Γεωμετρικές Μέθοδοι Υπολογισμού Μετακινήσεων

Εισαγωγή | Μέθοδος Διπλής Ολοκλήρωσης

Εισαγωγή

- Οι κατασκευές, όταν υπόκεινται σε εξωτερική φόρτιση, αναπτύσσουν εσωτερική ένταση η οποία επιφέρει παραμόρφωση των στοιχείων τους. Παρόλο που οι μετακινήσεις είναι εν γένει μικρές, πρέπει κατά το σχεδιασμό να γίνεται έλεγχος ώστε να μην υπερβαίνουν κάποια προκαθορισμένα όρια (κριτήριο λειτουργικότητας).
- Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθούν τρεις μέθοδοι υπολογισμού των μετακινήσεων σε σημεία κατά μήκος του άξονα μιας δοκού ή πλαισίου. Οι μέθοδοι αυτές βασίζονται στη διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής της δοκού — εξίσωση που συσχετίζει την *καμπυλότητα* σε ένα σημείο του άξονα της δοκού με την *καμπτική ροπή* στο ίδιο σημείο και τις ιδιότητες της διατομής και του υλικού.
- Ο υπολογισμός των μετακινήσεων αποτελεί επίσης θεμελιώδες βήμα σε πολλές αναλυτικές μεθόδους για την ανάλυση των υπερστατικών φορέων, τον υπολογισμό του φορτίου λυγισμού και τον προσδιορισμό των ιδιοπεριόδων ταλαντούμενων στοιχείων.

Μέθοδος Διπλής Ολοκλήρωσης

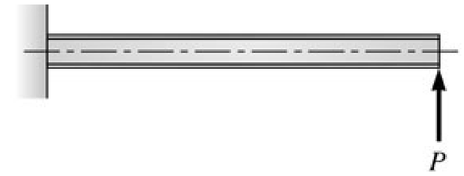
- Η μέθοδος της διπλής ολοκλήρωσης συνίσταται στη διαδοχική ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης (Δ.Ε.) της ελαστικής γραμμής. Με απευθείας ολοκλήρωση της Δ.Ε. προκύπτει η εξίσωση της κλίσης του άξονα της παραμορφωμένης δοκού και με δεύτερη ολοκλήρωση προκύπτει η εξίσωση της βύθισής του (ελαστική γραμμή).

> *Βασική παραδοχή*: Όλες οι παραμορφώσεις οφείλονται σε καμπτικές ροπές. Οι διατμητικές παραμορφώσεις—μικρότερες από το 1% των καμπτικών παραμορφώσεων σε δοκούς κανονικών διαστάσεων—θεωρούνται αμελητέες.

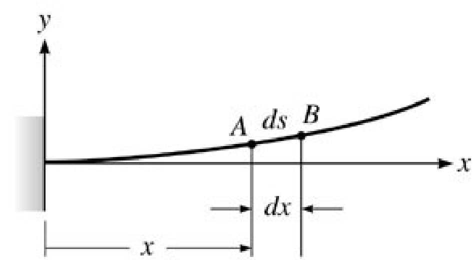
Μέθοδος Διπλής Ολοκλήρωσης (...)

Καμπυλότητα Δοκού

- Θεωρούμε τη δοκό του Σχήματος (a) που υπόκειται σε ένα συγκεντρωμένο φορτίο *P* στο ελεύθερο άκρο της.
- Ως αποτέλεσμα της φόρτισης, ο αρχικά ευθύγραμμος άξονας της δοκού κάμπτεται σε καμπύλη γραμμή, η οποία λέγεται ελαστική γραμμή. Οι παραμορφώσεις και τάσεις που αναπτύσσονται στη δοκό συνδέονται άμεσα με την καμπυλότητα της ελαστικής γραμμής.
- Υιοθετούμε το σύστημα αξόνων του Σχήματος (b): *x*-δεξιά, *y*-πάνω και *z*-έξω (θετική στροφή η αριστερόστροφη).



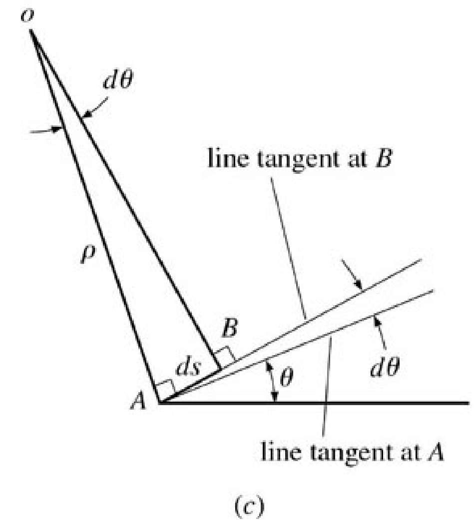
(a)



(b)

Μέθοδος Διπλής Ολοκλήρωσης (...)

- Θεωρούμε το τμήμα *AB* απειροστού μήκους *ds*, το οποίο απέχει απόσταση *x* από την αρχή των αξόνων. Οι εφαπτόμενες της ελαστικής γραμμής στα σημεία *A* και *B* σχηματίζουν γωνία *dθ.* Οι κάθετες στις εφαπτόμενες στα σημεία *A* και *B* τέμνονται στο σημείο *O*, το κέντρο καμπυλότητας.



- Η απόσταση *OA* λέγεται ακτίνα καμπυλότητας *ρ*, και το αντίστροφο της ορίζεται ως καμπυλότητα *κ*:

$$\boxed{\kappa = \frac{1}{\rho}} \qquad (1)$$

Από τη γεωμετρία του *OAB*:

$$\boxed{ds = \rho \, d\theta} \qquad (2)$$

όπου *dθ* (μετρούμενο σε *radians*) είναι η απειροστή γωνία μεταξύ των καθέτων στα σημεία *A* και *B.*

Μέθοδος Διπλής Ολοκλήρωσης (...)

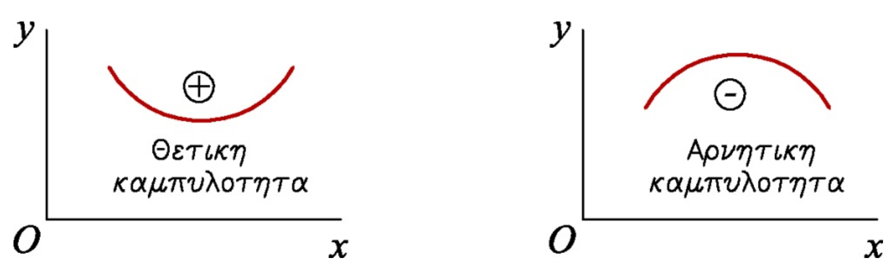
- Συνδυάζοντας τις Εξισώσεις 1 και 2 προκύπτει:

$$\boxed{\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}} \qquad (3)$$

- Δεδομένου ότι η καμπυλότητα στις συνήθεις δοκούς είναι πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $ds \approx dx$ και, επομένως, η Εξίσωση 3 μπορεί να γραφτεί ως

$$\boxed{\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}} \qquad (4)$$

- Προσήμανση καμπυλότητας:



Μέθοδος Διπλής Ολοκλήρωσης (...)

- Η κλίση της ελαστικής γραμμής στο σημείο Α είναι

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \tan\theta} \qquad (5)$$

- Δεδομένου ότι οι γωνίες είναι πολύ μικρές, $\tan\theta \approx \theta$ και η Εξίσωση 5 γράφεται

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \theta} \qquad (6)$$

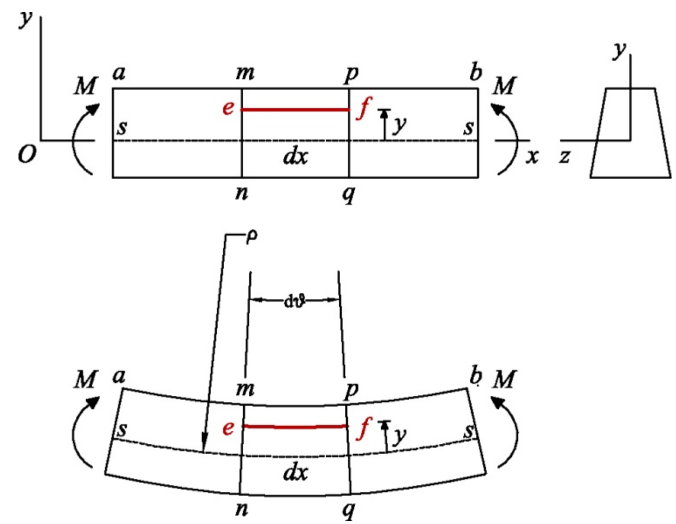
- Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της Εξίσωσης 6 ως προς *x* παίρνουμε, βάσει της Εξίσωσης 4, την καμπυλότητα συναρτήσει των ορθογώνιων συντεταγμένων *x* και *y*:

$$\boxed{\kappa = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}} \qquad (7)$$

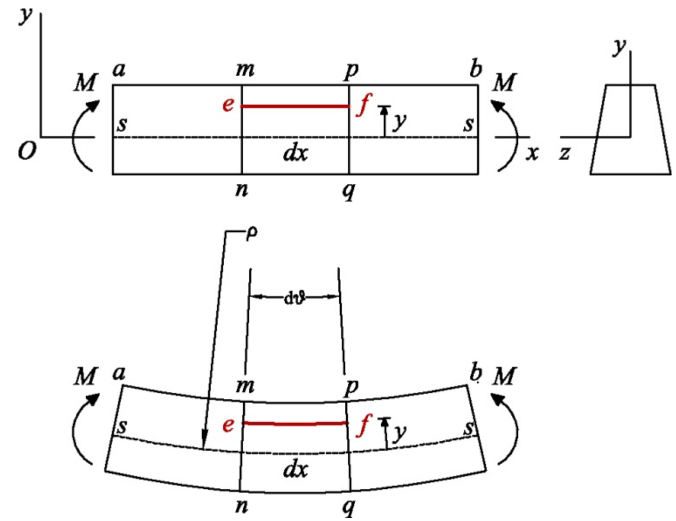
Μέθοδος Διπλής Ολοκλήρωσης (...)

Ορθές παραμορφώσεις δοκού

- Οι ορθές παραμορφώσεις μιας δοκού μπορούν να καθοριστούν από την καμπυλότητα της δοκού.
- Θεωρούμε το τμήμα *ab* μιας δοκού η οποία υπόκειται σε καθαρή κάμψη. Ως αποτέλεσμα της φόρτισης, η δοκός κάμπτεται στο επίπεδο *xy* (επίπεδο κάμψης) και ο αρχικά ευθύγραμμος άξονας της δοκού (άξονας *x*) κάμπτεται στην καμπύλη *ss*. Η ελαστική γραμμή στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, που ισοδυναμεί με θετική καμπυλότητα.
- Οι διατομές της δοκού, όπως οι διατομές *mn* και *pq*, παραμένουν επίπεδες και κάθετες στο διαμήκη άξονα της δοκού.

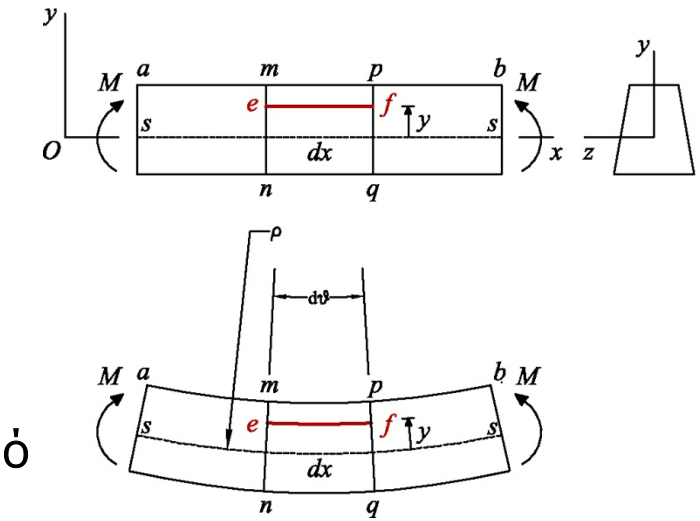


Μέθοδος Διπλής Ολοκλήρωσης (...)



- Λόγω των καμπτικών παραμορφώσεων, οι εγκάρσιες διατομές *mn* και *pq* περιστρέφονται η μία σε σχέση με την άλλη γύρω από άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο *xy*. Διαμήκεις ίνες στο κάτω μέρος της δοκού επιμηκύνονται, ενώ αυτές στο πάνω τμήμα μικραίνουν. Επομένως, το κάτω τμήμα της δοκού εφελκύεται και το πάνω μέρος θλίβεται.
- Κάπου μεταξύ της πάνω και κάτω επιφάνειας της δοκού βρίσκεται μια επιφάνεια της οποίας οι διαμήκεις ίνες δεν αλλάζουν μήκος. Αυτή η επιφάνεια, που παριστάνεται με τη διακεκομμένη γραμμή *ss*, ονομάζεται ουδέτερη επιφάνεια της δοκού. Η τομή της επιφάνειας αυτής με μία εγκάρσια διατομή λέγεται ουδέτερος άξονας της εν λόγω διατομής (π.χ. ο άξονας *z* στο σχήμα).

Μέθοδος Διπλής Ολοκλήρωσης (...)



- Η αρχική απόσταση *dx* μεταξύ των δύο διατομών *mn* και *pq* παραμένει αναλλοίωτη πάνω στην ουδέτερη επιφάνεια.
- Για να υπολογίσουμε τις ορθές παραμορφώσεις, θεωρούμε μια τυπική διαμήκη ίνα *ef* μεταξύ των διατομών *mn* και *pq*. Η θέση της ίνας *ef* καθορίζεται από την απόσταση *y* από την ουδέτερη επιφάνεια.
- Η ορθή παραμόρφωση της ίνας *ef* ισούται με

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_o} = \frac{l - l_o}{l_o} = \frac{(\rho - y)\,d\theta - dx}{dx} = (\rho - y)\frac{1}{\rho} - 1$$

Άρα,

$$\boxed{\varepsilon = -\kappa y = -\frac{y}{\rho}} \qquad (8)$$

Μέθοδος Διπλής Ολοκλήρωσης (...)

- Η Εξισωση 8 δηλώνει ότι οι ορθές παραμορφώσεις στη δοκό είναι ανάλογες της καμπυλότητας και μεταβάλλονται γραμμικά με την απόσταση y από την ουδέτερη επιφάνεια.
- Όταν το θεωρούμενο σημείο βρίσκεται πάνω από την ουδέτερη επιφάνεια, η απόσταση y είναι θετική. Αν η καμπυλότητα είναι επίσης θετική, τότε η παραμόρφωση ε θα είναι αρνητική, παριστάνοντας μείωση του μήκους της ίνας. Αντίθετα, όταν το θεωρούμενο σημείο βρίσκεται κάτω από την ουδέτερη επιφάνεια, η απόσταση y είναι αρνητική και, αν η καμπυλότητα είναι θετική, τότε η παραμόρφωση ε θα είναι θετική, παριστάνοντας επιμήκυνση της ίνας.

> 🗎 Η Εξίσωση 8 για τις ορθές παραμορφώσεις σε μία δοκό προέκυψε αποκλειστικά από τη γεωμετρία της παραμορφωμένης δοκού—οι ιδιότητες του υλικού δεν διαδραμάτισαν ρόλο! Άρα, οι παραμορφώσεις σε δοκό που υπόκειται σε καθαρή κάμψη μεταβάλλονται γραμμικά με την απόσταση y από την ουδέτερη επιφάνεια ανεξάρτητα από τη μορφή της καμπύλης τάσεων-παραμορφώσεων του υλικού.

Μέθοδος Διπλής Ολοκλήρωσης (...)

Ορθές τάσεις δοκού

Οι τάσεις υπολογίζονται βάσει της σχέσης τάσεων-παραμορφώσεων που ισχύει για το συγκεκριμένο υλικό.

- Για γραμμικώς ελαστικό υλικό, ισχύει ο νόμος του Hook για μοναξονική ένταση:

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon = -E\kappa y = -\frac{Ey}{\rho}} \qquad (9)$$

- Η Εξίσωση 9 δηλώνει ότι οι ορθές τάσεις που αναπτύσσονται σε μίαν εγκάρσια διατομή της δοκού μεταβάλλονται γραμμικά με την απόσταση *y* από τον ουδέτερο άξονα.

Μέθοδος Διπλής Ολοκλήρωσης (...)

- Σχέση καμπτικής ροπής-καμπυλότητας: Διαφορική Εξίσωση της ελαστικής γραμμής της δοκού
  - Οι ορθές τάσεις στη διατομή «ισοδυναμούν» με μία συνισταμένη αξονική δύναμη *N* και μία συνισταμένη καμπτική ροπή *M*. Συγκεκριμένα, η συνισταμένη ροπή των ορθών τάσεων γύρω από τον ουδέτερο άξονα ισούται με την καμπτική ροπή *M*.
  - Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα με εμβαδόν *dA.* Η δύναμη που ασκείται σ' αυτό είναι $\sigma\, dA$ και η συνεισφορά της στη ροπή γύρω από τον ουδέτερο άξονα είναι

$$dM = -\sigma y \; dA$$

ή βάσει της Εξίσωσης 9

$$dM = E\kappa y^2 \; dA$$

Μέθοδος Διπλής Ολοκλήρωσης (...)

- Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση πάνω στην επιφάνεια *A* της διατομής, προκύπτει η (συνισταμένη) καμπτική ροπή:

$$M = \int_A E\kappa y^2 \; dA$$

ή

$$\boxed{M = EI\kappa} \qquad (10)$$

όπου $I = \int_A y^2 \; dA$ η ροπή αδράνειας της διατομής γύρω από τον ουδέτερο άξονα.

- Συνδυάζοντας τις Εξισώσεις 7 και 10 προκύπτει η διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής της δοκού:

$$\boxed{M = EI \frac{d^2 y}{dx^2}} \qquad (11)$$