



ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΣΕΙΡΑ 4^η Αριθμητική Παρεμβολή

ΑΣΚΗΣΗ – 1

Για τον πίνακα που ακολουθεί να βρείτε το πολυώνυμο παρεμβολής χρησιμοποιώντας α) τη μέθοδο Lagrange και β) τη μέθοδο των διηρημένων διαφορών Newton, επιβεβαιώνοντας ότι και οι 2 μέθοδοι δημιουργούν το ίδιο πολυώνυμο παρεμβολής

x	0	2	4	8
$f(x)$	3	8	11	19

ΑΣΚΗΣΗ – 2

Χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange, να εκφράσετε την ακόλουθη συνάρτηση ως άθροισμα επιμέρους κλασμάτων.

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)x(x-1)}$$

ΑΣΚΗΣΗ – 3

Να βρεθεί ο όρος που λείπει στον παρακάτω πίνακα

x	0	1	2	3	4
y	1	2	4	?	16

ΑΣΚΗΣΗ – 4

Αν $f(x) = \frac{1}{x}$ να αποδείξετε ότι η τρίτης τάξης διηρημένη διαφορά της συνάρτησης $f(x)$ με ορίσματα

$$a, b, c, d \text{ είναι: } f(a, b, c, d) = \frac{-1}{abcd}$$

ΑΣΚΗΣΗ – 5

Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο των διηρημένων διαφορών για να βρείτε το πολυώνυμο Lagrange $q(x)$ που διέρχεται από τα σημεία (1,6), (2,12), (4,60) και (5,114). Ποια είναι η τιμή $q(3)$;

ΑΣΚΗΣΗ – 6

Υποθέτουμε ότι ο ακόλουθος πίνακας αναπαριστά τιμές μιας συνάρτησης f .

x	0	2	3
$y = f(x)$	2.5	5	7

α) Να βρείτε το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange

β) Να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα από το ερώτημα (α) για τον υπολογισμό της $f(1)$

γ) Να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα από το ερώτημα (α) για τον υπολογισμό του $\int_0^3 f(x)dx$

ΑΣΚΗΣΗ – 7

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας για τη συνάρτηση $f(x) = \log_{10}(x)$

x	1	1.5	2	3	3.5
$f(x)$	0	0.17609	0.30103	0.4772	0.54407

1. Να κατασκευάσετε τον πίνακα διηρημένων διαφορών (προς τα εμπρός) χρησιμοποιώντας όλα τα δεδομένα (δηλ. τις διηρημένες διαφορές μέχρι και 4^{ης} τάξης).
2. Χρησιμοποιώντας τις διηρημένες διαφορές να κατασκευάσετε τα πολυώνυμα $P_3(x)$, $P_4(x)$ και στη συνέχεια να τα χρησιμοποιήσετε για να προσδιορίσετε την τιμή $f(2.5)$.
3. Να συγκρίνετε τα 2 αποτελέσματα με την ακριβή τιμή (με 5 δεκαδικά ψηφία).

ΑΣΚΗΣΗ – 8

Το πολυώνυμο Lagrange που διέρχεται από τα 3 σημεία του παρακάτω πίνακα

x	15	18	22
y	24	37	25

είναι : $f_2(x) = L_0(x)(24) + L_1(x)(37) + L_2(x)(25)$. Ποια είναι η τιμή $L_1(x)$ για $x = 16$;

ΑΣΚΗΣΗ – 9

Έστω $P_3(x)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής για τα δεδομένα $(0,0)$, $(0.5, y)$, $(1,3)$ και $(2,2)$. Να βρεθεί η τιμή του y εάν ο συντελεστής του x^3 στο $P_3(x)$ είναι ίσος με 6.

ΑΣΚΗΣΗ – 10

Για μία συνάρτηση f ο πίνακας διηρημένων διαφορών Newton είναι (x_0, x_1, x_2) :

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_0, x_1, x_2]$
0	?		
		?	
0.4	?		$\frac{50}{7}$
		10	
0.7	6		

(α) Να προσδιορίσετε τις τιμές που λείπουν από τον πίνακα

(β) Να βρείτε το πολυώνυμο παρεμβολής $p(x)$.

ΑΣΚΗΣΗ – 11

Το πολυώνυμο που διέρχεται από τα σημεία

x	18	22	24
y	?	25	123

δίνεται ότι είναι : $8.125x^2 - 324.75x + 3237.18 \quad 18 \leq x \leq 24$.

Το αντίστοιχο πολυώνυμο παρεμβολής διηρημένων διαφορών Newton δίνεται ότι είναι

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x-18) + b_2(x-18)(x-22)$$

Να βρεθεί η τιμή του b_2 .

ΑΣΚΗΣΗ – 12

Η θερμοχωρητικότητα του αέρα C_p συναρτήσει της θερμοκρασίας δίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

C_p (kJ/kg·K)	1.005	1.013	1.029	1.051	1.075	1.089	1.121	1.14 2	1.155	1.173
T (K)	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200

Να βρείτε τη θερμοχωρητικότητα για $T = 750$ K χρησιμοποιώντας ένα πολυώνυμο παρεμβολής τρίτου βαθμού. Αρχικά να βρείτε το πολυώνυμο αυτό.

ΑΣΚΗΣΗ – 13

α) Να χρησιμοποιήσετε τη προς τα πίσω μέθοδο διηρημένων διαφορών τριών σημείων για να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = e^x \cos x$ στο σημείο $x = 3$ με $\Delta = 0.01$.

β) Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο Richardson's extrapolation για να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = e^x \cos x$ στο σημείο $x = 3$ με $\Delta = 0.1$. Να υλοποιήσετε όλα τα βήματα μέχρι να ολοκληρωθούν οι υπολογισμοί για $\Delta = 0.025$.

ΑΣΚΗΣΗ – 14

Να υπολογίσετε την $f'(0.25)$ της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\sin^2 \left(\frac{\sqrt{x^2 + x}}{\cos x - x} \right)}{\sin \left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)}$$

με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια, χρησιμοποιώντας 15 σημαντικά ψηφία.

(ΥΠΟΔΕΙΞΗ : Να ξεκινήσετε με $h = 0.01$ και τη μέθοδο κεντρικών διαφορών. Στη συνέχεια φθάνοντας μέχρι $h = 0.0025$, να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο Richardson's extrapolation κατασκευάζοντας τον αντίστοιχο τριγωνικό πίνακα).

(ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ : -9.06669877106180)

ΑΣΚΗΣΗ – 15

Μία καμπύλη διέρχεται από τα σημεία (0,18), (1,10), (3, -18) και (6,90). Να βρείτε την κλίση της καμπύλης για $x = 2$.

ΑΣΚΗΣΗ – 16

Να βρείτε τη διανυθείσα απόσταση από ένα υλικό σημείο καθώς και την επιτάχυνσή του στο τέλος των 4 δευτερολέπτων, εάν η ταχύτητα ως προς το χρόνο μεταβάλλεται σύμφωνα με τον πίνακα:

t	0	1	3	4
v	21	15	12	10

ΑΣΚΗΣΗ – 17

Είναι $f(x) = \sqrt{x}$. Να υπολογίσετε το πολυώνυμο παρεμβολής 2^{ου} βαθμού, $P_2(x)$, για την $f(x)$, χρησιμοποιώντας τα σημεία $x_1 = 1$, $x_2 = 2.25$, και $x_3 = 4$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το $P_2(2)$ καθώς και το πραγματικό σφάλμα. [ΑΠΑΝΤΗΣΗ : $P_2(2) = \frac{148}{105}$].

ΑΣΚΗΣΗ – 18

Να χρησιμοποιήσετε τον τύπο παρεμβολής Lagrange για να βρείτε ένα πολυώνυμο $p_2(x)$ που παρεμβάλλει τη συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ στα σημεία $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, και $x_2 = 1$. Στη συνέχεια να βρείτε την τιμή $p_2(0,9)$ με ακρίβεια έξι δεκαδικών ψηφίων μετά την υποδιαστολή και να τη συγκρίνετε με την πραγματική τιμή. Να βρείτε το ποσοστιαίο σφάλμα που υπεισέρχεται.

[ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ : $p_2(x) = 1 - 0,632121x^2$, Σφάλμα : $\approx 9,69\%$]