Δ.Π.Θ. - Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης
Αναπληρωτής Καθηγητής Στέφανος Δ. Κατσαβούνης
ΜΑΘΗΜΑ : **ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**

Ακαδ. έτος 2023-2024
15/04/2024

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΣΕΙΡΑ 5^{η}
Αριθμητική Ολοκλήρωση

ΑΣΚΗΣΗ – 1

Να υπολογιστεί το ακόλουθο ολοκλήρωμα με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων ή το πολύ δύο επαναλήψεις, χρησιμοποιώντας

α) τη μέθοδο Simpson 1/3 , β) τη μέθοδο Simpson 3/8

$$f(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα , υπολογίζοντας τα αντίστοιχα σχετικά σφάλματα, με την πραγματική τιμή του ολοκληρώματος.

(ΥΠΟΔΕΙΞΗ : Επειδή το ολοκλήρωμα δεν ορίζεται στο σημείο $x=1$ να ληφθεί ως άνω όριο η τιμή 0.999)

ΑΣΚΗΣΗ – 2

Ο σύνθετος κανόνας Simpson για $2M$ ίσα υποδιαστήματα $[x_k, x_{k+1}]$ στην περιοχή $[a,b]$ έχει τη γενική μορφή:

$$S(f,h) = \frac{h}{3}\ f(a) + f(b)\ + \frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{M-1} f(x_{2k}) + \frac{4h}{3}\sum_{k=1}^{M} f(x_{2k-1})$$

Να χρησιμοποιήσετε τον κανόνα αυτόν για να υπολογίσετε μια προσέγγιση του ολοκληρώματος της συνάρτησης $f(x) = 2 + \sin\left(2\sqrt{x}\right)$ στο διάστημα $[1,6]$ με 10 ίσα υποδιαστήματα.

ΑΣΚΗΣΗ – 3

Ο σύνθετος τραπεζοειδής κανόνας για καθένα από τα $j = 0,1,2,\ldots,n$ υποδιαστήματα στην περιοχή $[a,b]$, μπορεί να γραφεί (χωρίς τον όρο του σφάλματος) ως

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b) \right]$$

όπου : $h = (b-a)/n$ και $x_j = a + jh$

Υποθέτοντας ότι $f(0)=1,\ f(0.5)=2.5,\ f(1)=2,$ και ότι $f(0.25) = f(0.75) = z$ να βρείτε την τιμή του z αν η εφαρμογή του παραπάνω κανόνα με $n=4$ δίνει την τιμή 1.75 για το $\int_0^1 f(x)dx$.

ΑΣΚΗΣΗ – 4

Να χρησιμοποιήσετε τα δεδομένα από τον παρακάτω πίνακα για να βρείτε το ολοκλήρωμα μεταξύ $x = 1.0$ και 1.8, χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Simpson 1/3 με $h = 0.4$ και μετά με $h = 0.2$. Από τα δύο αυτά αποτελέσματα να βρείτε ένα καλύτερο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Romberg.

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
$f(x)$	1.54	1.81	2.15	2.58	3.11

ΑΣΚΗΣΗ – 5

Χρησιμοποιώντας την ολοκλήρωση κατά Romberg να υπολογίσετε την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x dx$. Η συμπλήρωση του πίνακα θα σταματά όταν $\left| R_{n-1,n-1} - R_{n,n} \right| < 10^{-5}$ είτε $n = 6$. Να συγκρίνετε την τελική τιμή με αυτήν που προκύπτει από την ακριβή λύση: $\int e^{ax} \sin \mathrm{b}x dx = \frac{\mathrm{a}\sin \mathrm{b}x - \mathrm{b}\cos \mathrm{b}x}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2} e^{ax} + \mathrm{C}$.

ΑΣΚΗΣΗ – 6

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής είναι $e^{-\frac{x^2}{2}} \Big/ \sqrt{2\pi}$. Η πιθανότητα ότι η τυχαία μεταβλητή X βρίσκεται μεταξύ 0 και 1 είναι :

$$P = \Pr(0 \le X \le 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-x^2/2} dx$$

Η εφαρμογή του κανόνα του τραπεζίου με διαφορετικό πλήθος τμημάτων γι’ αυτό το ολοκλήρωμα δίνει τα αποτελέσματα του ακόλουθου πίνακα.

h	0,5	0,25	0,125
Πλήθος τμημάτων	2	4	8
P	0.3362609	0.3400818	0.3410295

Χρησιμοποιώντας αυτά τα αποτελέσματα, να υπολογίσετε μια εκτίμηση για το P , με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια , με 7 δεκαδικά ψηφία.

ΑΣΚΗΣΗ – 7

Χρησιμοποιώντας την ολοκλήρωση κατά Romberg να υπολογίσετε την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος $\int_1^3 e^x \sin x dx$. Η συμπλήρωση του πίνακα θα σταματά όταν οι τιμές $R_{n,n-1}$ και $R_{n,n}$ διαφέρουν κατά 10^{-4}. Να συγκρίνετε την τελική τιμή με αυτήν που προκύπτει από την ακριβή λύση $y(x) = \frac{1}{2} e^x \left(\sin x - \cos x \right)$.

ΑΣΚΗΣΗ – 8

Η ταχύτητα ενός τρένου που ξεκινά χωρίς αρχική ταχύτητα δίνεται στον ακόλουθο πίνακα, όπου ο χρόνος είναι σε min και η ταχύτητα σε Km/h.

t (min)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v (km/h)	16	28.8	40	46.4	51.2	32.0	17.6	8	3.2	0

Να υπολογίσετε προσεγγιστικά τη συνολική απόσταση που διήνυσε το τρένο σε 20 min.

Δίνεται ότι : $v = ds/dt$

ΑΣΚΗΣΗ – 9

Ένας υδροταμιευτήρας αδειάζει το νερό μέσω ενός στομίου που βρίσκεται σε βάθος x μέτρα κάτω από την επιφάνεια του νερού το εμβαδόν της οποίας είναι $A\,\mathrm{m}^2$. Ο ακόλουθος πίνακας περιέχει τις τιμές του x για τις αντίστοιχες τιμές του A.

A	1.257	1.39	1.52	1.65	1.809	1.962	2.123	2.295	2.462	2.650	2.827
x	1.50	1.65	1.80	1.95	2.10	2.25	2.40	2.55	2.70	2.85	3.00

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $0.018T = \int_{1.5}^{3.0} \frac{A}{\sqrt{x}} dx$ να υπολογίσετε τον χρόνο T σε seconds για να κατέλθει το επίπεδο του νερού από τα 3.0 m στο 1.5 m πάνω από το στόμιο.

ΑΣΚΗΣΗ – 10

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Romberg να αποδείξετε ότι $\int_{-0.5}^{0} x\ln(x+1)dx = 0.0525698....$.

ΑΣΚΗΣΗ – 11

Να χρησιμοποιήσετε συνδυαστικά τις μεθόδους Simpson 1/3 και Simpson 3/8 για τα παρακάτω δεδομένα, υλοποιώντας δύο διαφορετικούς συνδυασμούς των μεθόδων αυτών.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
$f(x_i)$	1.543	1.669	1.811	1.971	2.151	2.352	2.577	2.828

ΑΣΚΗΣΗ – 12

Το μήκος ενός τόξου L μίας έλλειψης με ημιάξονες a και b δίνεται από τον τύπο

$$L = 4aE(m)$$

όπου : $m = (a^2 - b^2)/a^2$ και $E(m) = \int_0^{\pi/2} \left(1 - m\sin^2\varphi\right)^{1/2} d\varphi$

Η συνάρτηση $E(m)$ είναι ένα ελλειπτικό ολοκλήρωμα, ορισμένες τιμές της φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

m	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$E(m)$	1.57080	1.53076	1.48904	1.44536	1.39939	1.35064

Ζητείται να υπολογιστεί το L όταν $a = 5$ και $b = 4$.

1. Να χρησιμοποιήσετε την τετραγωνική παρεμβολή με τη μέθοδο των διηρημένων διαφορών Newton.
2. Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο Romberg, βασισμένη στον τραπεζοειδή κανόνα ολοκλήρωσης, για τον υπολογισμό του $E(m)$, μέχρις ότου προκύψει μία τιμή κατά Romberg με ακρίβεια 10^{-4}.
3. Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των (α) και (β) για να διατυπώσετε ποια από τις δύο μεθόδους δίνει καλύτερα αποτελέσματα.

ΑΣΚΗΣΗ – 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$.

i. Να προσδιορίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^{0.8} f(x)dx$ με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων μετά την υποδιαστολή.

ii. Να εφαρμόσετε την ολοκλήρωση κατά Romberg για να προσδιορίσετε την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^{0.8} f(x)dx$ με ακρίβεια τουλάχιστον 5 δεκαδικών ψηφίων μετά την υποδιαστολή

ΑΣΚΗΣΗ – 14

Το παρακάτω ολοκλήρωμα έχει μια ακριβή λύση, όπου C είναι μια σταθερά:

$$\int \log_{10}(x)dx = x\log_{10} x - x + C$$

Είναι $\int_{1}^{2} \log_{10}(x)dx \cong 0.167766...$

Να προσδιορίσετε την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος $\int_{1}^{2} \log_{10}(x)dx$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Romberg και φθάνοντας στην τιμή $R(2,2)$:

1. μέσω του τραπεζοειδούς κανόνα για τους αρχικούς υπολογισμούς με αρχική τιμή $h=1.0$ και ολοκληρώνοντας τους υπολογισμούς στο διάστημα $\left[1,2\right]$ για $h=0.25$
2. μέσω του κανόνα Simpson 1/3 για τους αρχικούς υπολογισμούς με αρχική τιμή $h=0.5$ και ολοκληρώνοντας τους υπολογισμούς στο διάστημα $\left[1,2\right]$ για $h=0.125$

Να αποτυπώσετε όλα τα βήματα, τους τύπους και τους σχετικούς υπολογισμούς.

ΑΣΚΗΣΗ – 15

Είναι $\int_{0}^{\pi/2} \cos(x)dx = 1$. Να προσδιορίσετε την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος $\int_{0}^{\pi/2} \cos(x)dx$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Romberg και φθάνοντας στην τιμή $R(2,2)$ ή σε ακρίβεια 10^{-5} :

α) μέσω του τραπεζοειδούς κανόνα για τους αρχικούς υπολογισμούς με 1, 2 και 4 διαστήματα

β) μέσω του σύνθετου κανόνα Simpson 1/3 για τους αρχικούς υπολογισμούς με 1, 2 και 4 διαστήματα

Να αποτυπώσετε όλα τα βήματα, τους τύπους και τους σχετικούς υπολογισμούς.

Ο σύνθετος κανόνας Simpson για $2M$ ίσα υποδιαστήματα $\left[x_k, x_{k+1}\right]$ στην περιοχή $\left[a,b\right]$ έχει τη γενική μορφή:

$$S(f,h) = \frac{h}{3}\ \ f(a) + f(b)\ \ + \frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{M-1} f(x_{2k}) + \frac{4h}{3}\sum_{k=1}^{M} f(x_{2k-1})$$

ΑΣΚΗΣΗ – 16

Σε μία αναδευόμενη δεξαμενή συνεχούς αντίδρασης με ένα στόμιο εισόδου (ροή εισόδου) και με ογκομετρική παροχή ροής F^{in} περιέχεται το υγρό A με συγκέντρωση $C_A^{in} = 1\,\text{mol/L}$. Στη δεξαμενή δεν υφίσταται ροή εξόδου. Θεωρούμε ότι το υγρό A διατηρεί σταθερή πυκνότητα.

Η δεξαμενή είναι αρχικά κενή, και το υγρό εισέρχεται σ' αυτήν μέσω της ροής εισόδου με ρυθμό :

$$F^{in}(t) = 1 - \exp(-t) \quad \text{σε m}^3/\text{min}\ .$$

Να προσδιορίσετε τον όγκο του υγρού $V(t)$ που συσσωρεύεται σε χρόνο $t_1 = 5\,\text{min}$ χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά Romberg, βασισμένη στον τραπεζοειδή κανόνα ολοκλήρωσης. Να υλοποιήσετε τρεις στήλες της μεθόδου Romberg.

ΑΣΚΗΣΗ – 17

Να χρησιμοποιήσετε τον κανόνα του Simpson με 2 διαστήματα (3 σημεία) και το πολυώνυμο Gauss-Legendre 3 σημείων για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^3 \sqrt{1+t}\, dt = 4.66666667$$

Τα αποτελέσματα θα είναι:

```
Simpson         = 4.662277660168e+00
Gauss-Legendre = 4.666829051581e+00
```

ΑΣΚΗΣΗ – 18

Να βρείτε τον τύπο για το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x)\, dx = c_1\ f(a) + c_2\ f(b)$$

ώστε ο τύπος αυτός να δίνει ακριβείς τιμές για το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b a_0 x + b_0 x^2 \quad dx$$

το οποίο είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των x και x^2.

Στη συνέχεια να ελέγξετε εάν ο τύπος που θα προκύψει δίνει ακριβείς τιμές για τα ολοκληρώματα

1. $\int_2^5 2x^2 - 3x \ \ dx$
2. $\int_2^5 3\,dx$

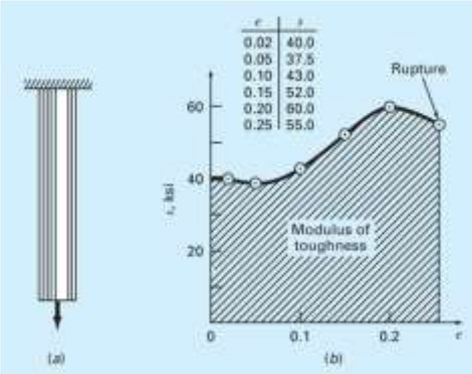
ΑΣΚΗΣΗ – 19

(α) Να χρησιμοποιήσετε ολοκλήρωση κατά Romberg με πλήθος στηλών $j_{max}=3$ για να βρείτε μία προσεγγιστική εκτίμηση για το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 e^x - 4x \ \ dx$

(β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα αναλυτικά, και στη συνέχεια να υπολογίσετε το σφάλμα σε σχέση με το αποτέλεσμα από το ερώτημα (α).

ΑΣΚΗΣΗ – 20

Μία ράβδος που υπόκειται σε αξονική φόρτιση θα παραμορφωθεί, όπως απεικονίζεται στην καμπύλη τάσης – τροπής του σχήματος.



(α) Ράβδος υπό αξονική φόρτιση,

(β) η καμπύλη τάσης-τροπής, όπου η τάση ***s*** είναι σε ksi (10^3 lb/in^2), ενώ η τροπή ***e*** είναι αδιάστατη.

Η επίπεδη επιφάνεια κάτω από την καμπύλη αυτή έως το σημείο θραύσης (Rapture) είναι το μέτρο δυσθραυστότητας (modulus of toughness) του υλικού, και αντιπροσωπεύει την ικανότητα του υλικού να αντιστέκεται σε κρουστικά φορτία. Να χρησιμοποιήσετε αριθμητική ολοκλήρωση για να υπολογίσετε το μέτρο δυσθραυστότητας για το διάγραμμα αυτό.

ΑΣΚΗΣΗ – 21

1. Χρησιμοποιώντας α) τον τραπεζοειδή κανόνα και β) τον κανόνα του Simpson με $h=1, h=1/2, h=1/4$ να υπολογίσετε προσεγγιστικά τα ακόλουθα δύο ολοκληρώματα

$$\int_0^1 x^{7/2}dx$$

$$\int_0^1 x^{5/2}dx$$

2. Στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο Romberg για να υπολογίσετε μία καλύτερη εκτίμηση των αποτελεσμάτων, με όσα δεκαδικά ψηφία εμφανίζει η αριθμομηχανή σας.
3. Να συγκρίνετε τις τιμές από τη χρήση της μεθόδου Romberg με τις ακριβείς τιμές που υπολογίζονται μέσω του ολοκληρωτικού λογισμού