



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΣΕΙΡΑ 3<sup>η</sup> ΣΕΙΡΕΣ Taylor & Maclaurin

### ΑΣΚΗΣΗ – 1

Να βρεθούν οι σειρές Taylor για :

- i. τη συνάρτηση  $\cos(x)$  στο σημείο  $0$ ,
- ii. τη συνάρτηση  $x^3$  στο σημείο  $x = 2$ ,

### ΑΣΚΗΣΗ – 2

Να χρησιμοποιήσετε τις σειρές Taylor για να προσδιορίσετε την τιμή της συνάρτησης  $f(x) = \sin(x)$  για  $x = 2$  χρησιμοποιώντας τις τιμές για  $x = \pi/2$ . Να συγκρίνετε αυτήν την τιμή με την τιμή 0.909296723 που προκύπτει από μία αριθμομηχανή.

### ΑΣΚΗΣΗ – 3

Να βρείτε το πολυώνυμο Taylor  $n$ -οστού βαθμού για τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  στο σημείο  $x = 0$ .

### ΑΣΚΗΣΗ – 4

Να βρείτε τους τρεις πρώτους όρους της σειράς Taylor για τη συνάρτηση  $\sin \pi x$  στο σημείο  $\alpha = 0.5$ .

Να χρησιμοποιήσετε την απάντησή σας για να βρείτε μία προσεγγιστική τιμή του  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$ .

### ΑΣΚΗΣΗ – 5

Να βρείτε το πολυώνυμο Taylor 4ου βαθμού για τη συνάρτηση  $f(x) = x^2$  στο σημείο  $x = 1$ .

### ΑΣΚΗΣΗ – 6

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$$

### ΑΣΚΗΣΗ – 7

Η συνάρτηση  $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$  καλείται συνάρτηση σφάλματος, χρησιμοποιείται στις πιθανότητες

και δεν μπορεί να υπολογιστεί επακριβώς. Ωστόσο, μπορεί να προσεγγιστεί χρησιμοποιώντας ένα

πολύωνυμο Taylor. Να βρείτε ποια είναι η προσεγγιστική τιμή της  $erf(2.0)$  χρησιμοποιώντας τους τρεις πρώτους όρους της αντίστοιχης σειράς Taylor στο σημείο  $t = 0$ .

(α) -0.75225    (β) 0.99532    (γ) 1.5330    (δ) 2.8586

### ΑΣΚΗΣΗ – 8

Να βρείτε το ανάπτυγμα Maclaurin των

- i.  $f(x) = e^x \ln(1+x)$ ,
- ii.  $f(x) = x^3 \sin 2x$

### ΑΣΚΗΣΗ – 9

Να υπολογίσετε το πολύωνυμο Maclaurin 4ου βαθμού για τη συνάρτηση

$$f(x) = \cos(x) \ln(1-x) \quad \text{για } -1 < x < 1.$$

### ΑΣΚΗΣΗ – 10

Να βρείτε τη σειρά Maclaurin για τη συνάρτηση  $\sin^2 x$  χρησιμοποιώντας τη σειρά για τη συνάρτηση  $\cos 2x$ . Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα να προσδιορίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x) - x^2}{x^4}$$

### ΑΣΚΗΣΗ – 11

Η εξίσωση  $e^{-2x} = 3x^2$  έχει μία ρίζα κοντά στο σημείο  $x = 0$ . Προσδιορίζοντας μία κατάλληλη πολυωνυμική προσέγγιση για τη συνάρτηση  $e^{-2x}$  να βρείτε μία προσεγγιστική τιμή για τη ρίζα αυτή.

### ΑΣΚΗΣΗ – 12

Να βρείτε το πολύωνυμο Taylor 6ου βαθμού για τη συνάρτηση  $f(x) = \sin^2 x$  στο σημείο  $x = 0$ .

### ΑΣΚΗΣΗ – 13

Να θεωρήσετε τη συνάρτηση  $f(x) = xe^{-x}$

- i. Να γράψετε τους τέσσερις πρώτους μη μηδενικούς όρους της σειράς Taylor για τη συνάρτηση  $f$  για  $x = 0$ .
- ii. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x) - x + x^2}{x^3} \right)$ .

Να γράψετε τους τέσσερις πρώτους μη μηδενικούς όρους της σειράς Taylor για τη συνάρτηση

$$g(x) = \int_0^x te^{-t} dt \quad \text{για } x = 0. \text{ Να χρησιμοποιήσετε τους τρεις πρώτους όρους για να υπολογίσετε το } g(1/5).$$