα, βάζοντας στην Εξ.(3) τις τιμές των $\cos 2\theta_p$ και $\sin 2\theta_p$ που προκύπτουν από την Εξ.(6). Οι τιμές των $\cos 2\theta_p$ και $\sin 2\theta_p$ προκύπτουν από την Εξ.(6), κάνοντας τους κατάλληλους τριγωνομετρικούς υπολογισμούς:

$$\sin 2\theta_p = \pm \frac{\tau_{xy}}{\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + (\tau_{xy})^2\right]^{1/2}} \tag{7}$$

και

$$\cos 2\theta_p = \pm \frac{\dfrac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}}{\left[\dfrac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + (\tau_{xy})^2\right]^{1/2}} \tag{8}$$



Σχ. 9

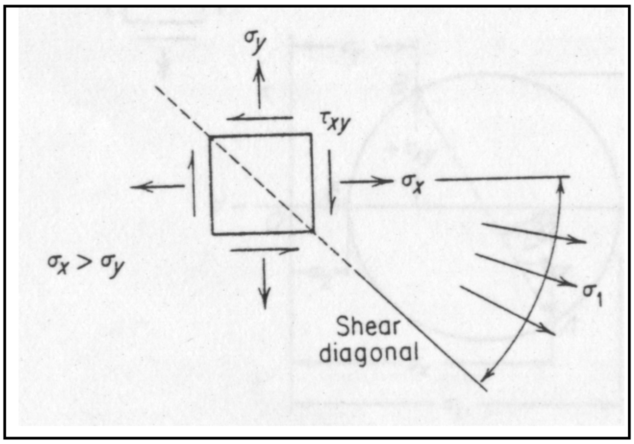
Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην Εξ.(3) καταλήγουμε στις τιμές της *μέγιστης* και της *ελάχιστης κύριας τάσης*, για την περίπτωση της επίπεδης εντατικής κατάστασης:

$$\boxed{\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2\right]^{1/2}} \tag{9}$$

και

$$\boxed{\sigma_{\min} = \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2\right]^{1/2}} \tag{10}$$

Η διεύθυνση των κυρίων επιπέδων υπολογίζεται λύνοντας την Εξ.(6) ως προς την γωνία θ_p, φροντίζοντας όμως να καθορίζουμε κάθε φορά αν η γωνία $2\theta_p$ που βρίσκουμε είναι ανάμεσα στο 0 και π/2, στο π και 3π/2, κ.ο.κ. Το **Σχ. 10** παρουσιάζει έναν απλό τρόπο με τον οποίο μπορούμε να καθορίσουμε την διεύθυνση της μεγαλύτερης κύριας τάσης σ_1.



Σχ. 10

Η διεύθυνση της μέγιστης κύριας τάσης σ_1 θα βρίσκεται κάπου ανάμεσα από την διεύθυνση της αλγεβρικά μεγαλύτερης ορθής τάσης και από την *διαγώνιο διάτμησης* (shear diagonal). Στο παράδειγμα του **Σχ. 10** υποτίθεται ότι η σ_x είναι αλγεβρικά μεγαλύτερη από την σ_y, οπότε η διεύθυνση της μέγιστης κύριας τάσης σ_1 θα βρίσκεται ανάμεσα από την διεύθυνση της σ_x και την διαγώνιο διάτμησης. Για να γίνει αυτό καλύτερα αντιληπτό, ας υποθέσουμε ότι στο παράδειγμα του **Σχ. 10** δεν υπήρχαν διατμητικές τάσεις. Τότε, η μέγιστη κύρια τάση σ_1 θα ήταν η σ_x ($\sigma_1 = \sigma_x$), οπότε η διεύθυνση της σ_1 θα συνέπιπτε με τη διεύθυνση της σ_x. Αν πάλι υποθέσουμε ότι στο παράδειγμα του **Σχ. 10** δεν είχαμε καθόλου ορθές τάσεις (δηλαδή $\sigma_x = \sigma_y = 0$), αλλά μόνο τις διατμητικές $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, τότε η διεύθυνση της κύριας τάσης σ_1 θα συνέπιπτε με την διαγώνιο διάτμησης. Επομένως, όταν έχουμε και ορθές και διατμητικές τάσεις, η διεύθυνση της κύριας τάσης σ_1 βρίσκεται ανάμεσα από τις δύο.

Για να υπολογίσουμε τη *μέγιστη διατμητική τάση* (maximum shear stress) πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την Εξ.(4), παραγωγίζοντας ως προς τη γωνία θ και θέτοντας την παράγωγο ίση με μηδέν:

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta}=0 \;\Rightarrow\; (\sigma_y-\sigma_x)\cos 2\theta_s - 2\tau_{xy}\sin 2\theta_s = 0 \;\Rightarrow\; \tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}} \tag{11}$$

Συγκρίνοντας τη γωνία θ_s με τη γωνία των κυρίων επιπέδων, θ_p, διαπιστώνουμε ότι το επίπεδο που εμφανίζεται η μέγιστη διατμητική τάση απέχει κατά 45^o από τα κύρια επίπεδα, τα επίπεδα δηλαδή όπου εμφανίζονται οι κύριες τάσεις. Η τιμή της μέγιστης διατμητικής τάσης βρίσκεται αντικαθιστώντας την Εξ.(11) στην Εξ.(4):

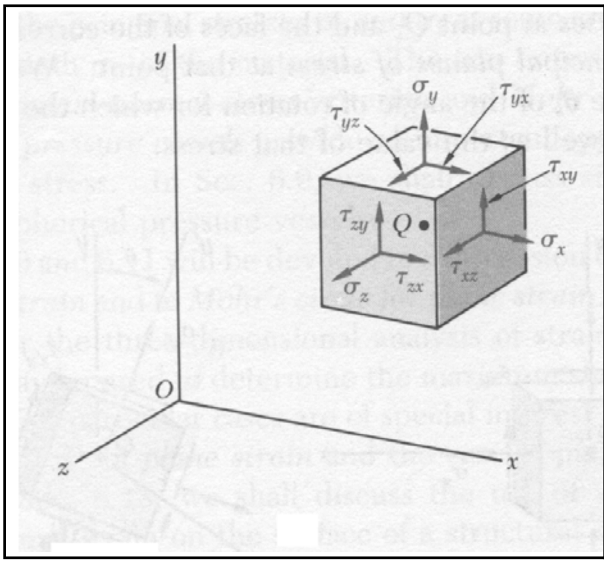
$$\boxed{\tau_{max}=\pm\left[\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+(\tau_{xy})^2\right]^{1/2}} \tag{12}$$

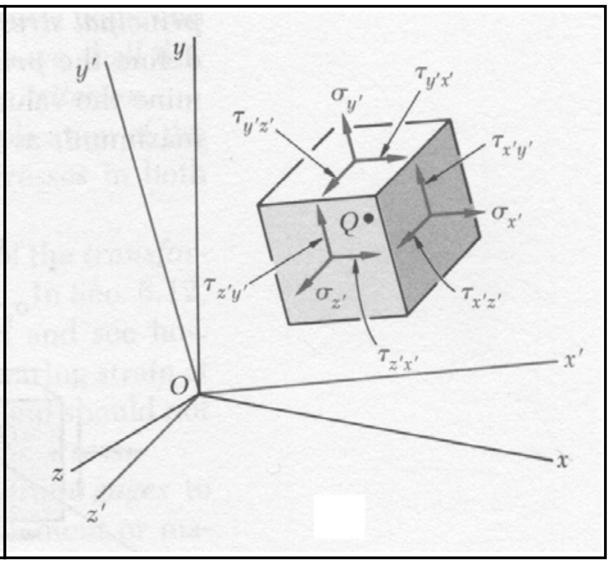
Ο καθορισμός της μέγιστης διατμητικής τάσης, καθώς και του προσανατολισμού των επιπέδων επάνω στα οποία εμφανίζεται, είναι σημαντικός, αφού όπως είναι γνωστό *η πλαστική παραμόρφωση των μεταλλικών υλικών προκαλείται μόνο από διατμητικές τάσεις και όχι από ορθές*. Το γεγονός αυτό οφείλεται στον μηχανισμό με τον οποίο παράγεται η πλαστική παραμόρφωση στα μέταλλα, που είναι η *ολίσθηση γραμμοαταξιών* (dislocation slip). Κατά συνέπεια, τα επίπεδα επάνω στα οποία εμφανίζεται η μέγιστη διατμητική τάση σε έναν κρύσταλλο είναι πολύ πιθανόν να ολισθήσουν πρώτα, όταν μάλιστα η μέγιστη διατμητική τάση, τ_{max}, υπερβεί το όριο ροής σε διάτμηση του κρυστάλλου, τ_y.

5. Γενική (Τρισδιάστατη) Εντατική Κατάσταση

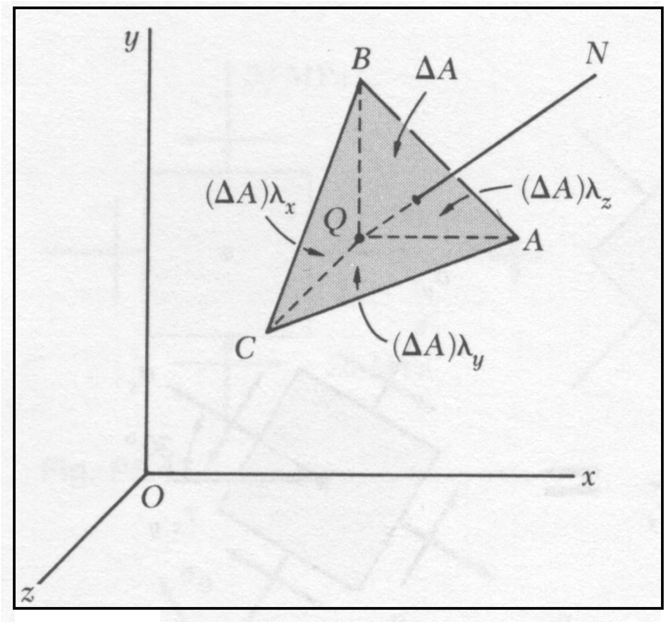
Στη ανάλυση της επίπεδης εντατικής κατάστασης, που εξετάσθηκε στις προηγούμενες ενότητες, ίσχυε ότι $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. Επίσης, εκεί εξετάσαμε τους μετασχηματισμούς των τάσεων ως προς ένα νέο σύστημα συντεταγμένων, περιστρεμμένο σε σχέση με το αρχικό μόνο ως προς τον άξονα z. Τώρα θα γενικεύσουμε την ανάλυση μας και θα εξετάσουμε την περίπτωση μιας γενικής, τρισδιάστατης εντατικής κατάστασης, όπως αυτή που φαίνεται στο **Σχ. 11**. Θα δούμε τους μετασχηματισμούς τάσεων ως προς ένα νέο σύστημα αξόνων, περιστρεμμένο σε σχέση με το αρχικό ως προς όλους τους άξονες, **Σχ. 12**, και θα υπολογίσουμε τις κύριες τάσεις και διευθύνσεις, καθώς και τη μέγιστη διατμητική τάση και τον προσανατολισμό του επιπέδου που αυτή εμφανίζεται.

Ας θεωρήσουμε το τετράεδρο του **Σχ. 13**. Οι τρεις από τις έδρες του τετραέδρου είναι παράλληλες προς τα επίπεδα που ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων x, y και z. Δηλαδή, (QAB)//(xy), (QBC)//(yz) και (QAC)//(xz). Η τέταρτη έδρα, η (ABC), είναι κάθετη στη γραμμή QN. Υποθέτουμε ότι η έδρα (ABC) είναι τέτοια, ώστε επάνω της δεν εμφανίζεται διατμητική τάση, παρά μόνο η ορθή τάση σ. Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση, *η έδρα (ABC) είναι κύριο επίπεδο, η γραμμή QN είναι κύρια διεύθυνση και η τάση σ είναι κύρια τάση.*





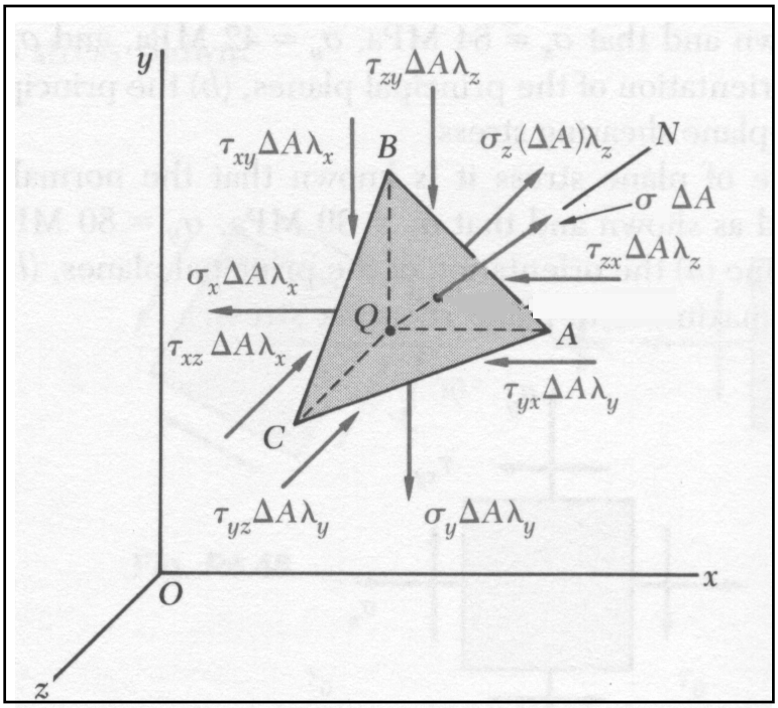
<u>Σχ. 11</u> **<u>Σχ. 12</u>**



Σχ. 13

Στη συνέχεια, ας συμβολίσουμε με ΔΑ την επιφάνεια του κύριου επιπέδου (ABC) και με λ_x, λ_y και λ_z τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει η κύρια διεύθυνση QN με τους άξονες x, y και z, αντίστοιχα. Δηλαδή, είναι $\lambda_x = \cos(\widehat{QN,x})$, $\lambda_y = \cos(\widehat{QN,y})$ και $\lambda_z = \cos(\widehat{QN,z})$. Τότε, οι επιφάνειες των υπολοίπων εδρών του τετραέδρου είναι $\Delta A \cdot \lambda_x$, $\Delta A \cdot \lambda_y$ και $\Delta A \cdot \lambda_z$.

Εάν η εντατική κατάσταση στο σημείο Q περιγράφεται από τις τάσεις σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} και τ_{zx}, τότε οι *δυνάμεις* που ασκούνται σε κάθε μία από τις τρεις παράλληλες προς τους άξονες έδρες του τετραέδρου προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις τάσεις που επενεργούν σε κάθε έδρα επί την αντίστοιχη επιφάνεια της έδρας, όπως δείχνει το **Σχ. 14**. Από την άλλη μεριά, η μόνη δύναμη που ασκείται στην έδρα (ABC) είναι η $\sigma \cdot \Delta A$.



Σχ. 14

Το τετράεδρο πρέπει να βρίσκεται σε στατική ισορροπία κάτω από την επίδραση των δυνάμεων αυτών. Οι εξισώσεις ισορροπίας στο τετράεδρο έχουν ως εξής:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \sigma\cdot\Delta A\cdot\lambda_x - \sigma_x\cdot\Delta A\cdot\lambda_x - \tau_{yx}\cdot\Delta A\cdot\lambda_y - \tau_{zx}\cdot\Delta A\cdot\lambda_z = 0 \Rightarrow$$

$$(\sigma - \sigma_x)\cdot\lambda_x - \tau_{yx}\cdot\lambda_y - \tau_{zx}\cdot\lambda_z = 0 \tag{13}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \sigma\cdot\Delta A\cdot\lambda_y - \sigma_y\cdot\Delta A\cdot\lambda_y - \tau_{xy}\cdot\Delta A\cdot\lambda_x - \tau_{zy}\cdot\Delta A\cdot\lambda_z = 0 \Rightarrow$$

$$-\tau_{xy}\cdot\lambda_x + (\sigma - \sigma_y)\cdot\lambda_y - \tau_{zy}\cdot\lambda_z = 0 \tag{14}$$

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow \sigma\cdot\Delta A\cdot\lambda_z - \sigma_z\cdot\Delta A\cdot\lambda_z - \tau_{xz}\cdot\Delta A\cdot\lambda_x - \tau_{yz}\cdot\Delta A\cdot\lambda_y = 0 \Rightarrow$$

$$-\tau_{xz}\cdot\lambda_x - \tau_{yz}\cdot\lambda_y + (\sigma - \sigma_z)\cdot\lambda_z = 0 \tag{15}$$

Οι Εξ.(13)-(15) είναι τρεις ομογενείς γραμμικές εξισώσεις ως προς τα λ_x, λ_y και λ_z. Η μόνη χρήσιμη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει μηδενίζοντας την ορίζουσα:

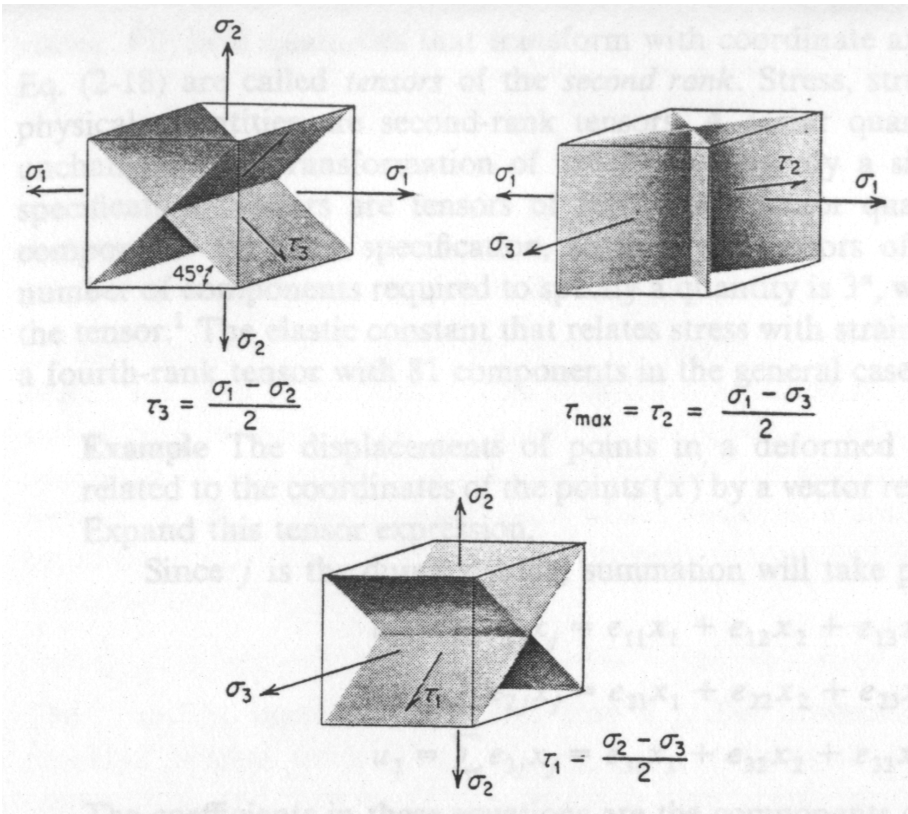
$$\begin{vmatrix} \sigma-\sigma_x & -\tau_{yx} & -\tau_{zx} \\ -\tau_{xy} & \sigma-\sigma_y & -\tau_{zy} \\ -\tau_{xz} & -\tau_{yz} & \sigma-\sigma_z \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

Η ανάπτυξη της ορίζουσας καταλήγει σε μία τριτοβάθμια εξίσωση ως προς την κύρια τάση σ της μορφής:

$$\begin{aligned} &\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\cdot\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2)\cdot\sigma - \\ &-(\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Οι τρεις ρίζες (λύσεις) της Εξ.(17) είναι οι *τρεις κύριες τάσεις, σ_1, σ_2 και σ_3*. Ο υπολογισμός του προσανατολισμού των αντίστοιχων κύριων επιπέδων γίνεται αντικαθιστώντας κάθε μία από τις κύριες τάσεις στις Εξ.(13)-(15). Στη συνέχεια, οι Εξ.(13)-(15) λύνονται ταυτόχρονα ως προς τα λ_x, λ_y και λ_z χρησιμοποιώντας και την βοηθητική σχέση $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$.

Όσον αφορά τα επίπεδα στα οποία αναπτύσσονται οι *μέγιστες διατμητικές τάσεις*, όπως και στην περίπτωση της επίπεδης εντατικής κατάστασης, έτσι και στη γενικευμένη τρισδιάστατη εντατική κατάσταση τα επίπεδα αυτά σχηματίζουν γωνίες 45^o με τα κύρια επίπεδα. Για παράδειγμα, το **Σχ. 15** δείχνει τα επίπεδα όπου εμφανίζονται οι μέγιστες διατμητικές τάσεις σε ένα στοιχειώδη κύβο, του οποίου οι έδρες αντιστοιχούν με τα κύρια επίπεδα. Όπως φαίνεται στο σχήμα, για κάθε ζεύγος κυρίων τάσεων υπάρχουν δύο επίπεδα μέγιστων διατμητικών τάσεων, τα οποία διχοτομούν τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων (δηλαδή τις κύριες διευθύνσεις).



Σχ. 15

Οι τιμές των μέγιστων διατμητικών τάσεων υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$
$$\tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \tag{18}$$
$$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, σύμφωνα με τους ισχύοντες συμβολισμούς η σ_1 είναι η αλγεβρικά μέγιστη κύρια τάση και η σ_3 η αλγεβρικά ελάχιστη κύρια τάση. Έτσι, η μέγιστη διατμητική τάση, τ_{max}, ισούται με την τ_2, αφού πρόκειται για την διαφορά της μέγιστης από την ελάχιστη κύρια τάση. Η μέγιστη διατμητική τάση έχει πολύ μεγάλη σημασία στην θεωρία πλαστικότητας, καθώς και στις κατεργασίες διαμόρφωσης των μετάλλων (έλαση, βαθεία κοίλανση, κ.τ.λ.).