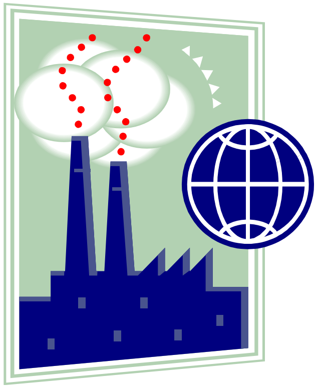
Κεφάλαιο 9



Συστήματα σωματιδίων

Τι μαθαίνετε

- Πώς να αναλύετε συστήματα δύο ή περισσότερων σωματιδίων
- Πώς να βρίσκετε το κέντρο μάζας ενός συστήματος σωματιδίων
- Την αρχή της διατήρησης της ορμής και πώς αυτή εφαρμόζεται σε συστήματα σωματιδίων
- Πώς να αναλύετε τις συγκρούσεις
  - Ανελαστικές συγκρούσεις
  - Ελαστικές συγκρούσεις

Ορμή συστήματος σωματιδίων

$$\mathrm{P} = p_1 + p_2 + \ldots + p_n \Rightarrow \mathrm{P} = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}$$

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = -\mathbf{F}$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη αυτές τις εξισώσεις, παίρνουμε

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F} + (-\mathbf{F})$$

δηλαδή,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0$$

Νόμος διατήρησης ορμής

$$P = p_1 + p_2 = [\sigma\tau\alpha\theta.]$$

Αυτός είναι ο **νόμος διατήρησης της ορμής**. Σημειώστε ότι αυτός ο νόμος είναι άμεση συνέπεια του Τρίτου Νόμου του Newton: η ολική ορμή είναι σταθερή επειδή η ισότητα δράσης και αντίδρασης διατηρεί τις μεταβολές της ορμής των δύο σωματιδίων ακριβώς ίσες κατά μέτρο αλλά αντίθετες κατά τη φορά – τα σωματίδια ανταλλάσσουν απλώς κάποια ορμή μέσω των αμοιβαίων δυνάμεων τους.

Η διατήρηση της ορμής είναι ένα ισχυρό εργαλείο που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε μερικά γενικά χαρακτηριστικά της κίνησης ακόμα και όταν αγνοούμε τα λεπτομερή χαρακτηριστικά των αμοιβαίων δυνάμεων των σωματιδίων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ενα αυτοκίνητο μάζας 1500 kg καθώς κινείται με 25 m/s (90 km/h) συγκρούεται με παρόμοιο σταθμευμένο αυτοκίνητο. Τα δύο αυτοκίνητα παραμένουν ενωμένα μετά τη σύγκρουση. Πόση είναι η ταχύτητα του συντρίμματος αμέσως μετά τη σύγκρουση; Αμελήστε τις τριβές με το κατάστρωμα του δρόμου.

$$P_x = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1$$

Μετά τη σύγκρουση, και τα δύο αυτοκίνητα έχουν την ίδια ταχύτητα, $v_1' = v_2' = v'$ και η ολική ορμή είναι ίση με

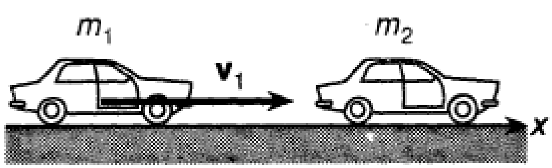
$$P_x = m_1 v_1' + m_2 v_2' = (m_1 + m_2)\, v'$$

Αφού η ορμή διατηρείται, η ορμή πριν από τη σύγκρουση πρέπει να ισούται με την ορμή μετά τη σύγκρουση

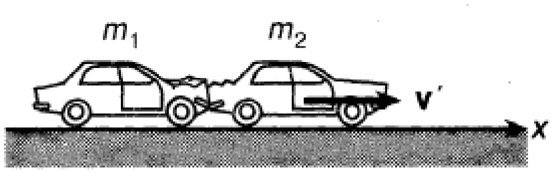
$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\, v'$$

ή

$$v' = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{1500\ \text{kg} \times 25\ \text{m/s}}{1500\ \text{kg} + 1500\ \text{kg}} = 12{,}5\ \text{m/s}$$



(a)

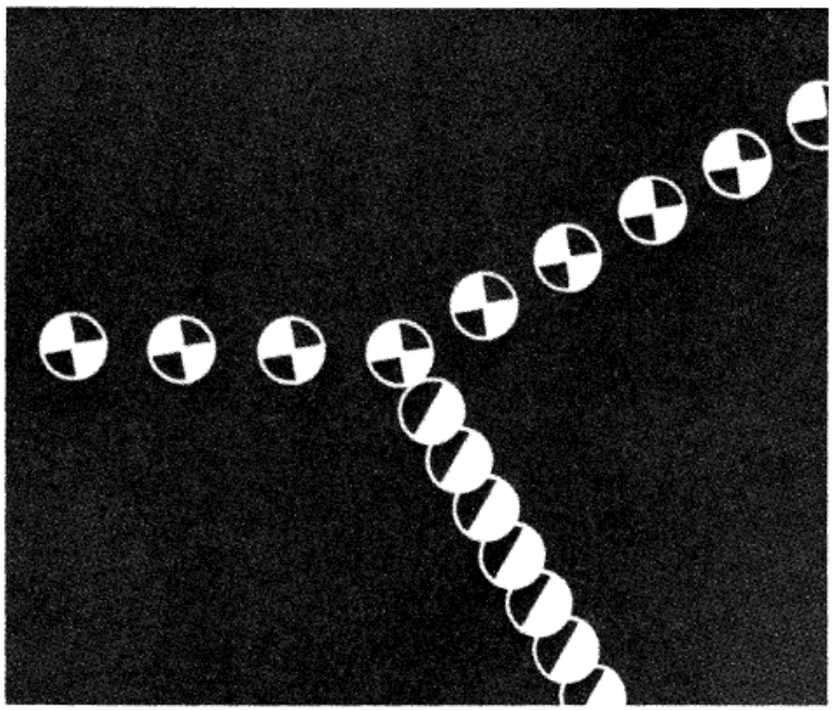


(b)

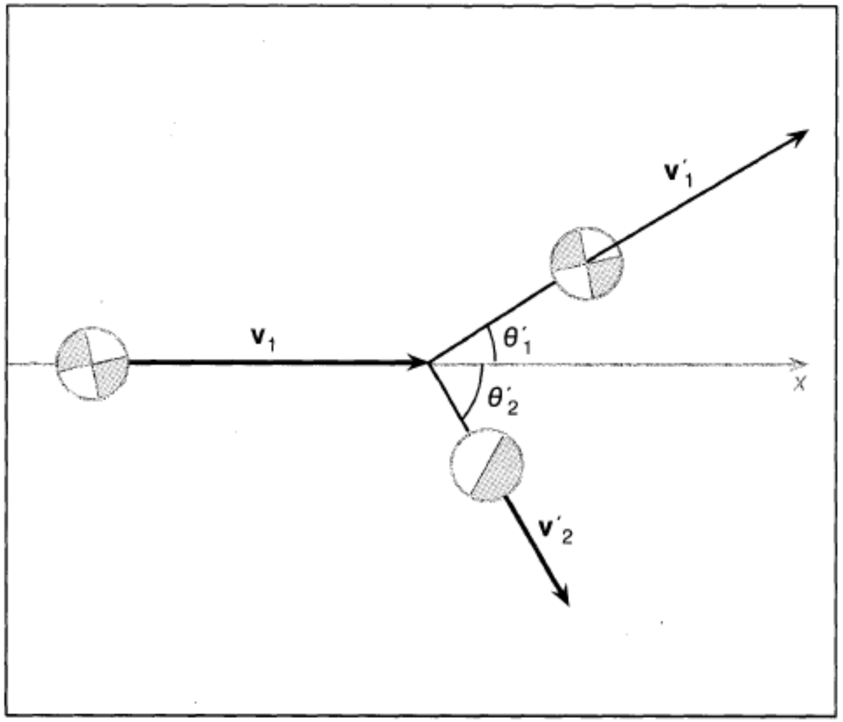
ΣΧΟΛΙΑ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ: Προφανώς, οι δυνάμεις που δρουν κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης των αυτοκινήτων είναι εξαιρετικά πολύπλοκες, η διατήρηση όμως της ορμής μας επιτρέπει να παρακάμψουμε αυτές τις επιπλοκές και να πάρουμε κατευθείαν την απάντηση. Σημειώστε ότι δικαιούμαστε να χρησιμοποιήσουμε τη διατήρηση της ορμής σ' αυτό το παράδειγμα, *δεν δικαιούμαστε*, όμως, να χρησιμοποιήσουμε τη διατήρηση της ενέργειας. Η κινητική ενέργεια *δεν* διατηρείται σ' αυτή τη σύγκρουση αυτοκινήτων – μέρος της ενέργειας χρησιμοποιείται για να προκαλέσει δομικές μεταβολές στ' αυτοκίνητα.

Η χρήση της διατήρησης της ορμής σ' ένα πρόβλημα κίνησης συνεπάγεται πάντοτε τα γνωστά τρία βήματα: Γράφουμε πρώτα μιαν έκφραση για την ορμή σε κάποια χρονική στιγμή της κίνησης, μετά γράφουμε μιαν έκφραση για την ορμή σε κάποια άλλη χρονική στιγμή και μετά, βασιζόμενοι στη διατήρηση εξισώνουμε αυτές τις δύο εκφράσεις. Αφού η ορμή είναι διανυσματική ποσότητα, έχει τρεις συνιστώσες, καθεμιά από τις οποίες διατηρείται χωριστά. Στη γενική περίπτωση, αυτό οδηγεί σε τρεις ξεχωριστές εξισώσεις διατήρησης, οι οποίες μπορούν να λυθούν για τρεις άγνωστες συνιστώσες μιας των ταχυτήτων. Ομως, στην ειδική περίπτωση του παραδείγματος μας της μονοδιάστατης κίνησης, η μόνη μη μηδενική συνιστώσα της ορμής είναι η συνιστώσα x, κατά μήκος της διεύθυνσης κίνησης, οπότε έχουμε να λύσουμε μία μόνο εξίσωση. Ανεξάρτητα με το αν έχουμε να κάνουμε με μία συνιστώσα ή με τρεις συνιστώσες της ορμής, δεν πρέπει να ξεχνάμε ποτέ να λαμβάνουμε υπόψη τα πρόσημα των συνιστωσών – αντιστροφή του προσήμου σημαίνει αντιστροφή της φοράς κίνησης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Σε μία πειραματική επίδειξη, δύο πεσσοί ίσων μαζών συγκρούονται καθώς κινούνται, χωρίς σχεδόν τριβές, στο στρώμα αέρα μιας αεροτράπεζας (Σχ. 10.4a). Πριν από τη σύγκρουση ένας από τους πεσσούς έχει ταχύτητα 0,300 m/s και ο άλλος βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας. Μετά την (πλευρική) σύγκρουση, ο πρώτος πεσσός έχει ταχύτητα 0,260 m/s υπό γωνία 30° με την αρχική φορά της κίνησης του. Πόση είναι η ταχύτητα του άλλου πεσσού;

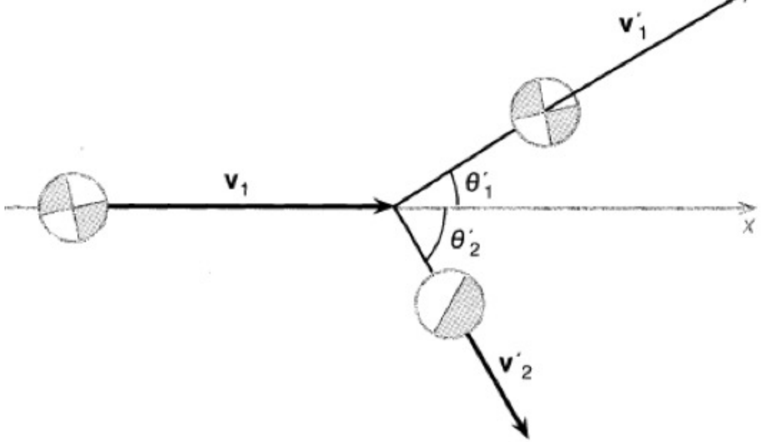


(a)



(b)

Συνέχεια παραδείγματος



$$P_x = m_1 v_{1,x}$$

$$P_y = 0$$

Μετά τη σύγκρουση οι συνιστώσες της ολικής ορμής είναι

$$P_x = m_1 v'_{1,x} + m_2 v'_{2,x}$$

$$P_y = m_1 v'_{1,y} + m_2 v'_{2,y}$$

Η διατήρηση της ορμής μας λέει ότι καθεμιά χωριστά από τις συνιστώσες της ορμής παραμένει η ίδια κατά τη σύγκρουση. Επομένως, έχουμε μία εξίσωση για τη διατήρηση της συνιστώσας x της ορμής

$$m_1 v_{1,x} = m_1 v'_{1,x} + m_2 v'_{2,x}$$

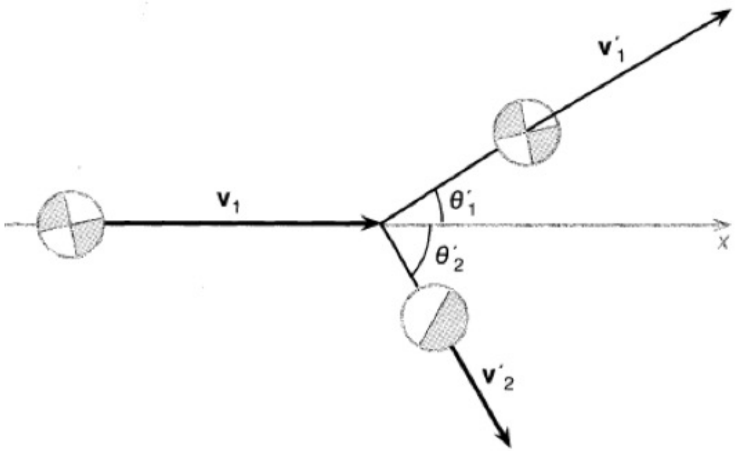
και μία άλλη εξίσωση για τη διατήρηση της συνιστώσας y της ορμής

$$0 = m_1 v'_{1,y} + m_2 v'_{2,y}$$

Συνέχεια παραδείγματος

Από αυτές τις εξισώσεις βρίσκουμε αμέσως τις συνιστώσες της ταχύτητας του πεσσού 2 μετά τη σύγκρουση

$$v'_{2,x} = \frac{m_1 v_{1,x} - m_1 v'_{1,x}}{m_2} = v_{1,x} - v'_{1,x}$$



$$v'_{2,y} = \frac{-m_1 v'_{1,y}}{m_2} = -v'_{1,y}$$

Αφού $v_{1,x} = v_1$, $v'_{1,x} = v'_1 \cos\theta'_1$, και $v'_{1,y} = v'_1 \sin\theta'_1$, παίρνουμε

$$v'_{2,x} = v_1 - v'_1 \cos\theta'_1$$

$$= 0{,}300 \text{ m/s} - 0{,}260 \text{ m/s} \times \cos 30^\circ = 0{,}075 \text{ m/s}$$

και

$$v'_{2,y} = -v'_1 \sin\theta'_1$$

$$= -0{,}260 \text{ m/s} \times \sin 30^\circ = -0{,}130 \text{ m/s}$$

Το μέτρο της ταχύτητας του πεσσού 2 ισούται τότε με

$$\upsilon_2' = \sqrt{(0{,}075\ \mathrm{m/s})^2 + (-0{,}130\ \mathrm{m/s})^2} = 0{,}150\ \mathrm{m/s}$$

και η γωνία μεταξύ της ταχύτητας και του άξονα x δίνεται από τη σχέση

$$\tan\theta_2' = \frac{-0{,}130\ \mathrm{m/s}}{0{,}075\ \mathrm{m/s}} = -1{,}73$$

ή $\theta_2' = -60°$.

ΣΧΟΛΙΑ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ: Στην περίπτωση της μονοδιάστατης κίνησης, η γραμμή της κίνησης ορίζει μια προνομιούχο διεύθυνση, και αυτή η διεύθυνση είναι η προφανής εκλογή για έναν από τους άξονες, έστω τον άξονα x, όπως στα Παραδείγματα 1 και 2. Στην περίπτωση της κίνησης σε δύο ή τρεις διαστάσεις, υπάρχουν πολλές γραμμές κίνησης και η εκλογή των αξόνων των συντεταγμένων δεν είναι τόσο προφανής. Συνήθως αποδεικνύεται ότι είναι χρήσιμο να τοποθετηθεί ένας από τους άξονες κατά τη διεύθυνση κίνησης ενός των σωμάτων, όπως έγινε στο παράδειγμα με τους πεσσούς.

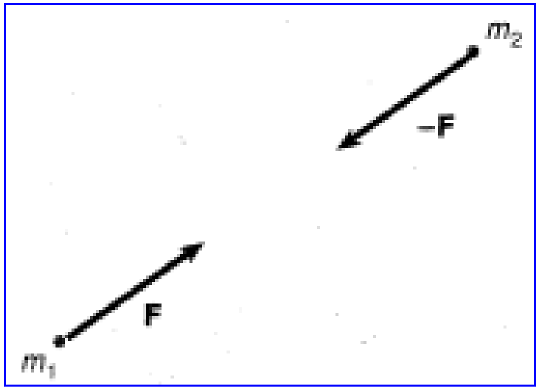
Αντί να χρησιμοποιήσουμε τις συνιστώσες της ορμής, θα μπορούσαμε να είχαμε λύσει το πρόβλημα με αφαίρεση διανυσμάτων: η ορμή του πεσσού 2 ισούται με τη διαφορά ανάμεσα στην αρχική ορμή και στην τελική ορμή του πεσσού 1, δηλαδή, $\mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1'$. Το διάνυσμα $\mathbf{p}_2'$ μπορεί να βρεθεί αν σχεδιάσουμε το τρίγωνο των διανυσμάτων και το επιλύσουμε τριγωνομετρικά.

Ορμή συστήματος σωματιδίων (εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις)

Έστω σύστημα δύο σωματιδίων

Εσωτερικές δυνάμεις : αμοιβαίες δυνάμεις που ασκεί το ένα σωματίδιο στο άλλο

Εξωτερικές δυνάμεις : δυνάμεις που ασκούνται από άλλα σώματα που δεν ανήκουν στο σύστημα σωματιδίων



$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{1,\text{ext}}$$

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = -\mathbf{F} + \mathbf{F}_{2,\text{ext}}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathbf{F}_{1,\text{ext}} + \mathbf{F}_{2,\text{ext}}$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ολικής ορμής του συστήματος των δύο σωματιδίων ισούται με την ολική εξωτερική δύναμη που δρα πάνω στο σύστημα

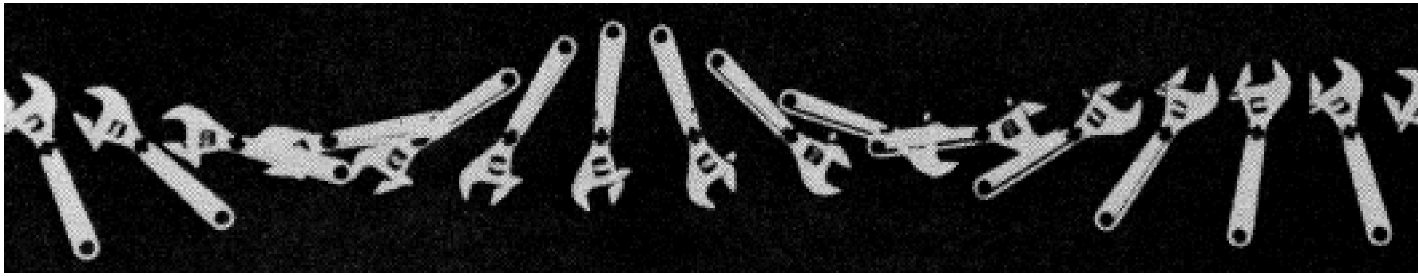
Ορμή συστήματος σωματιδίων

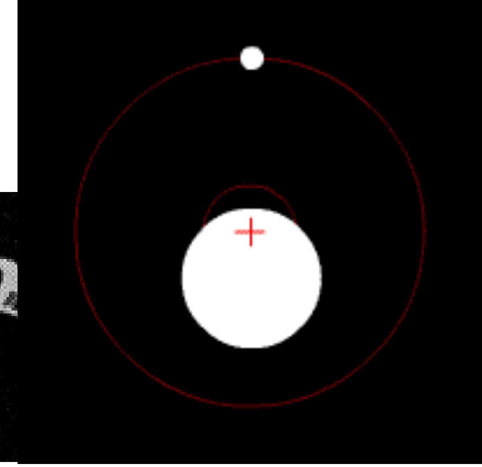
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Κατά τη διάρκεια καταιγίδας ο όγκος της βροχής που πέφτει σε $1\ \mathrm{m}^2$ εδάφους σε μία ώρα ισούται με $0{,}1\ \mathrm{m}^3$. Οι βροχοσταγόνες φτάνουν στο έδαφος με κατακόρυφη ταχύτητα $10\ \mathrm{m/s}$. Πόση είναι η μέση δύναμη ανά μονάδα επιφανείας (δύναμη ανά τετραγωνικό μέτρο) που ασκεί στο έδαφος η πρόσκρουση των βροχοσταγόνων;

ΛΥΣΗ: Μπορούμε να υπλογίσουμε τη δύναμη από το ρυθμό με τον οποίο η βροχή μεταφέρει ορμή στο έδαφος. Η μάζα του νερού που πέφτει σε $1\ \mathrm{m}^2$ σε $1\ \mathrm{hr}$ ισούται με $m = 0{,}1\ \mathrm{m}^3 \times 10^3\ \mathrm{kg/m}^3 = 1 \times 10^2\ \mathrm{kg}$ και η ορμή που συνεισφέρεται από αυτή τη μάζα ισούται με $\Delta P = mv = 1 \times 10^2\ \mathrm{kg} \times 10\ \mathrm{m}/s = 1 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m}/s$. Ο μέσος ρυθμός μεταφοράς ορμής στο έδαφος, δηλαδή η μέση δύναμη, ισούται τότε με

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{1 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m}/s}{3600\ s} = 0{,}3\ \mathrm{N}$$

Κέντρο μάζας





Η θέση του κέντρου μάζας ενός συστήματος είναι η μέση θέση της μάζας του συστήματος

Η επιβατική ακτίνα του κέντρου μάζας είναι η μέση τιμή των επιβατικών ακτίνων όλων των σωματιδίων (για n σωματίδια ίσης μάζας)

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \cdots + \mathbf{r}_n}{n}$$

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots + m_n\mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \qquad \mathbf{r}_{CM} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots + m_n\mathbf{r}_n}{M}$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n)$$

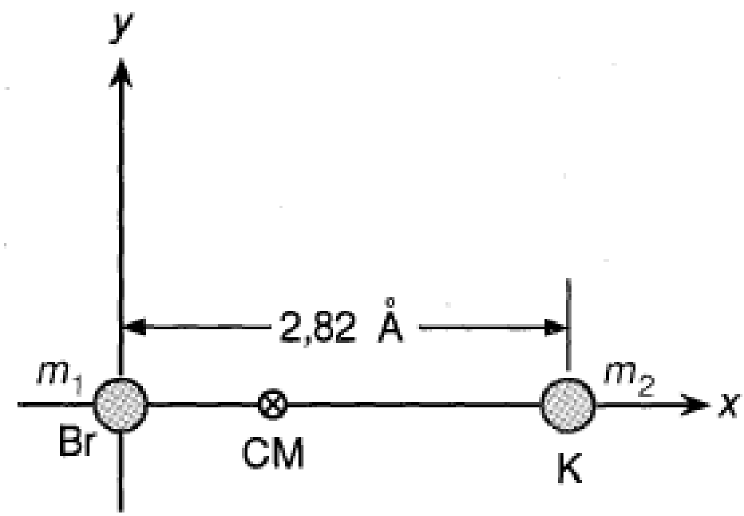
Η επιβατική ακτίνα του κέντρου μάζας είναι η μέση τιμή των επιβατικών ακτίνων όλων των σωματιδίων (για n σωματίδια άνισης μάζας)

$$y_{CM} = \frac{1}{M}(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n)$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}(m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_n z_n)$$

Κέντρο μάζας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Η απόσταση ανάμεσα στα κέντρα των ατόμων του καλίου και του βρωμίου στο μόριο του βρωμιούχου καλίου (KBr) είναι 2,82 Å. Αφού σχεδόν ολόκληρη η μάζα κάθε ατόμου είναι συγκεντρωμένη στον (πολύ μικρό) πυρήνα του, η κατανομή μάζας καθενός ατόμου είναι η κατανομή ενός οιονεί σημειακού σωματιδίου εντοπισμένου στον πυρήνα, στο κέντρο του ατόμου. Να βρεθεί το κέντρο μάζας του μορίου.

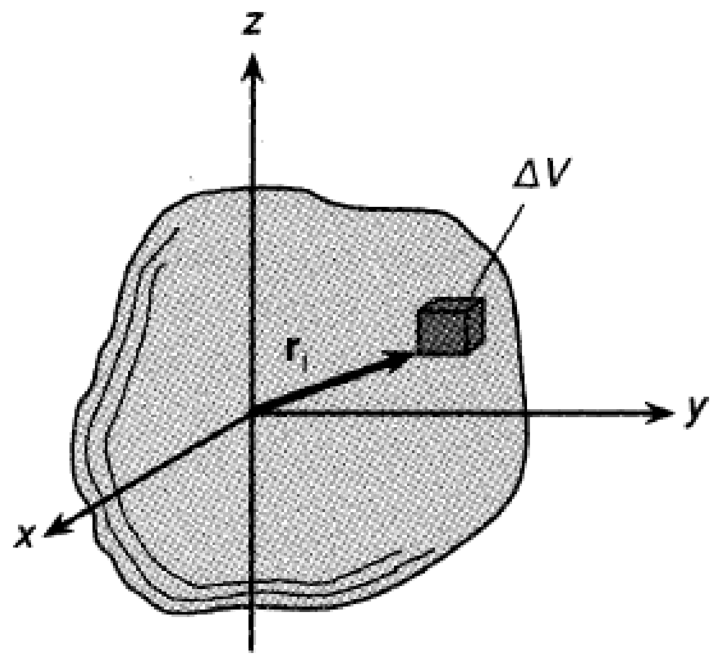


$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{79{,}9 \times 0 + 39{,}1 \times 2{,}82}{79{,}9 + 39{,}1} = 0{,}93\text{A}$$

Κέντρο μάζας

Εάν η μακροσκοπική ύλη έχει ομαλή και συνεχή κατανομή μάζας σε ολόκληρο τον όγκο της η θέση του κέντρου μάζας ισούται κατά προσέγγιση με:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \, \Delta m_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \rho \, \Delta V$$



Στο όριο $\Delta V \to 0$, η προσέγγιση γίνεται ακριβής,

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M} \lim_{\Delta V \to 0} \sum_{i} \mathbf{r}_i \rho \, \Delta V$$

Το όριο γράφεται ως ολοκλήρωμα,

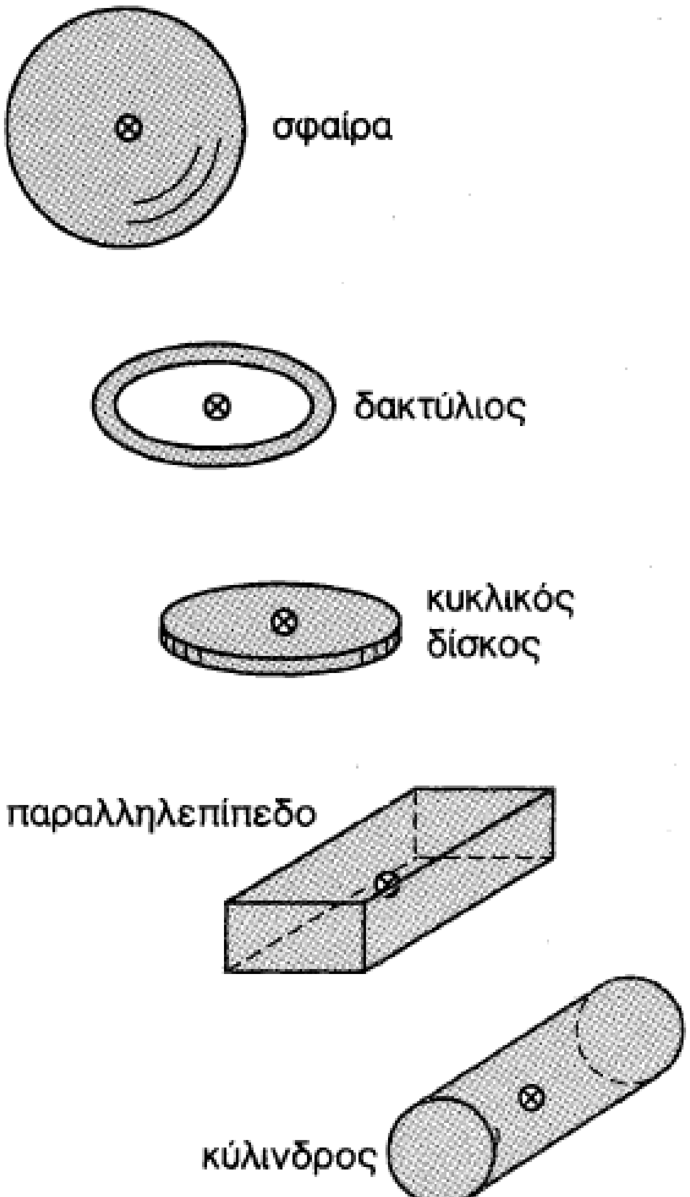
$$\boxed{\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \rho \, dV}$$

Κέντρο μάζας

- Το **κέντρο μάζας** ενός σύνθετου σώματος ή συστήματος σωματιδίων είναι το σημείο όπου, βάσει το δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, η μάζα λειτουργεί σαν να ήταν συγκεντρωμένη

- Η θέση του κέντρου μάζας είναι ένας σταθμισμένος μέσος όρος των θέσεων των επιμέρους σωματιδίων:
  - Για ένα σύστημα διακριτών σωματιδίων, $\vec{r}_{\text{cm}} = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$
  - Για μια συνεχή κατανομή μάζας, $\vec{r}_{\text{cm}} = \dfrac{\int \vec{r}\, dm}{M}$
  - Και στις δύο περιπτώσεις, *M* είναι η συνολική μάζα του συστήματος

Κέντρο μάζας



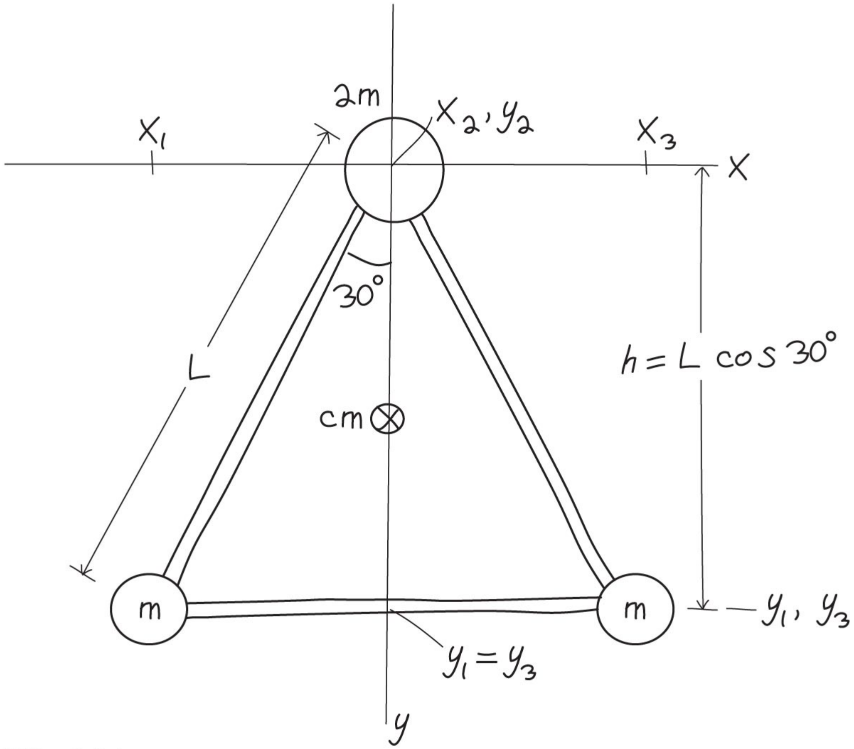
$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\rho\, dV$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\rho\, dV$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\rho\, dV$$

Εύρεση του κέντρου μάζας

Σύστημα τριών σωματιδίων σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο

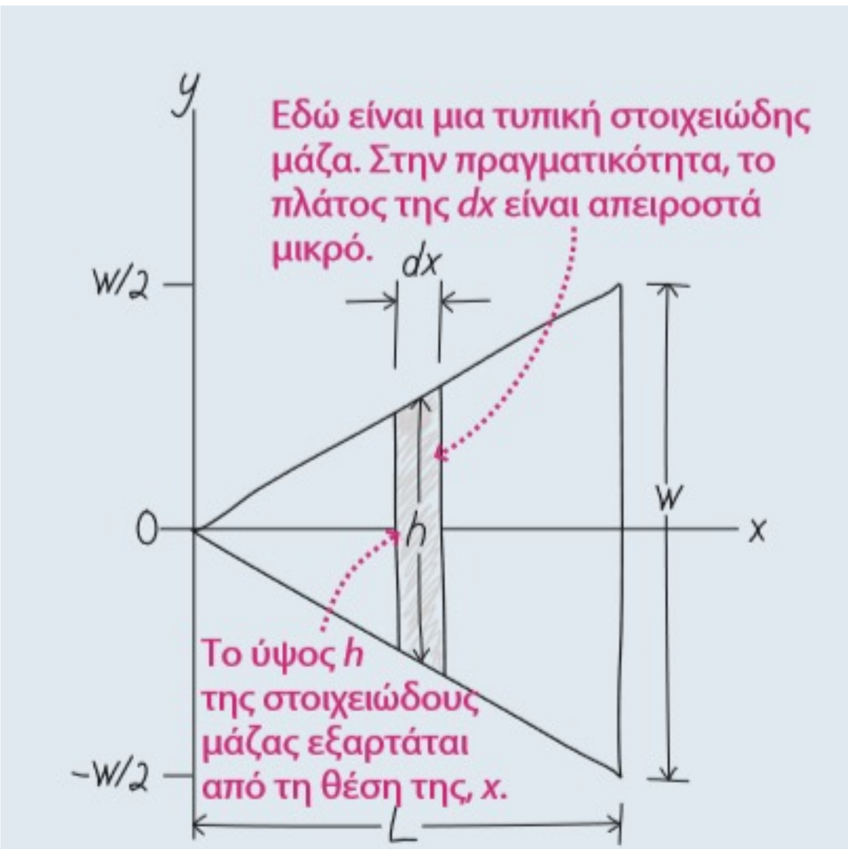


$$x_{cm} = \frac{mx_1 + mx_3}{4m} = \frac{m(x_1 - x_1)}{4m} = 0$$

$$y_{cm} = \frac{my_1 + my_3}{4m} = \frac{2my_1}{4m} = \frac{1}{2}y_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}L = 0{,}43L$$

Εύρεση του κέντρου μάζας

Σύστημα συνεχούς ύλης



- Εκφράζουμε τη στοιχειώδη μάζα *dm* σε όρους της γεωμετρικής μεταβλητής *x*:

$$\frac{dm}{M} = \frac{(w/L)x\ dx}{\frac{1}{2}wL} = \frac{2x\ dx}{L^2}$$

- Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

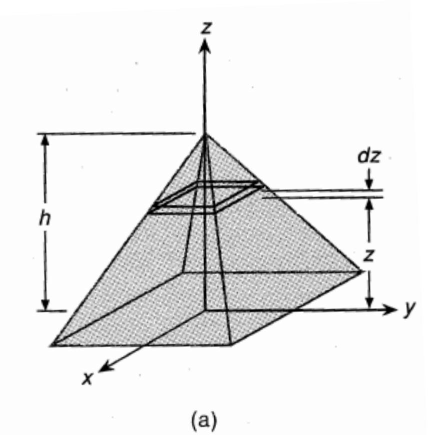
$$x_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{M}\int x\ dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\left(\frac{2Mx}{L^2}dx\right) = \frac{2}{L^2}\int_0^L x^2\ dx$$

επομένως

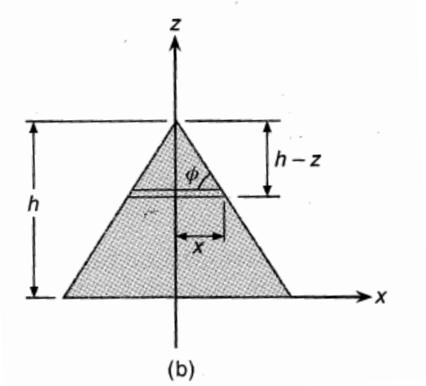
$$x_{\mathrm{cm}} = \frac{2}{L^2}\int_0^L x^2\ dx = \frac{2}{L^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^L = \frac{2L^3}{3L^2} = \frac{2}{3}L$$

Κέντρο μάζας

Η μεγάλη πυραμίδα της Giza έχει ύψος 147m. Βρείτε το κέντρο μάζας της υποθέτοντας ότι είναι συμπαγώς χτισμένη με πέτρα ομοιόμορφης πυκνότητας.



(a)



(b)

Ο στοιχειώδης όγκος dV = (2x) × (2x) dz

και επειδή x = (h-z) / tanφ $\Rightarrow dV = \dfrac{4(h-z)^2}{\tan^2\phi}dz$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\rho dV = \frac{1}{M}\int_0^h 4z\rho\frac{(h-z)^2}{\tan^2\phi}dz = \frac{4\rho}{M\tan^2\phi}\int_0^h z(h-z)^2 dz =$$

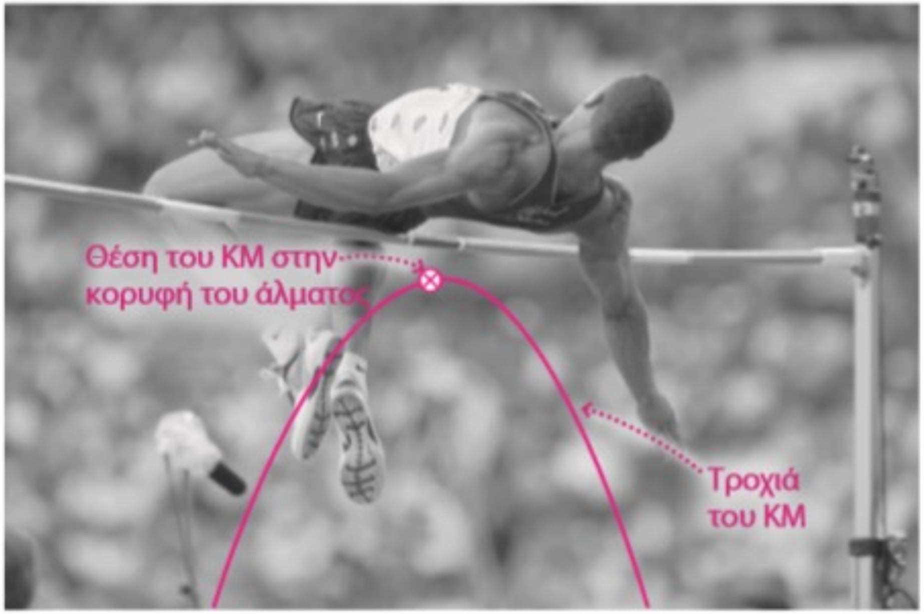
$$\frac{4\rho}{M\tan^2\phi}\int_0^h (zh^2 - 2z^2h + z^3)dz = \frac{4\rho}{M\tan^2\phi}\left[\frac{1}{2}z^2h^2 - \frac{2}{3}z^3h + \frac{1}{4}z^4\right]_0^h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_{CM} = \frac{4\rho}{M\tan^2\phi}\frac{h^4}{12}$$

$$V = \int dV = \int_0^h 4\frac{(h-z)^2}{\tan^2\phi}dz = \frac{4}{\tan^2\phi}\frac{h^3}{3} \quad \Rightarrow z_{CM} = \frac{1}{4}h = 36{,}8m$$

Περισσότερα για το κέντρο μάζας

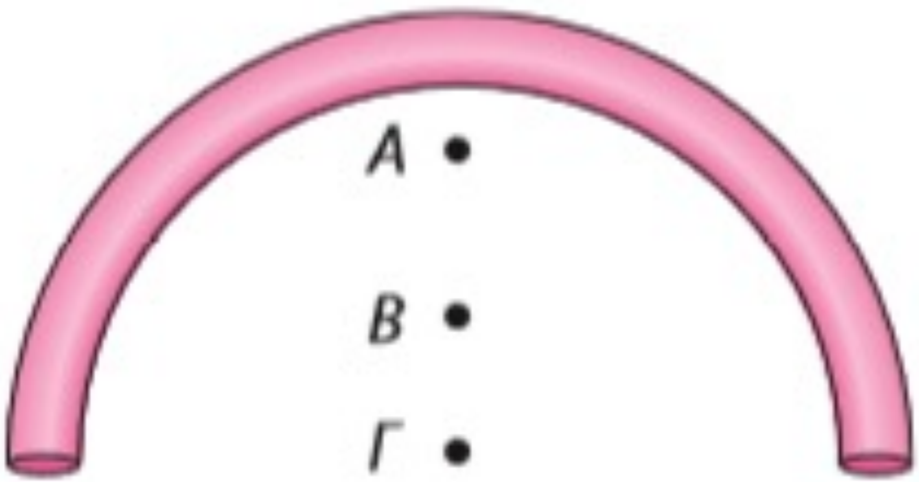
- Το κέντρο μάζας ενός σώματος δεν βρίσκεται απαραίτητα μέσα στο σώμα
- Ένας αθλητής του άλματος εις ύψος περνά τη δοκό, αλλά το κέντρο μάζας του δεν την περνά



- Το κέντρο μάζας του αεροπλάνου βρίσκεται θεωρώντας το φτερό και την άτρακτο ως σημειακά σωματίδια τοποθετημένα στα αντίστοιχα κέντρα μάζας

Το κατανοήσετε;

Το κέντρο μάζας βρίσκεται έξω από το ημικυκλικό σύρμα, αλλά ποιο σημείο είναι;



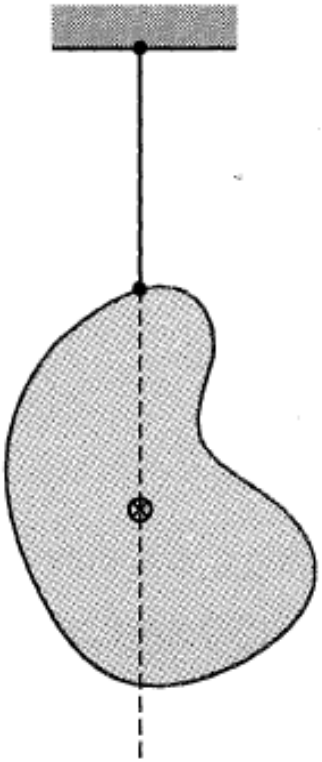
Κέντρο μάζας

Ολική δυναμική ενέργεια για σύστημα σωματιδίων:

$U = (m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n)\, g = Mg z_{CM}$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}(m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_n z_n)$$

Απλή μέθοδος προσδιορισμού του κέντρου μάζας ενός σώματος :



- Διαδοχικές αναρτήσεις από διαφορετικά σημεία και ισορρόπηση που αντιστοιχεί στη μικρότερη δυνατή δυναμική ενέργεια (μηδενική ροπή),
- Τομή των κατακόρυφων αξόνων

Η κίνηση του κέντρου μάζας

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\left(m_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \cdots + m_n\frac{d\mathbf{r}_n}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{M}(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \cdots + m_n\mathbf{v}_n) \longrightarrow m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \cdots + m_n\mathbf{v}_n = M\mathbf{v}_{CM}$$

$$\longrightarrow \boxed{\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{CM}}$$

Ορμή συστήματος σωματιδίων

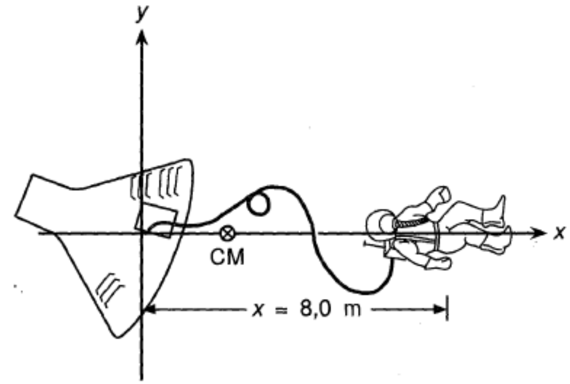
$$\mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\mathbf{v}_{CM}) = M\frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} \longrightarrow \boxed{M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}_{ext}}$$

Εξίσωση κίνησης,

επιτάχυνση του κέντρου μάζας

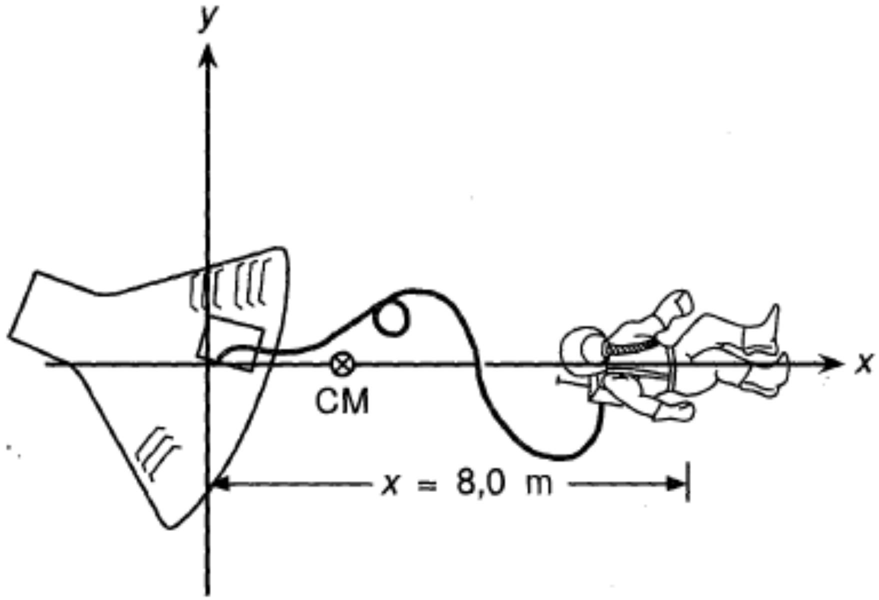
Άρα, δικαιολογείται η προσέγγιση πολλών προβλημάτων, με την αντιμετώπιση υλικών σωμάτων ως σημείων που η θέση τους συμπίπτει με το κέντρο μάζας του αντίστοιχου σώματος

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Κατά τη διάρκεια ενός "διαστημικού περίπατου" ένας αστροναύτης είναι μετέωρος στο διάστημα σε απόσταση 8,0 m από το διαστημόπλοιο Gemini που βρίσκεται σε τροχιά γύρω από τη Γη. Είναι δεμένος στο διαστημόπλοιο με ένα μακρύ σκοινί (ομφάλιο λώρο)· για να επιστρέψει στο διαστημόπλοιο έλκεται προς αυτό τραβώντας προς το μέρος του το σκοινί. Πόσο διάστημα κινείται το διαστημόπλοιο προς αυτόν; Η μάζα του διαστημόπλοιου είναι 3500 kg και η μάζα του αστροναύτη μαζί με τη διαστημική στολή του είναι 140 kg.



ΛΥΣΗ: Ο αστροναύτης και το διαστημόπλοιο εξασκούν ίσες και αντίθετες δυνάμεις μεταξύ τους (μέσω του σκοινιού)· ο αστροναύτης έλκεται προς το διαστημόπλοιο και το διαστημόπλοιο έλκεται προς τον αστροναύτη. Απουσία εξωτερικών δυνάμεων, το κέντρο μάζας του συστήματος αστροναύτη – διαστημοπλοίου παραμένει σε κατάσταση ηρεμίας. Επομένως, τόσο το διαστημόπλοιο όσο και ο αστροναύτης κινούνται προς το κέντρο μάζας και εκεί συναντιούνται.

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \longrightarrow x_{CM} = \frac{0 + 140\,\text{kg} \times 8{,}0\,\text{m}}{3500\,\text{kg} + 140\,\text{kg}} = 0{,}31\,\text{m}$$



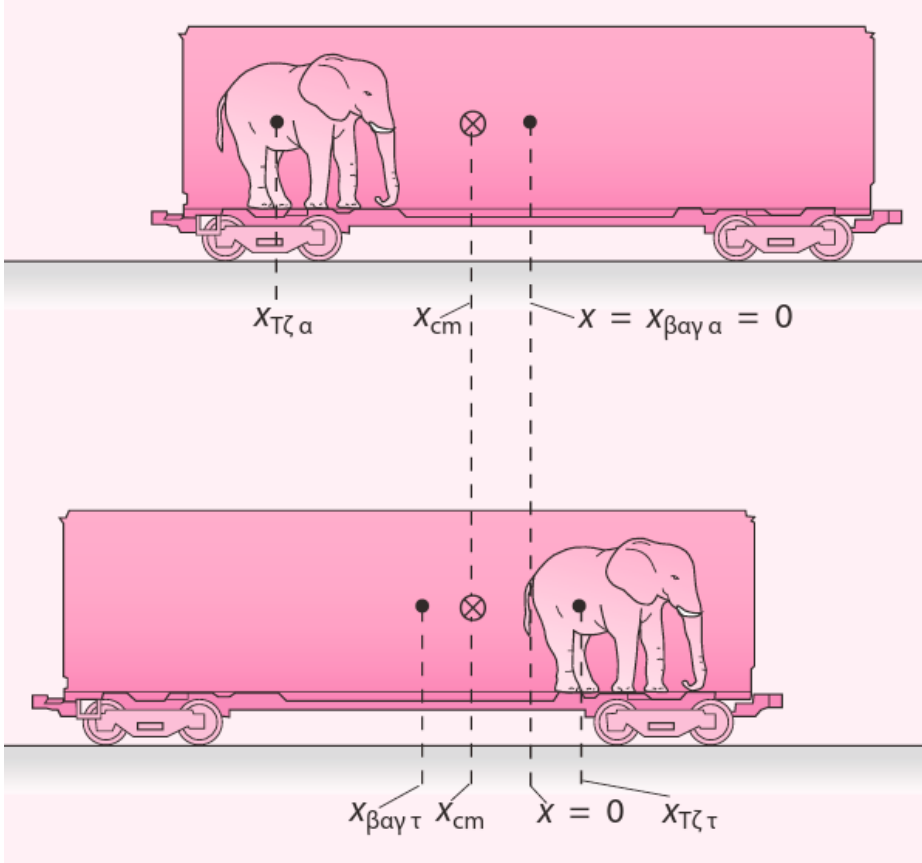
ΣΧΟΛΙΑ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ: Το κρίσιμο συστατικό της λύσης αυτού του παραδείγματος είναι ν' αναγνωρίσουμε ότι αν πρόκειται ποτέ τα δύο σώματα να συναντηθούν, το σημείο της συνάντησης θα είναι το κέντρο μάζας, και ότι το κέντρο μάζας είτε ηρεμεί είτε εκτελεί ομαλή κίνηση, κάθε φορά που δεν εξασκείται εξωτερική δύναμη. Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες αυτές του κέντρου μάζας, μπορούμε να προβλέψουμε ποιό θα είναι το σημείο της συνάντησης, χωρίς να μας απασχολούν οι λεπτομέριες της κίνησης. Ο τρόπος με τον οποίο ο αστροναύτης έλκει τον εαυτό του – γοργά ή αργά – δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα.

Η συνθήκη να βρίσκεται το κέντρο μάζας είτε σε κατάσταση ηρεμίας είτε σε ομαλή κίνηση είναι μαθηματικά ισοδύναμο με το νόμο διατήρησης της ολικής ορμής, πολλές φορές, όμως, μας προσφέρει μία βολικότερη προσέγγιση στη λύση ενός προβλήματος από τη ρητή χρήση του νόμου διατήρησης.

Κίνηση του κέντρου μάζας

- Αν δε υπάρχει κάποια *εξωτερική* δύναμη σε ένα σύστημα, η κίνηση του κέντρου μάζας παραμένει αμετάβλητη. Αν βρίσκεται σε ηρεμία, παραμένει ακίνητο – ανεξάρτητα από τις *εσωτερικές* δυνάμεις που μπορεί να επενεργούν
- Ο Τζάμπο, ένας ελέφαντας 4,8 τόνων, προχωρά 19 m προς το ένα άκρο του βαγονιού, αλλά το κέντρο μάζας του15 τόνων βαγονιού και του ελέφαντα δεν κινείται. Αυτό μας επιτρέπει να βρούμε την τελική θέση του βαγονιού (θέτουμε την αρχική θέση του κέντρου μάζας του βαγονιού στην αρχή των αξόνων), ως εξής

$$x_{\mathrm{cm}\,\tau}=\frac{\mathrm{m}_{\mathrm{T}\zeta}x_{\mathrm{T}\zeta\,\tau}+m_{\beta\alpha\gamma}x_{\beta\alpha\gamma\,\tau}}{M}=\frac{\mathrm{m}_{\mathrm{T}\zeta}(x_{\mathrm{T}\zeta\,\alpha}+19\,\mathrm{m}+x_{\beta\alpha\gamma\,\tau})+m_{\beta\alpha\gamma}x_{\beta\alpha\gamma\,\tau}}{M}$$



- Επιλύοντας για την τελική θέση του βαγονιού:

$$x_{\beta\alpha\gamma\,\tau}=-\frac{(19\,\mathrm{m})\mathrm{m}_{\mathrm{T}\zeta}}{(\mathrm{m}_{\mathrm{T}\zeta}+m_{\beta\alpha\gamma})}=-\frac{(19\,\mathrm{m})(4{,}8\,\mathrm{t})}{(4{,}8\,\mathrm{t}+15\,\mathrm{t})}=-4{,}6\,\mathrm{m}$$

Ενέργεια συστήματος σωματιδίων

Η ολική κινητική ενέργεια ενός συστήματος σωματιδίων ισούται απλώς με το άθροισμα των επί μέρους κινητικών ενεργειών όλων των σωματιδίων

Αποδυκνείεται ότι η ολική κινητική ενέργεια είναι ίση με : $K = K_{\text{int}} + \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2$

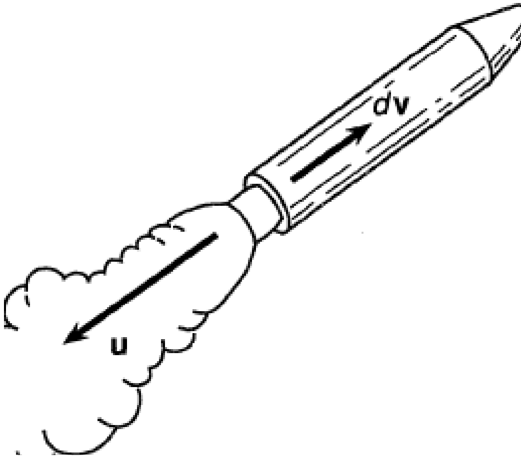
όπου $K_{\text{int}} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 + \cdots + \frac{1}{2} m_n u_n^2$

η εσωτερική κινητική ενέργεια των σωματιδίων του συστήματος

Συνεπώς, η ολική κινητική ενέργεια ενός συστήματος σωματιδίων περιλαμβάνει δύο όρους: τη μεταφορική κινητική ενέργεια $\frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2$ του κέντρου μάζας, υπολογισμένη σαν να ήταν το κέντρο μάζας ένα σωματίδιο μάζας M που έχει ταχύτητα $\mathbf{v}_{\text{CM}}$ και της εσωτερικής κινητικής ενέργειας K_{int}, που ισούται με την κινητική ενέργεια όπως φαίνεται από το σύστημα ΚΜ.

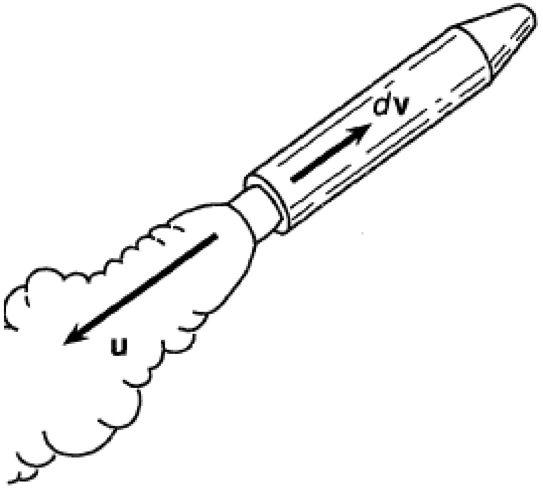
Αν το σύστημα σωματιδίων είναι ένα στερεό σώμα του οποίου τα σωματίδια δεν κινούνται ως προς το κέντρο μάζας (όχι παραμορφώσεις, όχι ταλαντώσεις) τότε $K_{\text{int}}=0$

Η κίνηση των ρουκετών



Για να εξαγάγουμε μιαν απλή εξίσωση κίνησης, ας υποθέσουμε ότι τα σωματίδια του αερίου που εκβάλλονται από τη μηχανή της ρουκέτας έχουν όλα την ίδια ταχύτητα *u* (ως προς τη ρουκέτα) και κινούνται όλα προς την ίδια προς τα πίσω κατεύθυνση. Αυτή η υπόθεση δεν είναι πολύ ρεαλιστική, αφού τα αέρια εξαγωγής στην πραγματικότητα περιέχουν σωματίδια με μια κατανομή ταχυτήτων και, επιπλέον, τα αέρια αυτά έχουν την τάση να απλώνουν εγκαρσίως με αποτέλεσμα τα σωματίδια να έχουν μία κατανομή διευθύνσεων· όμως, η υπόθεση αυτή δεν αποτελεί κακή προσέγγιση εάν ως αριθμητική τιμή της *u* ληφθεί κάποια μέση ταχύτητα εξαγωγής. Ας υποθέσουμε ακόμα ότι δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις, δηλαδή, ότι η ρουκέτα βρίσκεται βαθειά μέσα στον ενδοαστρικό χώρο και δεν υπάρχουν κοντά σώματα που να ασκούν βαρυτικές δυνάμεις. Μπορούμε τότε να χρησιμοποιήσουμε τη διατήρηση της ορμής για να εξαγάγουμε την εξίσωση της κίνησης.

Η κίνηση των ρουκετών



$$\boxed{\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}}}$$

$$M\frac{dv}{dt} + u\frac{dM}{dt} = 0$$

$$M\frac{dv}{dt} = -u\frac{dM}{dt}$$

$$dv = -u\frac{dM}{M}$$

$$\int dv = -u\int\frac{dM}{M}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = -u\int_{M_0}^{M}\frac{dM'}{M'}$$

$$v - v_0 = -u\ln\left(\frac{M}{M_0}\right)$$

$$\boxed{v - v_0 = u\ln\left(\frac{M_0}{M}\right)}$$

Εξίσωση κίνησης ρουκέτας

(για κίνηση στον κενό χώρο, απουσία εξωτερικών δυνάμεων όπως βαρύτητας, τριβών, κτλ., π.χ. ενδοαστρικός χώρος)

Η κίνηση των ρουκετών

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10. Οι μηχανές της ρουκέτας Saturn V που χρησιμοποιήθηκε στις αποστολές του Apollo και του Skylab, καίνε μίγμα κεροσίνης και υγρού οξυγόνου (Σχ. 10.17). Υπό ιδανικές συνθήκες τα αέρια εξαγωγής από την καύση αυτού του μίγματος έχουν ταχύτητα εξαγωγής $3{,}1 \times 10^3$ m/s. Η μάζα της ρουκέτας κατά την απογείωση είναι $2{,}45 \times 10^6$ kg, από τα οποία τα $1{,}70 \times 10^6$ kg αποτελούν το μίγμα της κεροσίνης και του υγρού οξυγόνου. Αν δεν υπήρχε βαρύτητα πόση θα είναι η τελική ταχύτητα της ρουκέτας όταν έχει καεί όλο το καύσιμο;

ΛΥΣΗ: Μετά την καύση του μίγματος η τελική μάζα ισούται με $2{,}45 \times 10^6$ kg $- 1{,}70 \times 10^6$ kg $= 0{,}75 \times 10^6$ kg. Από την Εξ. (51) έχουμε, τότε, με $\upsilon_0 = 0$,

$$\boxed{\upsilon - \upsilon_0 = u \ln\left(\frac{M_0}{M}\right)}$$

$$\upsilon = u \ln\left(\frac{M_0}{M}\right) = (3{,}1 \times 10^3\,\mathrm{m/s})\left[\ln\left(\frac{2{,}45 \times 10^6}{0{,}75 \times 10^6}\right)\right]$$

$$= 3{,}7 \times 10^3\,\mathrm{m/s}$$

Σύνοψη

Ορμή συστήματος σωματιδίων: $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n$

Ρυθμός μεταβολής της ορμής:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}}$$

Διατήρηση ορμής (απουσία εξωτερικών δυνάμεων):

$$\mathbf{P} = [\text{σταθερά}]$$

Κέντρο μάζας: $\mathbf{r}_{\text{CM}} = \dfrac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots + m_n\mathbf{r}_n}{M}$

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\,\rho\, dV$$

Ορμή συστήματος σωματιδίων: $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\text{CM}}$

Κίνηση κέντρου μάζας: $M\mathbf{a}_{\text{CM}} = \mathbf{F}_{\text{ext}}$

Κινητική ενέργεια συστήματος σωματιδίων:

$$K = K_{\text{int}} + \tfrac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2$$

Εξίσωση ρουκέτας: $v - v_0 = u \ln\left(\dfrac{M_0}{M}\right)$

Ερωτήσεις

11. Η έκτη μέθοδος προώθησης, προς τη Σελήνη, του Cyrano de Bergerac ήταν η εξής: "Καθώς κάθομαι σε μια σιδερένια πλάκα, πετάω ένα μαγνήτη στον αέρα – η πλάκα ακολουθεί το μαγνήτη – τον πιάνω – τον ξαναπετάω – και προχωράω με αυτόν τον τρόπο επ' αόριστο". Τί λάθος έχει αυτή η λύση (εκτός από το ότι η δύναμη που εξασκεί ο μαγνήτης είναι πολύ μικρή);

13. Απαντήστε στην ακόλουθη ερώτηση που εστάλη από αναγνώστη του *New York Times*:

Ενας τροχονόμος επιβάλει σ' έναν οδηγό φορτηγού να οδηγήσει το φορτηγό του σ' ένα σταθμό ζύγισης για να ελέγξει αν είναι υπέρβαρο. Καθώς το φορτηγό ανεβαίνει στο ζυγό, ο οδηγός πηδάει κάτω και μ' ένα ρόπαλο αρχίζει να κτυπάει την καρότσα του φορτηγού. Ενας περαστικός τον ρωτάει γιατί κι' ο οδηγός απαντάει: "Εχω μέσα δώ πέντε τόννους καναρίνια. Ξέρω ότι είμαι υπέρβαρος. Αν όμως κατορθώσω να κάνω τα καναρίνια να πετάνε, τότε είμαι εντάξει". Εάν τα καναρίνια πετάνε συνεχώς μέσα στην κλειστή καρότσα θα ζυγίζει πράγματι το φορτηγό λιγότερο απ' ότι όταν τα καναρίνια είναι κουρνιασμένα;

Ερωτήσεις

- Εξήγηση άλματος εις ύψος – Μετατόπιση κέντρου μάζας
- Τυφώνας με 60 Km/hr ασκεί δύναμη σε σπίτι. Πόση δύναμη θα ασκείται στο ίδιο σπίτι από τυφώνα με ταχύτητα 120 Km/hr:
  - Ίδια
  - 2-πλάσια
  - 3-πλάσια
  - 4-πλάσια
- Μια μεταλλική ή μια πλαστική σφαίρα ανατρέπει πιο εύκολα ένα κούτσουρο;

Ασκήσεις

6. Ενα λεοντάρι μάζας 120 kg πηδάει πάνω σ' ένα κυνηγό με οριζόντια ταχύτητα 12 m/s. Ο κυνηγός κρατάει ένα αυτόματο όπλο που βάλλει σφαίρες μάζας 15 g με ταχύτητα κάννης 630 m/s και προσπαθεί να σταματήσει το λεοντάρι στον αέρα. Πόσες βολές θα πρέπει να ρίξει ο κυνηγός πάνω στο λεοντάρι για να σταματήσει την οριζόντια κίνηση του; Υποθέστε ότι οι σφαίρες μένουν μέσα στο λεοντάρι.

$$MV + m(-u) = 0 \Rightarrow m = \frac{-MV}{-u} \Rightarrow$$

$$m = \frac{-120 \times 12}{-630} = 2.286kg \Rightarrow 2286g / 15g = 150$$

Ασκήσεις

**18. Ενα πολυβόλο στερεωμένο πάνω σε αμαξάκι βάλλει σφαίρες μάζας m προς τα πίσω με οριζόντια ταχύτητα κάννης u. Η αρχική μάζα της άμαξας, περιλαμβανομένης της μάζας του πολυβόλου και των πυρομαχικών, είναι M και η αρχική ταχύτητα της άμαξας είναι μηδέν. Πόση είναι η ταχύτητα της άμαξας όταν το πολυβόλο έχει ρίξει n σφαίρες; Υποθέστε ότι το αμαξάκι κινείται χωρίς τριβές και αμελήστε τη μάζα της πυρίτιδας.

$$(M-m)u_1 - mu = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{mu}{M-m}$$

$$(M-2m)u_2 - mu = 0 \Rightarrow u_2 = \frac{mu}{M-2m}$$

$$(M-3m)u_3 - mu = 0 \Rightarrow u_3 = \frac{mu}{M-3m}$$

$$u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = mu\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{M-km}$$

Ασκήσεις

*22. Για να ζυγοσταθμίσει τον τροχό ενός αυτοκινήτου, ένας μηχανικός προσαρμόζει ένα κομμάτι κράματος μολύβδου στην περιφέρεια της ζάντας του τροχού. Ο μηχανικός βρίσκει ότι εάν προσαρμόσει ένα κομμάτι 40 g σε απόσταση 20 cm από το κέντρο του τροχού μάζας 30 kg, ο τροχός είναι τέλεια ζυγοσταθμισμένος, δηλαδή, το κέντρο του τροχού συμπίπτει με το κέντρο μάζας. Σε ποιά απόσταση από το κέντρο του τροχού βρισκόταν το κέντρο μάζας, προτού ο μηχανικός ζυγοσταθμίσει τον τροχό;

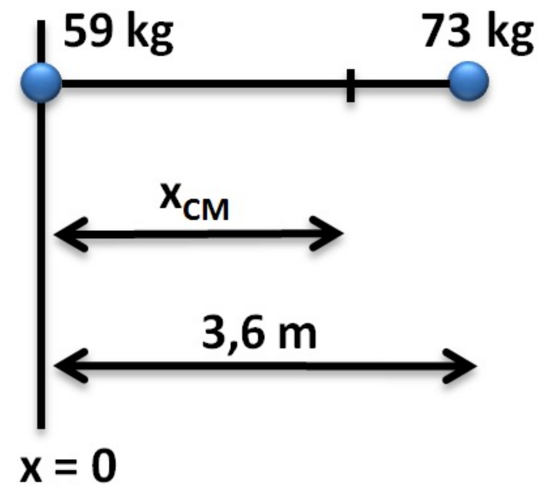
Αφού το κέντρο μάζας μετά τη ζυγοστάθμιση είναι το κέντρο του τροχού με συντεγμένες (0,0), τότε ισχύει :

$$x_{CM} = \frac{m_{wheel}x_{wheel} + m_{lead}x_{lead}}{m_{wheel} + m_{lead}} \Rightarrow 0 = \frac{30 \times x_{wheel} + 0{,}040 \times 0{,}20}{30 + 0{,}040} \Rightarrow x_{wheel} = -2{,}7 \times 10^{-4}\, m$$

Ασκήσεις

20. Μία γυναίκα 59 kg και ένας άνδρας 73 kg κάθονται σε μία τραμπάλα, μήκους 3,6 m. Πού είναι το κέντρο μάζας; Αμελήστε τη μάζα της τραμπάλας.

$$X_m = \frac{59*0+73*3.6}{59+73} \Rightarrow x_{CM} = 2\ \text{m}$$



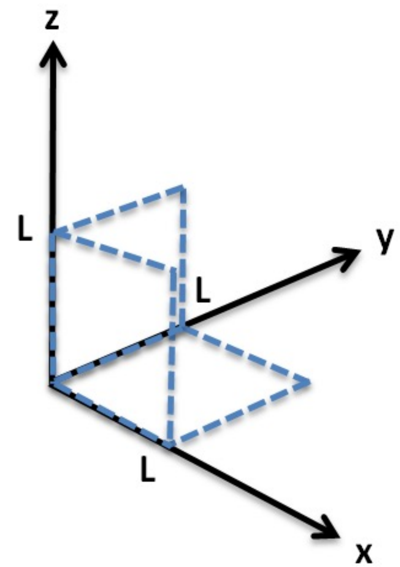
Ασκήσεις

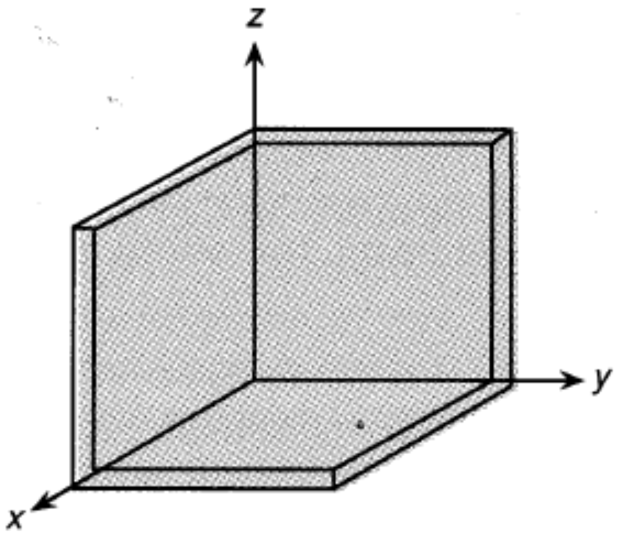
*28. Τρία ομοιόμορφα τετράγωνα κομμάτια λαμαρίνας ενώνονται κατά μήκος των ακμών τους έτσι, ώστε να σχηματίζουν τρεις από τις έδρες ενός κύβου (Σχ. 10.24). Οι διαστάσεις των τετραγώνων είναι $L \times L$. Πού βρίσκεται το κέντρο μάζας των ενωμένων τετραγώνων;

$$X_{CM} = \frac{m\frac{L}{2}+m\frac{L}{2}+m*0}{m+m+m} = \frac{L}{3}$$

$$y_{CM} = \frac{m*0+m\frac{L}{2}+m\frac{L}{2}}{m+m+m} = \frac{L}{3}$$

$$z_{CM} = \frac{m\frac{L}{2}+m*0+m\frac{L}{2}}{m+m+m} = \frac{L}{3}$$

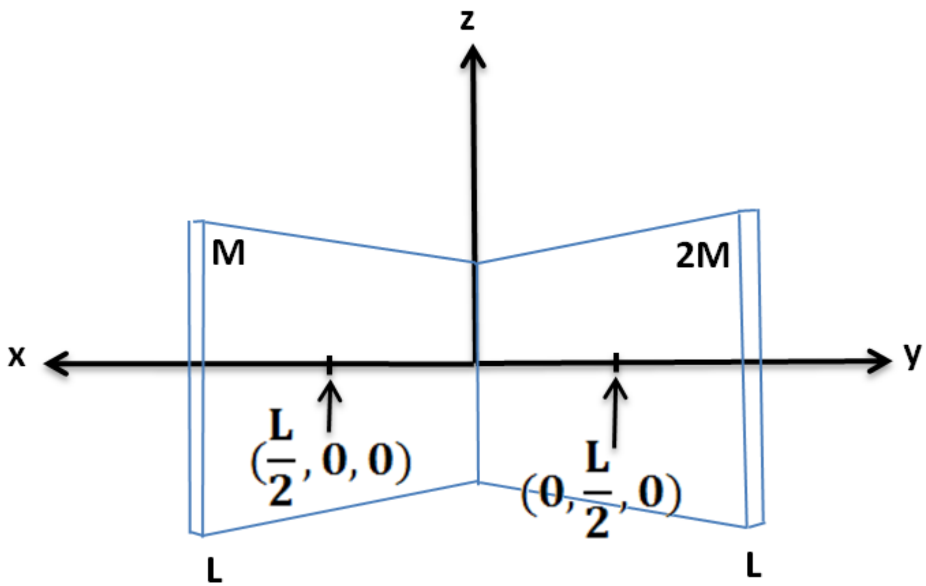




(Πιο γενικευμένα: $r_{CM} = \frac{m\left(\frac{L}{2},\frac{L}{2},0\right)+m\left(\frac{L}{2},0,\frac{L}{2}\right)+m\left(0,\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right)}{3m} = \frac{(L,L,L)}{3} = (\frac{L}{3},\frac{L}{3},\frac{L}{3})$)

Ασκήσεις

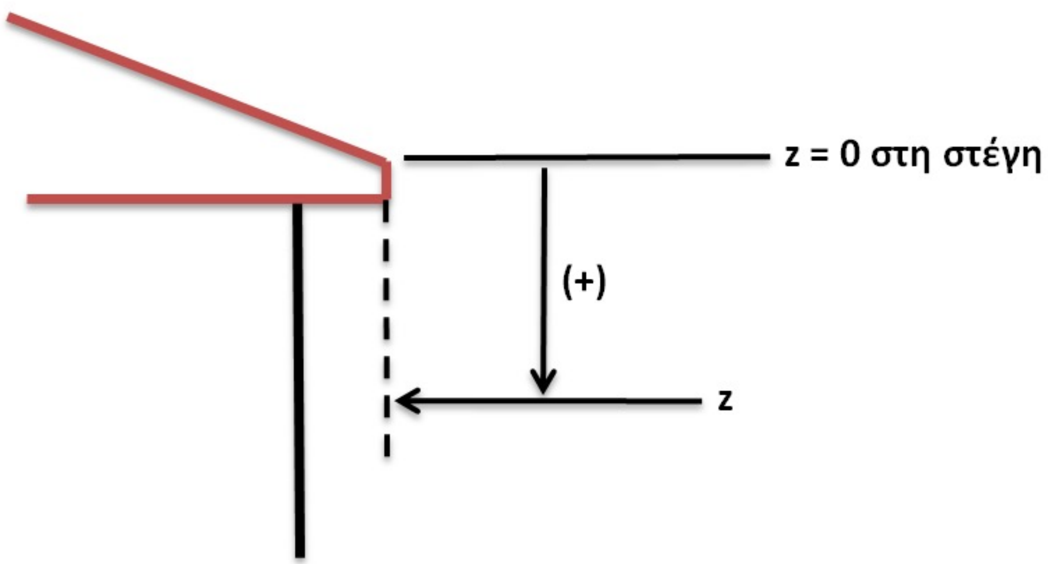
*29. Δύο ομογενή τετράγωνα λαμαρίνας διαστάσεων $L \times L$ ενώνονται υπό ορθή γωνία κατά μήκος μίας ακμής (Σχ. 10.25). Το ένα από τα τετράγωνα έχει διπλάσια μάζα από το άλλο. Βρείτε το κέντρο μάζας του συνδυασμού.



$$r_{CM} = \frac{M\left(\frac{L}{2},0,0\right)+2M\,(0,\frac{L}{2},0)}{3M} = (\frac{L}{6}, \frac{L}{3}, 0)$$

Ασκήσεις

**34. Υποθέστε ότι από ένα σημείο στην άκρη μιας στέγης στάζουν σταγόνες νερού με σταθερό ρυθμό. Το χρονικό διάστημα μεταξύ μιας σταγόνας και της επομένης της είναι ίσο με Δt. Η στέγη έχει απόσταση l από το έδαφος. Εάν το Δt είναι πολύ μικρό (έτσι, ώστε ο αριθμός των σταγόνων που βρίσκονται στον αέρα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή να είναι πολύ μεγάλος) δείξτε ότι το κέντρο μάζας των σταγόνων που πέφτουν βρίσκεται σε ύψος $\frac{2}{3}l$ από το έδαφος. Από αυτό, να αποδείξετε ότι η χρονική μέση τιμή του ύψους ενός βλήματος που εκτοξεύεται από το έδαφος και επιστρέφει στο έδαφος ισούται με τα $\frac{2}{3}$ του μέγιστου ύψους του. (Το θεώρημα αυτό είναι χρήσιμο στον υπολογισμό της μέσης τιμής της ατμοσφαιρικής πίεσης και της αντίστασης του αέρα που συναντάει το βλήμα).

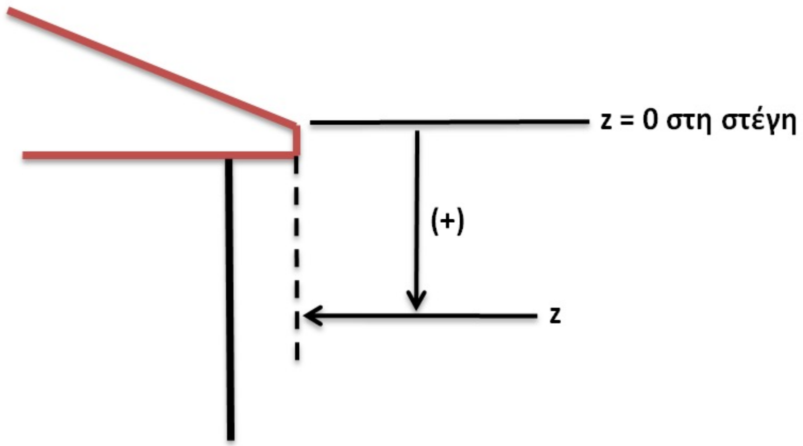


z = 0 στη στέγη

z (+) προς τα κάτω

Μετά από χρόνο t η σταγόνα είναι στη θέση $z = \frac{1}{2} g t^2$ (1)

Το νερό πέφτει με σταθ. ρυθμό έτσι ώστε σε κάθε ύψος z' το νερό να περνά με το ρυθμό που πέφτει από τη στέγη.



λ(z) η μάζα του νερού/μονάδα μήκους στο μήκος z

$\lambda(z) * u$ $\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}} * \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\right)$ ο ρυθμός που πέφτει το νερό

$\lambda(z) * u = k =$ σταθερός $\Rightarrow \lambda(z) = \frac{k}{u} = \frac{k}{dz/dt}$ (2)

$\lambda(z) = \frac{k}{z^{1/2}\sqrt{2g^3}} = c\, z^{-1/2}$ (c: σταθερά)

(1) $\frac{dz}{dt} = gt$

(1) $t = \sqrt{2gz}$

$\longrightarrow \frac{dz}{dt} = g\sqrt{2gz} = \sqrt{2g^3}\; z^{1/2}$

$$Z_{CM} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} = \frac{\int_0^l \lambda(z)\, z\, dz}{\int_0^l \lambda(z)\, dz} = \frac{c\int_0^l z\left(z^{-1/2}\right)dz}{c\int_0^l z^{-1/2}\, dz} = \frac{\frac{2}{3}\, z^{3/2} \;\; \mathrm{I}_0^l}{\frac{1}{2}\, z^{1/2} \;\; \mathrm{I}_0^l} = \frac{1}{3}\, l$$ από την οροφή

ή 2/3 l από το έδαφος

Ασκήσεις

*44. Ενα φορτηγό 6000 kg είναι σταματημένο στο κατάστρωμα ενός φέρυ–μποτ 8000 kg, κοντά στην πλώρη. Εάν το φορτηγό κινηθεί κατά 15 m προς την πρύμνη, κατά πόσο θα κινηθεί προς τα μπρος το φέρυ ως προς το νερό; Προσποιηθείτε ότι το νερό δεν έχει καμιά επίδραση στην κίνηση.

Επειδή $\Sigma F_{ext} = 0$, $\Delta p = 0$ => $\Delta P_{ferry} = \Delta P_{truck}$ => $m_{ferry} \frac{\Delta x_{ferry}}{\Delta t} = m_{truck} \frac{\Delta x_{truck}}{\Delta t}$

Ενώ το φορτηγό κινείται 15 m σε σχέση με το φέρρυ,

κινείται κατά $(15 – \Delta x_{ferry})$ σε σχέση με το νερό

=> $m_f \Delta x_f = m_t (15 – \Delta x_f)$

=> $8000 * \Delta x_f = 6000 * (15 – \Delta x_{ferry})$

=> $8000 \Delta x_f + 6000 \Delta x_f = 90000$

=> $14000 \Delta x_f = 90000$

=> $\Delta x_f = 6.4$ m

Ασκήσεις

53. Εάν μία ρουκέτα, που αρχικά ηρεμεί, πρόκειται να επιτύχει τελική ταχύτητα με μέτρο ίσο με την ταχύτητα εξαγωγής των αερίων, ποιό ποσοστό της αρχικής μάζας πρέπει να είναι καύσιμο;

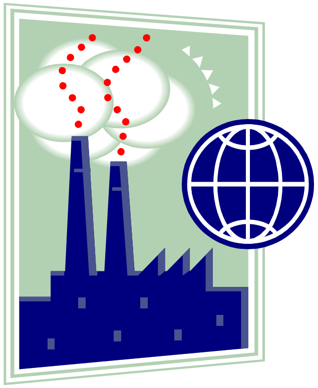
$$\upsilon - \upsilon_0 = u \ln\left(\frac{M_0}{M}\right) \Rightarrow (\upsilon = u, \upsilon_0 = 0) \Rightarrow u = u \ln\left(\frac{M_0}{M}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{M_0}{M}\right) = 1 \Rightarrow M_0 = eM$$

Η διαφορά μεταξύ αυτών των 2 μαζών είναι το καταναλωθέν καύσιμο

$$M_0 - M = eM - M = M(e-1)$$

Επομένως το κλάσμα της μάζας που είναι καύσιμο είναι

$$= \frac{M(e-1)}{M_0} = \frac{M(e-1)}{eM} = \frac{e-1}{e} = 1 - \frac{1}{e} = 0{,}63$$



Συγκρούσεις

Συγκρούσεις

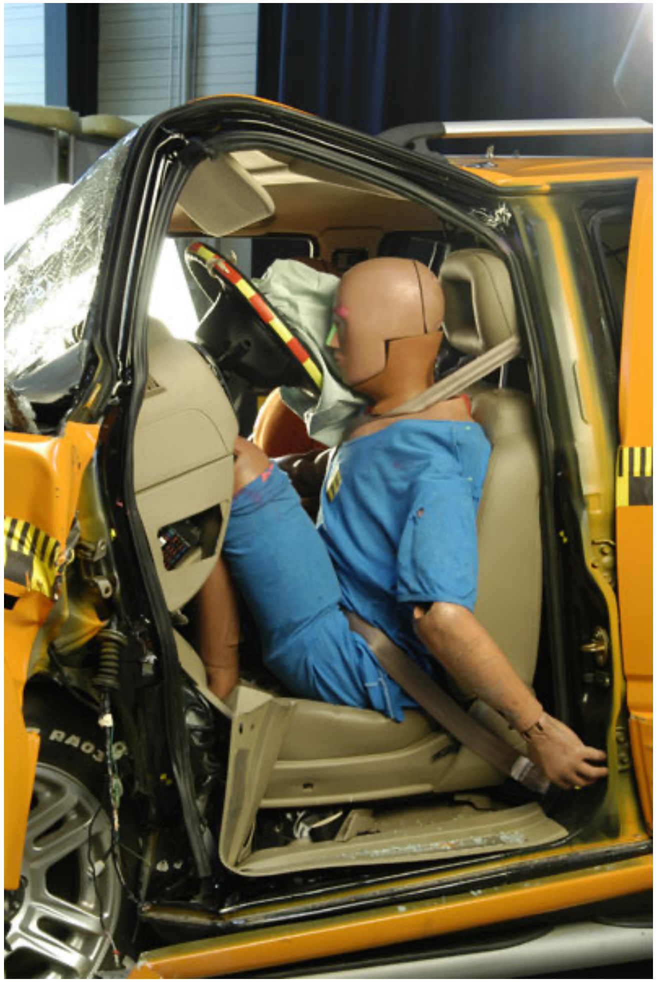
Στις συγκρούσεις μεταξύ δύο σωμάτων (αυτοκίνητο-τοίχος, νετρονίου-πυρήνα, κτλ.) έχουμε :

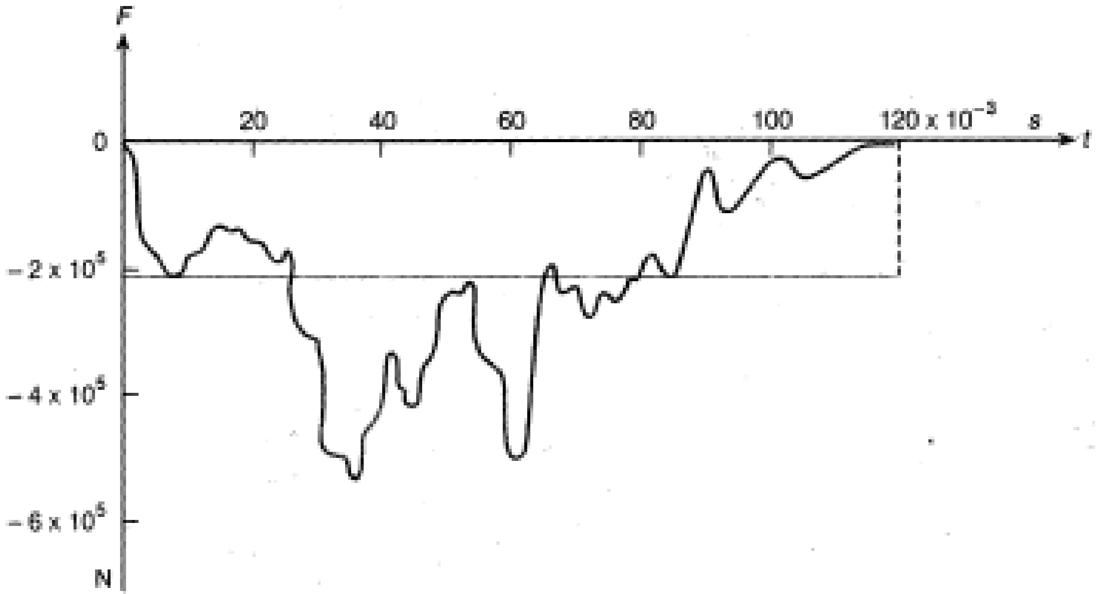
- Απότομες αλλαγές της κίνησης
- Μικρή χρονική διάρκεια
- Ανάπτυξη πολύ ισχυρών δυνάμεων

Σημαντικό διαγνωστικό εργαλείο για την κατανόηση των ιδιοτήτων και της δομής στοιχειωδών σωματιδίων

Ωστικές δυνάμεις

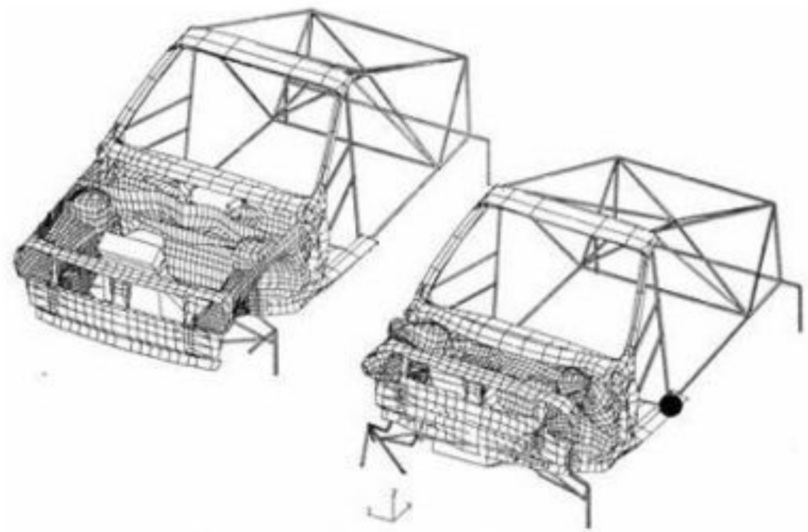
Η δύναμη μεταξύ δύο συγκρουόμενων σωμάτων που διαρκεί **περιορισμένο χρόνο** και προκαλεί σύντομη αλλά **ισχυρή ώθηση** ονομάζεται **ωστική δύναμη**.



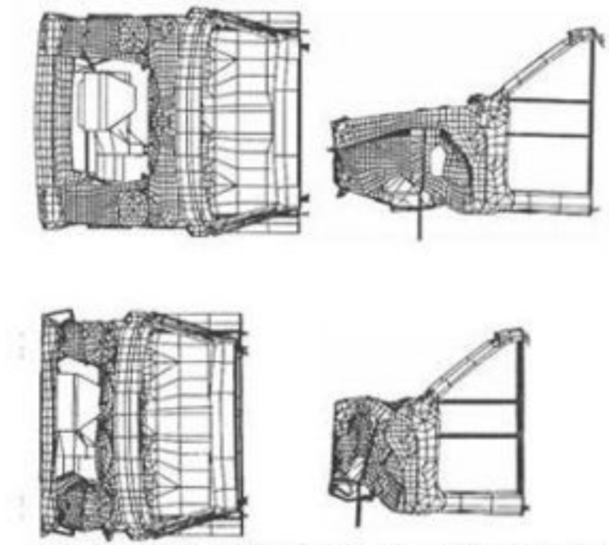


Σχήμα. Χρονική μεταβολή της δύναμης που ασκείται σε αυτοκίνητο κατά τη διάρκεια ενός crash-test αυτοκινήτου με συνολική διάρκεια σύγκρουσης 0,120 sec.

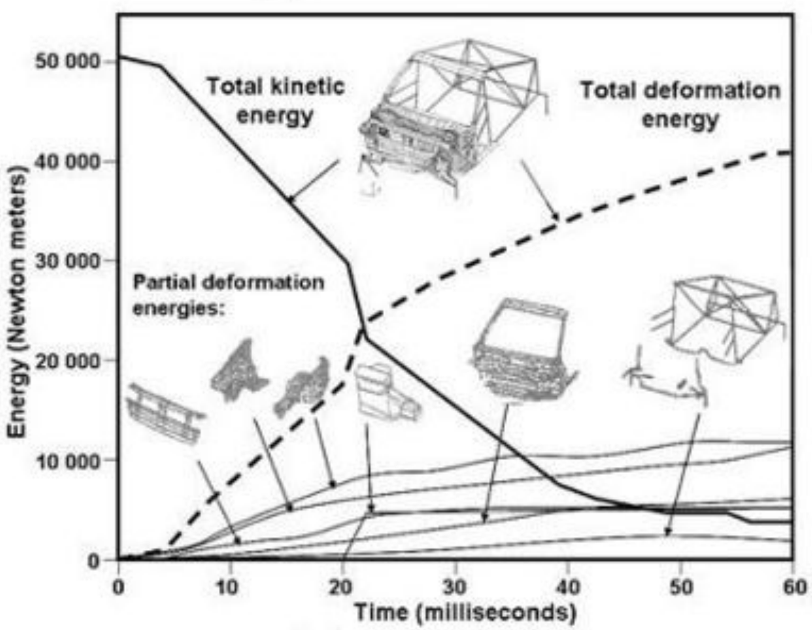
Γραφικά από crash tests



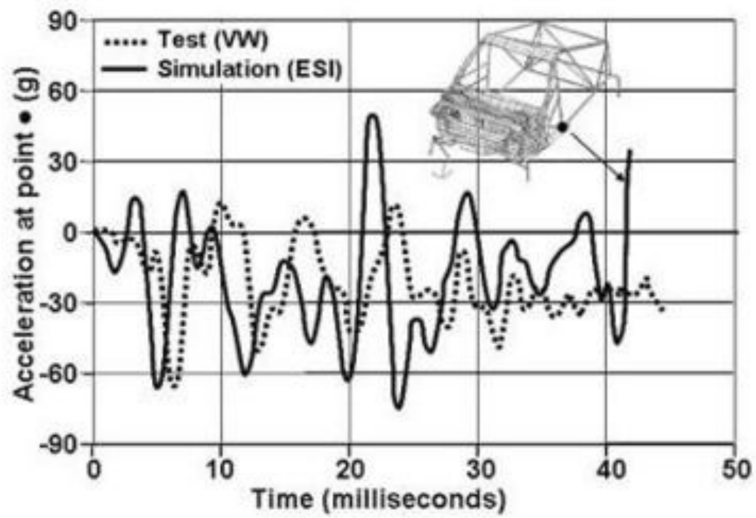
(a) crash simulation



(b) top and side views of simulation

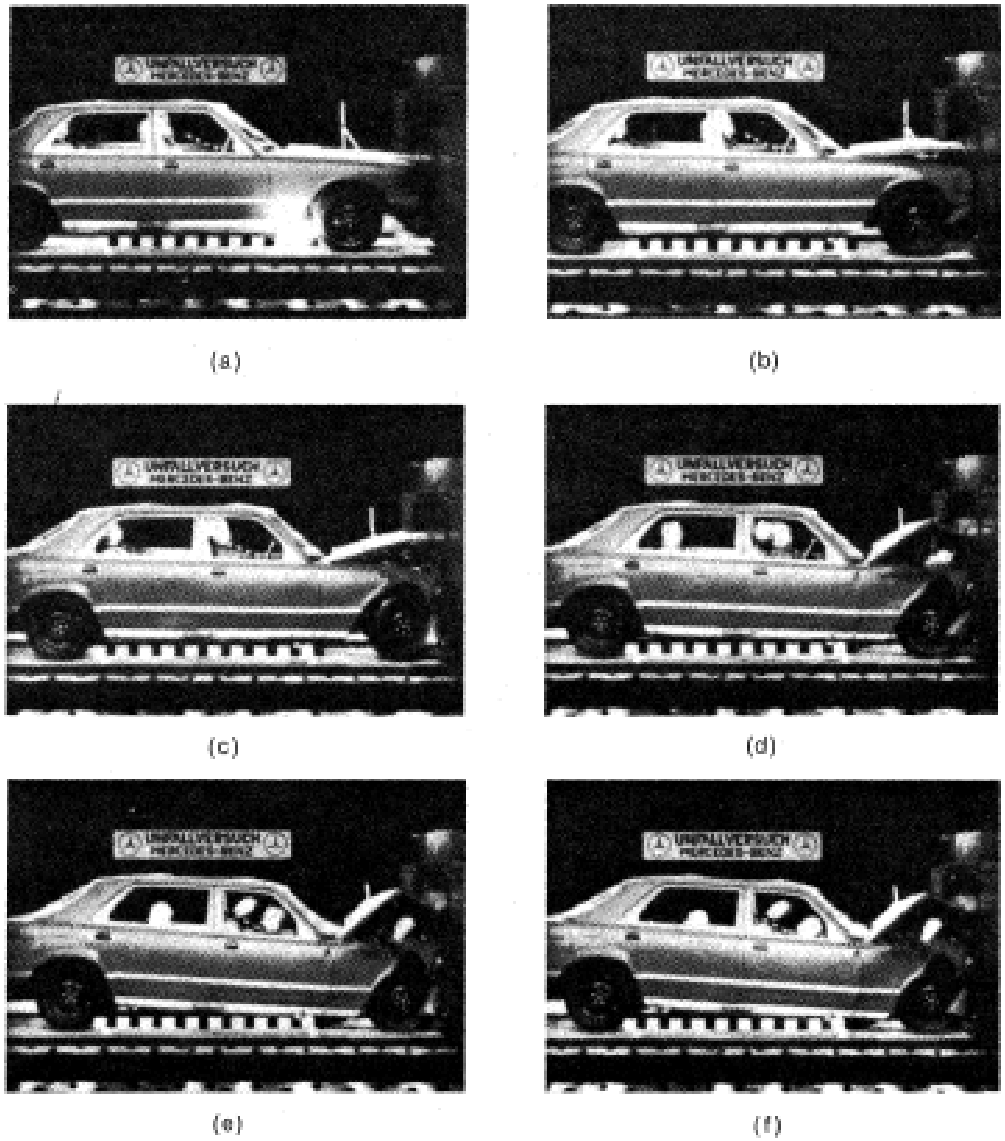


(c) energy balance



(d) acceleration at point in cabin

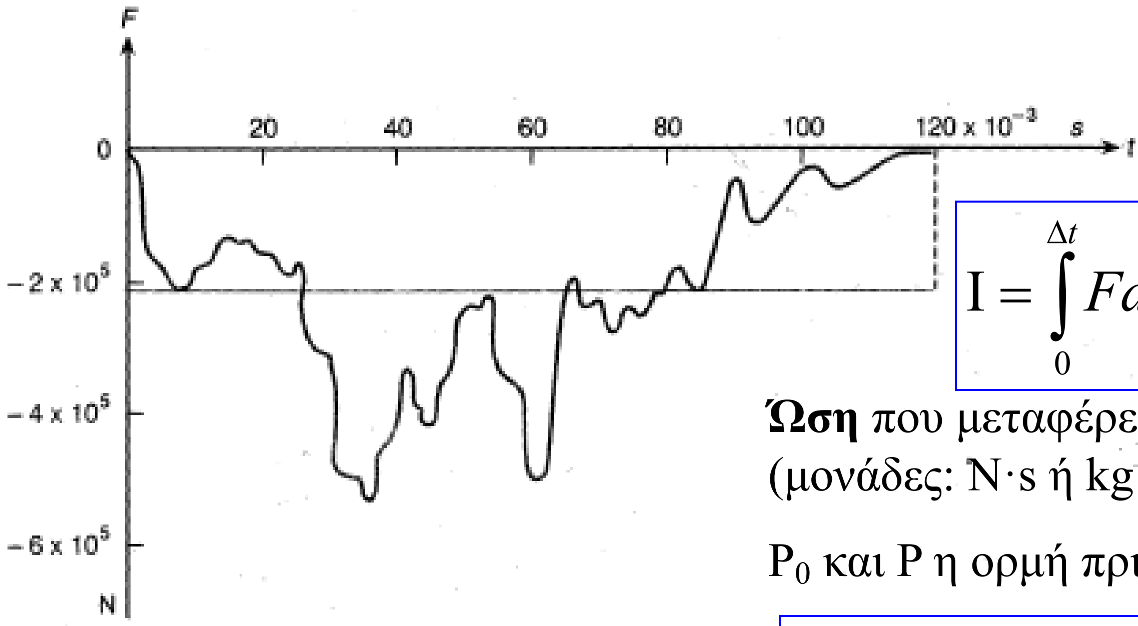
Ωστικές δυνάμεις



Σχήμα. Crash-test ενός αυτοκινήτου. Χρόνος σύγκρουσης 0,120 sec

Ωστικές δυνάμεις

Η δύναμη μεταξύ δύο συγκρουόμενων σωμάτων που διαρκεί περιορισμένο χρόνο και προκαλεί σύντομη αλλά ισχυρή ώθηση ονομάζεται **ωστική δύναμη**.



$$\mathrm{I} = \int_0^{\Delta t} F dt = \int_0^{\Delta t} \frac{d\mathrm{p}}{dt} dt = \int d\mathrm{p} = \mathrm{p} - \mathrm{p}_0$$

Ώση που μεταφέρεται από μια δύναμη F στο σώμα (μονάδες: N·s ή kg·m/s)

P_0 και P η ορμή πριν και μετά τη σύγκρουση αντίστοιχα

$$\overline{\mathrm{F}} = \frac{1}{\Delta \mathrm{t}} \int_0^{\Delta t} F dt = \frac{1}{\Delta t}(p - p_0)$$

Μέση δύναμη

Σχήμα. Χρονική μεταβολή της δύναμης που ασκείται σε αυτοκίνητο κατά τη διάρκεια ενός crash-test αυτοκινήτου με συνολική διάρκεια σύγκρουσης 0,120 sec.

Ωστικές δυνάμεις

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Η σύγκρουση μεταξύ του αυτοκινήτου και του τοίχου που φαίνεται στο Σχ. 11.1 έχει διάρκεια 0,120 s. Η μάζα του αυτοκινήτου ισούται με 1700 kg και οι αρχικές και τελικές ταχύτητες είναι $v = 13{,}6$ m/s και $v' = -1{,}3$ m/s αντιστοίχως. Υπολογίστε την ώση και τη χρονική μέση τιμή της δύναμης από αυτά τα δεδομένα.

ΛΥΣΗ: Με τον άξονα x κατά μήκος της φοράς της αρχικής κίνησης, η μεταβολή της ορμής είναι

$$p'_x - p_x = mv' - mv$$

$$= 1700\ \mathrm{kg} \times (-1{,}3\ \mathrm{m/s}) - 1700\ \mathrm{kg} \times 13{,}6\ \mathrm{m/s}$$

$$= -2{,}53 \times 10^4\ \mathrm{kg \cdot m/s}$$

Επομένως η ώση ισούται με $I_x = -2{,}53 \times 10^4$ kg · m/s και η χρονική μέση τιμή της δύναμης ισούται με

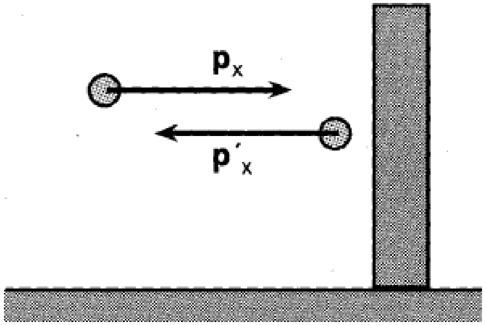
$$\overline{F}_x = \frac{1}{\Delta t}\,(p'_x - p_x) = \frac{-2{,}53 \times 10^4\ \mathrm{kg \cdot m/s}}{0{,}120\ \mathrm{s}}$$

$$= -2{,}11 \times 10^5\ \mathrm{N}$$

Ελαστική κρούση

(κρούση με μηδενική διαφορά κινητικής ενέργειας πριν και μετά)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Μία "superball", μπάλα κατασκευασμένη από συνθετικό καουτσούκ, πετάγεται πάνω σ' ένα σκληρό, λείο τοίχο. Η μπάλα κτυπάει τον τοίχο καθέτως με ταχύτητα υ. Υποθέστε ότι η σύγκρουση είναι ελαστική και βρείτε την ταχύτητα της μπάλας μετά τη σύγκρουση.



$\Delta_{κιν} = 0$

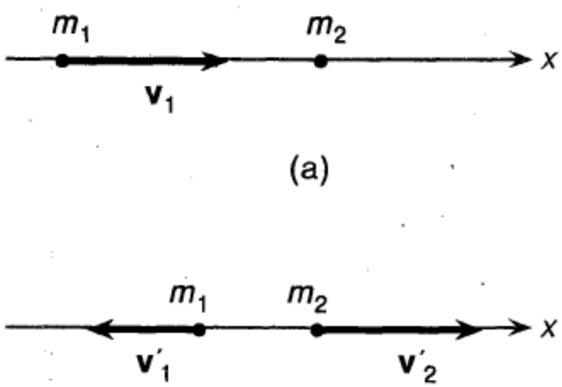
αλλά $\Delta_{ορμής} = m\upsilon - (-m\upsilon) = 2m\upsilon \neq 0$

Σημ. 1 Αν και δεν μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια, μεταβάλλεται η ορμή

Σημ. 2 Και ο τοίχος υφίσταται ίση και αντίθετη μεταβολή ορμής αλλά λόγω πολύ μεγαλύτερης μάζας αυτή δεν είναι αισθητή (επειδή εκφράζεται ως ταχύτητα τοίχου)

Συγκρούσεις σε μια διάσταση

(ελαστική μονοδιάστατη κρούση)



(a) (b)

Από τη διατήρηση της ορμής έχουμε

$$m_1 \upsilon_1 = m_1 \upsilon'_1 + m_2 \upsilon'_2$$

και από τη διατήρηση της ενέργειας

$$\frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2'^2$$

Λύσεις :

$$\upsilon'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,\upsilon_1$$

$$\upsilon'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\,\upsilon_1$$

- για $m_1 = m_2 \rightarrow \upsilon'_1 = 0,\ \upsilon'_2 = \upsilon_1$
- για $m_2 >> m_1 \rightarrow \upsilon'_1 = -\upsilon_1,\ \upsilon'_2 = 0$
- για $m_1 >> m_2 \rightarrow \upsilon'_1 = \upsilon_1,\ \upsilon'_2 = 2\upsilon_1$

(η m_2 πλησιάζει με ταχύτητα $-\upsilon_1$ και αναπηδά με ταχύτητα $+\upsilon_1$)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Στο εσωτερικό ενός πυρηνικού αντιδραστήρα που περιέχει καύσιμο ουρανίου, οι αντιδράσεις σχάσης παράγουν άφθονη ροή ταχέων νετρονίων με ταχύτητα 2×10^7 m/s περίπου. Αυτά τα νετρόνια χρησιμοποιούνται για να προκαλέσουν ακόμα περισσότερες αντιδράσεις σχάσης. Προτού όμως χρησιμοποιηθούν, πρέπει να επιβραδυνθούν σε πολύ χαμηλότερες ταχύτητες. Η επιβράδυνση επιτυγχάνεται με συγκρούσεις: το καύσιμο ουρανίου στον αντιδραστήρα περιβάλλεται από

νερό ή από γραφίτη και τα νετρόνια χάνουν την κινητική τους ενέργεια σε συγκρούσεις με τους πυρήνες αυτών των υλικών. Κατά ποιό συντελεστή η ταχύτητα ενός νετρονίου μειώνεται σε μία μετωπική σύγκρουση με ένα στάσιμο πυρήνα άνθρακα; Με ένα πυρήνα υδρογόνου; Οι μάζες του νετρονίου, του πυρήνα του άνθρακα και του πυρήνα του υδρογόνου είναι ίσες με 1,0087 u, 11,9934 u και 1,0073 u, αντιστοίχως.

ΛΥΣΗ: Η τελική ταχύτητα του νετρονίου δίνεται από την Εξ. (11):

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_1$$

Για τη σύγκρουση με τον άνθρακα, αντικαθιστούμε τις προσεγγιστικές τιμές $m_1 = 1{,}01$ u για τη μάζα του νετρονίου και $m_2 = 12{,}00$ u για τη μάζα του πυρήνα του άνθρακα:

$$v_1' = \frac{1{,}01 - 12{,}00}{1{,}01 + 12{,}00}\, v_1 = -0{,}84\, v_1$$

Για τη σύγκρουση με το πρωτόνιο χρειάζεται ν' αντικαταστήσουμε ακριβέστερες τιμές των μαζών· με $m_1 = 1{,}0087$ u για τη μάζα του νετρονίου και $m_2 = 1{,}0073$ u για τη μάζα του πρωτονίου,

$$v_1' = \frac{1{,}0087 - 1{,}0073}{1{,}0087 + 1{,}0073}\, v_1 = 6{,}9 \times 10^{-4}\, v_1$$

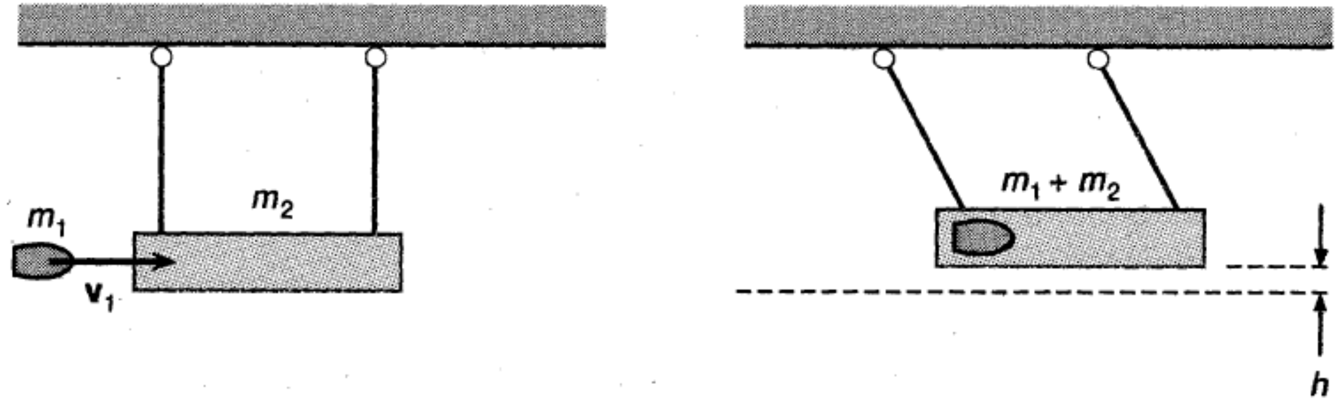
Τούτο δείχνει ότι μία απλή μετωπική σύγκρουση με ένα πρωτόνιο θα κάνει το νετρόνιο να σταματήσει σχεδόν τελείως, ενώ μία απλή μετωπική σύγκρουση μ' ένα πυρήνα άνθρακα θα ελαττώσει την ταχύτητα του νετρονίου κατά 16% μόνο. Επομένως, απαιτούνται πολλές συγκρούσεις με πυρήνες άνθρακα για να ελαττωθεί η ταχύτητα του νετρονίου σε πολύ μικρή τιμή.

Συγκρούσεις σε μια διάσταση

(μη ελαστική κρούση)

- ισχύει ο νόμος διατήρησης της ορμής (μόνο)
- για τελείως ανελαστική κρούση
  - → μέγιστη απώλεια κινητικής ενέργειας
  - → μηδενική σχετική ταχύτητα μετά την κρούση (σώματα ενωμένα) ίση με την ταχύτητα του κέντρου μάζας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Στο Σχ. 11.5a φαίνεται ένα **βλητικό εκκρεμές**, μία συσκευή που εχρησιμοποιείτο κατά τον περασμένο αιώνα για τη μέτρηση της ταχύτητας των σφαιρών. Το εκκρεμές αποτελείται από μία ξύλινη δοκό μάζας m_2 αναρτημένη από λεπτά σύρματα. Αρχικά, το εκκρεμές ηρεμεί. Η σφαίρα μάζας m_1 κτυπάει οριζοντίως τη δοκό και παραμένει καρφωμένη στο εσωτερικό της. Η πρόσκρουση της σφαίρας θέτει σε κίνηση τη δοκό, με αποτέλεσμα να κινηθεί προς τα πάνω και να φτάσει σε ύψος h (Σχ. 11.5b). Σε δοκιμές με όπλο Springfield, που βάλλει σφαίρες 9,7 g, ένα βλητικό εκκρεμές 4,0 kg φτάνει σε ύψος 19 cm. Πόση ήταν η ταχύτητα της σφαίρας πριν από την πρόσκρουση;

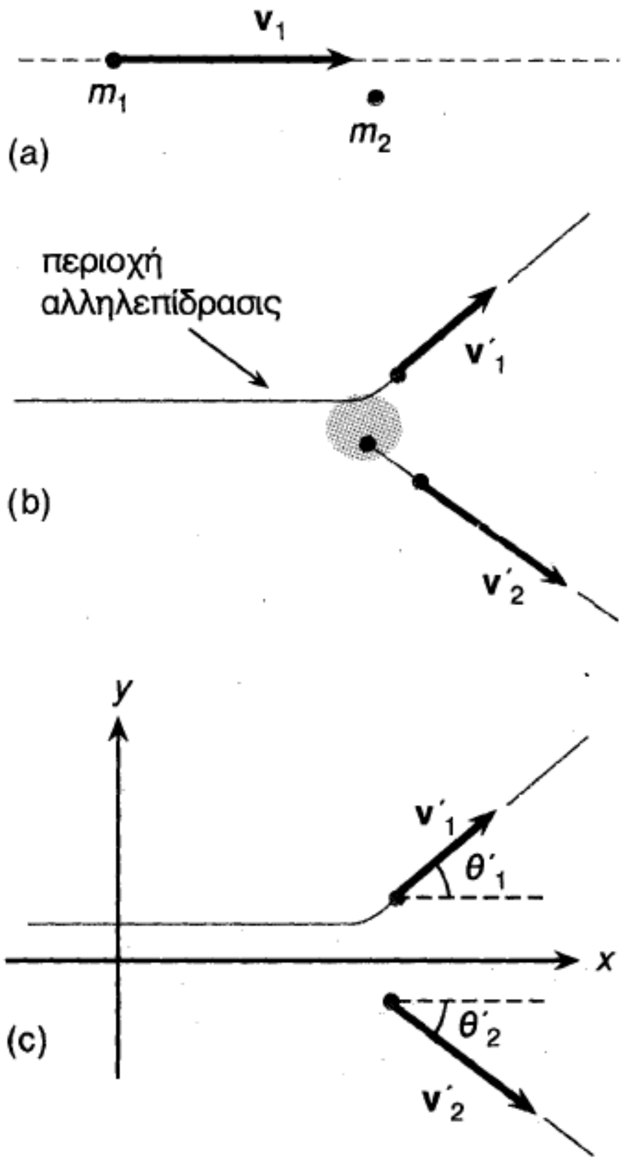


$$\upsilon_{CM} = \frac{m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2}$$ Αρχή διατήρησης της ορμής

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\upsilon_{CM}^2 = (m_1 + m_2)\,gh \longrightarrow \upsilon_{CM} = \sqrt{2gh}$$ Αρχή διατήρησης της ενέργειας

$\upsilon_1 = 8\times10^2$ m/s = 2880 km/hr

Συγκρούσεις σε δύο διαστάσεις



$$m_1 \upsilon_1 = m_1 \upsilon'_1 \cos\theta'_1 + m_2 \upsilon'_2 \cos\theta'_2$$

$$0 = m_1 \upsilon'_1 \sin\theta'_1 - m_2 \upsilon'_2 \sin\theta'_2$$

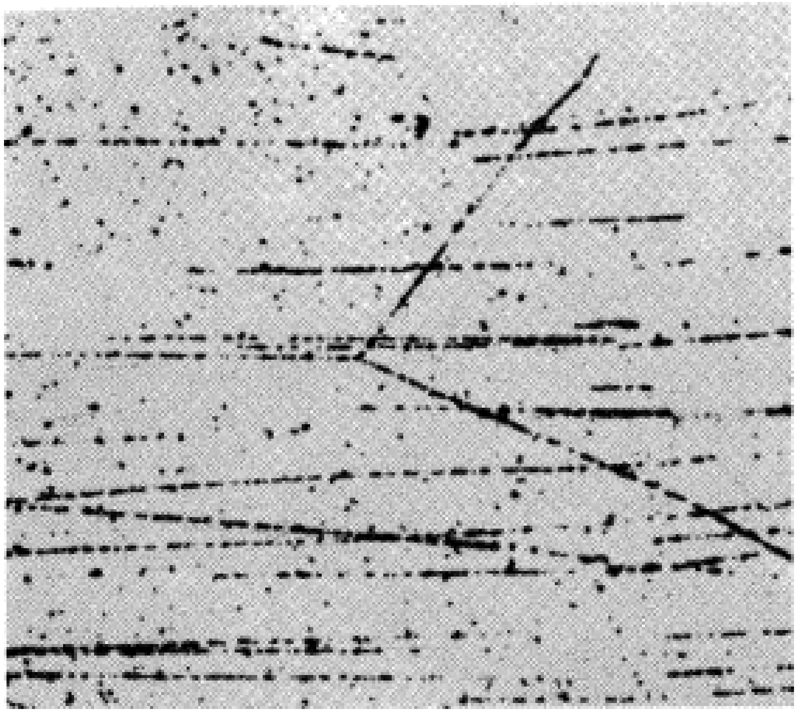
$$\tfrac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 = \tfrac{1}{2} m_1 \upsilon'^2_1 + \tfrac{1}{2} m_2 \upsilon'^2_2$$

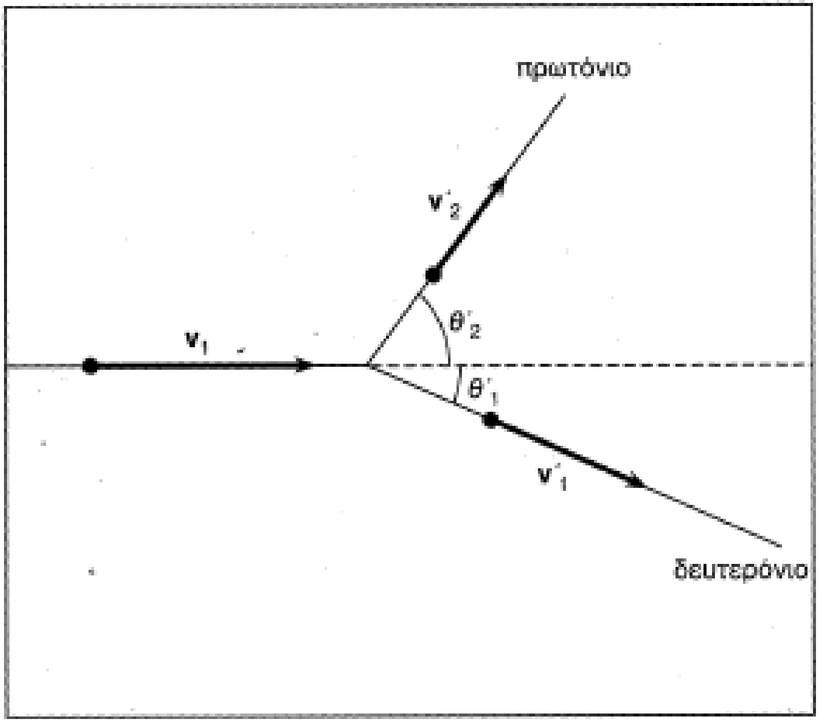
3 εξισώσεις, 4 άγνωστοι (υ'_1, υ'_2, θ'_1, θ'_2),

άρα αν εκτός της αρχικής ταχύτητας υ_1 είναι γνωστός και ένας από τους 4 παραπάνω αγνώστους, τότε υπολογίζονται οι υπόλοιποι τρεις.

Συγκρούσεις σε δύο διαστάσεις

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Στο Σχ. 11.7 φαίνεται η ελαστική κρούση (σκέδαση) ενός δευτερονίου (πυρήνα ισοτόπου του υδρογόνου, με μάζα 2,0 u) και ενός πρωτονίου (με μάζα 1,0 u). Η σκέδαση συνέβη στο γαλάκτωμα μίας φωτογραφικής πλάκας· σ' αυτό το μέσο τα σωματίδια δημιουργούν ορατές τροχιές επειδή η διέλευση τους καταστρέφει (εκθέτει) το φιλμ. Το δευτερόνιο έχει αρχική ταχύτητα $2{,}7 \times 10^7$ m/s και τελική ταχύτητα $2{,}2 \times 10^7$ m/s. Το πρωτόνιο αρχικά ηρεμεί. Να υπολογιστούν η τελική ταχύτητα του πρωτονίου και οι τελεικές κατευθύνσεις κίνησης του δευτερονίου και του πρωτονίου.





Συγκρούσεις σε δύο διαστάσεις

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Στο Σχ. 11.7 φαίνεται η ελαστική κρούση (σκέδαση) ενός δευτερονίου (πυρήνα ισοτόπου του υδρογόνου, με μάζα 2,0 u) και ενός πρωτονίου (με μάζα 1,0 u). Η σκέδαση συνέβη στο γαλάκτωμα μίας φωτογραφικής πλάκας· σ' αυτό το μέσο τα σωματίδια δημιουργούν ορατές τροχιές επειδή η διέλευση τους καταστρέφει (εκθέτει) το φιλμ. Το δευτερόνιο έχει αρχική ταχύτητα $2{,}7 \times 10^7$ m/s και τελική ταχύτητα $2{,}2 \times 10^7$ m/s. Το πρωτόνιο αρχικά ηρεμεί. Να υπολογιστούν η τελική ταχύτητα του πρωτονίου και οι τελεικές κατευθύνσεις κίνησης του δευτερονίου και του πρωτονίου.

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2 \longrightarrow v_2' = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}\left(v_1^2 - v_1'^2\right)} = \sqrt{2\left(v_1^2 - v_1'^2\right)}$$

$$= \sqrt{2\,[(2{,}7 \times 10^7\,\mathrm{m/s})^2 - (2{,}2 \times 10^7\,\mathrm{m/s})^2]} = 2{,}2 \times 10^7\,\mathrm{m/s}$$

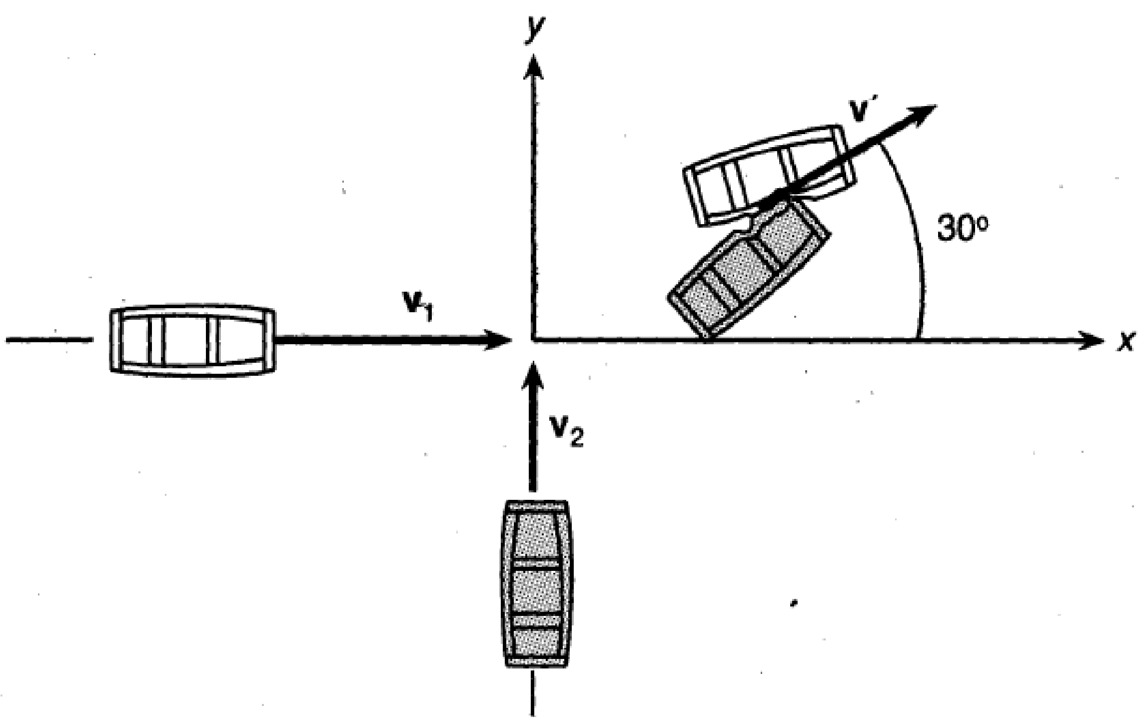
$$m_2 v_2' \cos\theta_2' = m_1 v_1 - m_1 v_1' \cos\theta_1'$$

$$m_2 v_2' \sin\theta_2' = m_1 v_1' \sin\theta_1'$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και προσθέτουμε κατά μέλη

$\theta'_1 = 23^0$, $\theta'_2 = 52^0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Ενα λευκό αυτοκίνητο μάζας 1100 kg και ένα μαύρο αυτοκίνητο μάζας 1300 kg συγκρούονται σε μία διασταύρωση. Η έρευνα που ακολούθησε αποκάλυψε ότι λίγο πριν από τη σύγκρουση, το λευκό αυτοκίνητο εκινείται προς Ανατολάς και το μαύρο προς Βορρά (Σχ. 11.8). Μετά τη σύγκρουση τα δύο τρακαρισμένα αυτοκίνητα παρέμειναν ενωμένα και τα ελαστικά των τροχών άφησαν στο δρόμο σημάδια μήκους 18,7 με φορά 30° από Α προς Β πριν σταματήσουν. Πόση ήταν η ταχύτητα καθενός αυτοκινήτου πριν από τη σύγκρουση; Το ένα από τα αυτοκίνητα υπερέβαινε το όριο ταχύτητας των 25 m/s (90 km/s); Υποθέστε ότι οι τροχοί και των δύο αυτοκινήτων παρέμειναν ακινητοποιημένοι (κλειδωμένοι) μετά τη σύγκρουση και ότι ο συντελεστής κινητικής τριβής ανάμεσα στους κλειδωμένους τροχούς και στην άσφαλτο είναι $\mu_k = 0,8$.



Συγκρούσεις σε δύο διαστάσεις

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Ενα λευκό αυτοκίνητο μάζας 1100 kg και ένα μαύρο αυτοκίνητο μάζας 1300 kg συγκρούονται σε μία διασταύρωση. Η έρευνα που ακολούθησε αποκάλυψε ότι λίγο πριν από τη σύγκρουση, το λευκό αυτοκίνητο εκινείται προς Ανατολάς και το μαύρο προς Βορρά (Σχ. 11.8). Μετά τη σύγκρουση τα δύο τρακαρισμένα αυτοκίνητα παρέμειναν ενωμένα και τα ελαστικά των τροχών άφησαν στο δρόμο σημάδια μήκους 18,7 με φορά 30° από Α προς Β πριν σταματήσουν. Πόση ήταν η ταχύτητα καθενός αυτοκινήτου πριν από τη σύγκρουση; Το ένα από τα αυτοκίνητα υπερέβαινε το όριο ταχύτητας των 25 m/s (90 km/s); Υποθέστε ότι οι τροχοί και των δύο αυτοκινήτων παρέμειναν ακινητοποιημένοι (κλειδωμένοι) μετά τη σύγκρουση και ότι ο συντελεστής κινητικής τριβής ανάμεσα στους κλειδωμένους τροχούς και στην άσφαλτο είναι $\mu_k = 0{,}8$.

$$m_1 \upsilon_1 = (m_1 + m_2)\,\upsilon' \cos\theta'$$

$$m_2 \upsilon_2 = (m_1 + m_2)\,\upsilon' \sin\theta'$$

Για να υπολογίσουμε τις ταχύτητες υ_1 και υ_2 χρειάζεται να υπολογιστεί πρώτα η ταχύτητα υ΄ αμέσως μετά τη σύγκρουση. Η επιβράδυνση των αυτοκινήτων είναι:

$$a = \frac{f_k}{m_1 + m_2} = \frac{\mu_k (m_1 + m_2) g}{m_1 + m_2} = \mu_k g$$

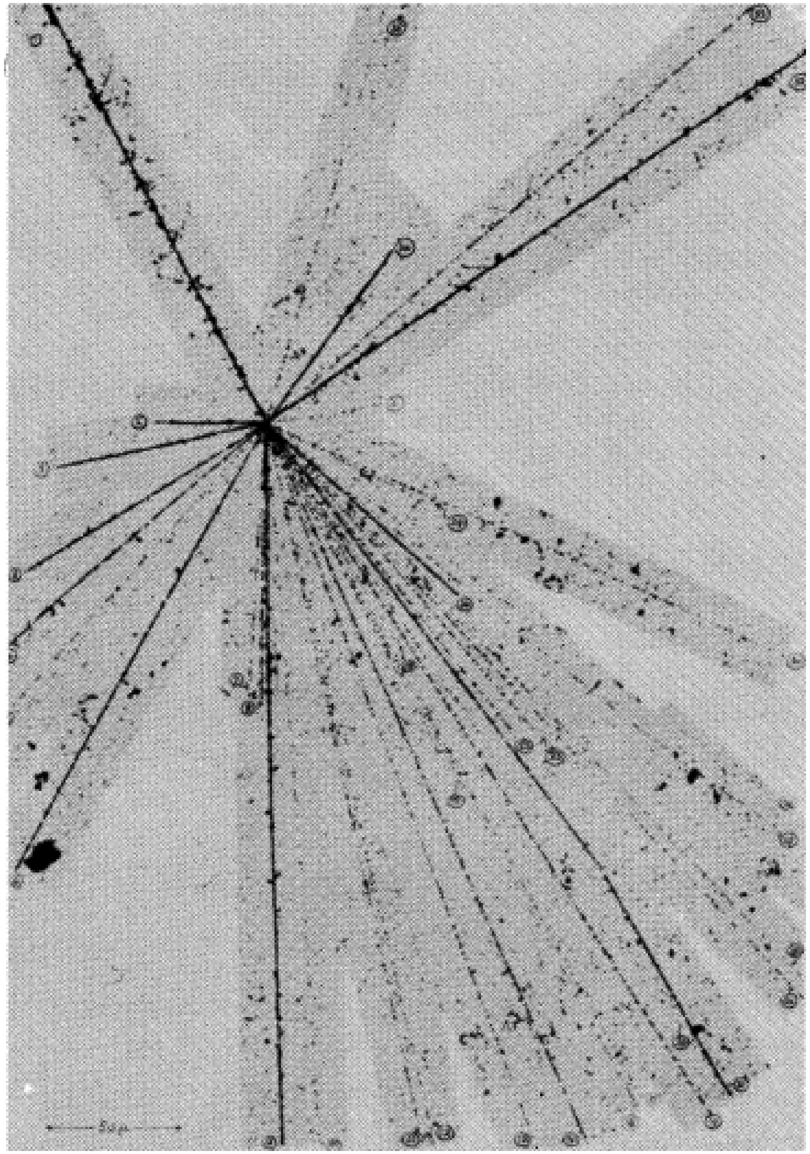
ενώ σύμφωνα με την εξίσωση

$\alpha(x - x_0) = \frac{1}{2}(\upsilon^2 - \upsilon_0^2) \rightarrow$

$\alpha(\text{μήκος σημαδιών}) = \frac{1}{2}\upsilon'^2 \rightarrow \upsilon' = 17$ m/s

και από τις αρχικές εξισώσεις της διατήρησης της ορμής υπολογίζονται οι $\upsilon_1 = 32$ m/s και $\upsilon_2 = 16$ m/s

Κρούσεις και αντιδράσεις πυρήνων και στοιχειωδών σωματιδίων – σκέδαση



- χρήση δέσμης σωματιδίων (ηλεκτρόνια, πρωτόνια, κτλ.) για τη μελέτη σωματιδίων ατομικής κλίμακας
- ελαστικές κρούσεις: μόνο αλλαγή κίνησης (**σκέδαση**), όχι μεταβολή σωματιδίων
- μή ελαστικές κρούσεις: ενεργειακές μεταβολές και ισχύει

$$K + Q = K'$$

όπου K και K΄ οι κινητικές ενέργειες πριν και μετά την κρούση και Q η καθαρή μεταβολή της μάζας ηρεμίας

$$Q = (m_1+m_2+\ldots+m_n)\,c^2 - (m'_1+m'_2+\ldots+m'_n)\,c^2$$

μάζες σωματιδίων πριν και μετά από την αντίδραση

Σύνοψη

Ωση (Ωθηση): $\mathbf{I} = \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}\, dt$

$$= \mathbf{p}' - \mathbf{p}$$

Ελαστική κρούση: Η κινητική ενέργεια διατηρείται.

Τελείως ανελαστική κρούση: Η μέγιστη ποσότητα της κινητικής ενέργειας χάνεται· τα σωματίδια παραμένουν ενωμένα.

Ταχύτητες στις μονοδιάστατες ελαστικές κρούσεις:

πριν: $\upsilon_1 \neq 0 \qquad \upsilon_2 = 0$

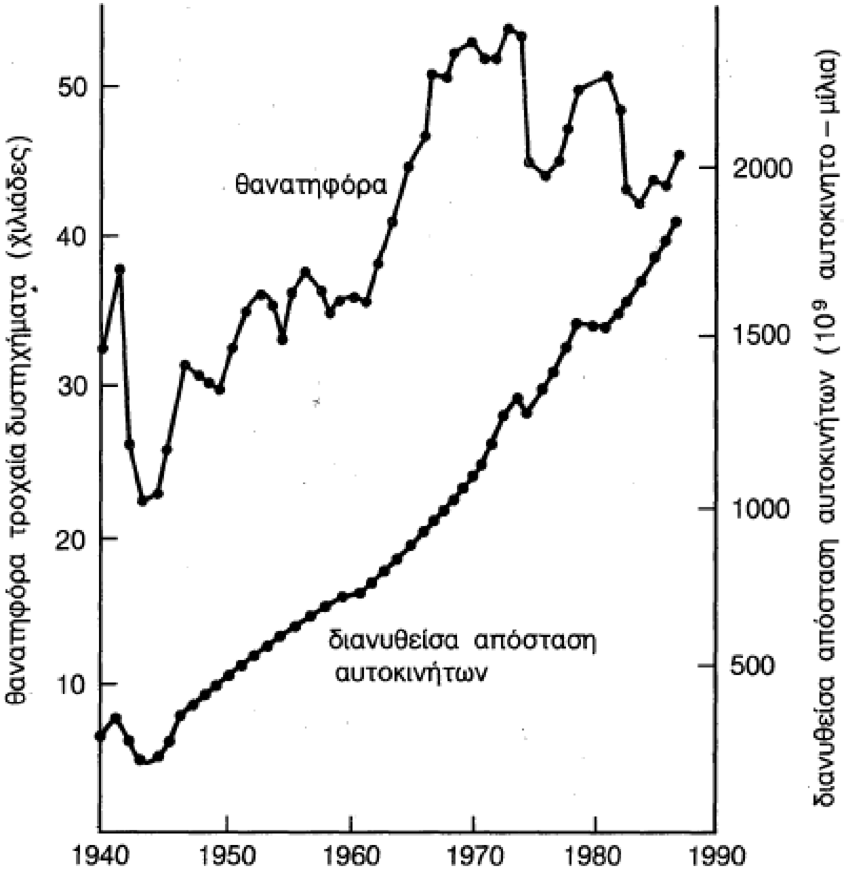
μετά: $\upsilon_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, \upsilon_1, \qquad \upsilon_2' = \dfrac{2\, m_1}{m_1 + m_2}\, \upsilon_1$

Μεταβολή της ενέργειας μάζας ηρεμίας σε ανελαστικές κρούσεις:

$$Q = (m_1 + m_2 + \cdots + m_n)\, c^2 - (m_1' + m_2' + \cdots + m_r')\, c^2$$

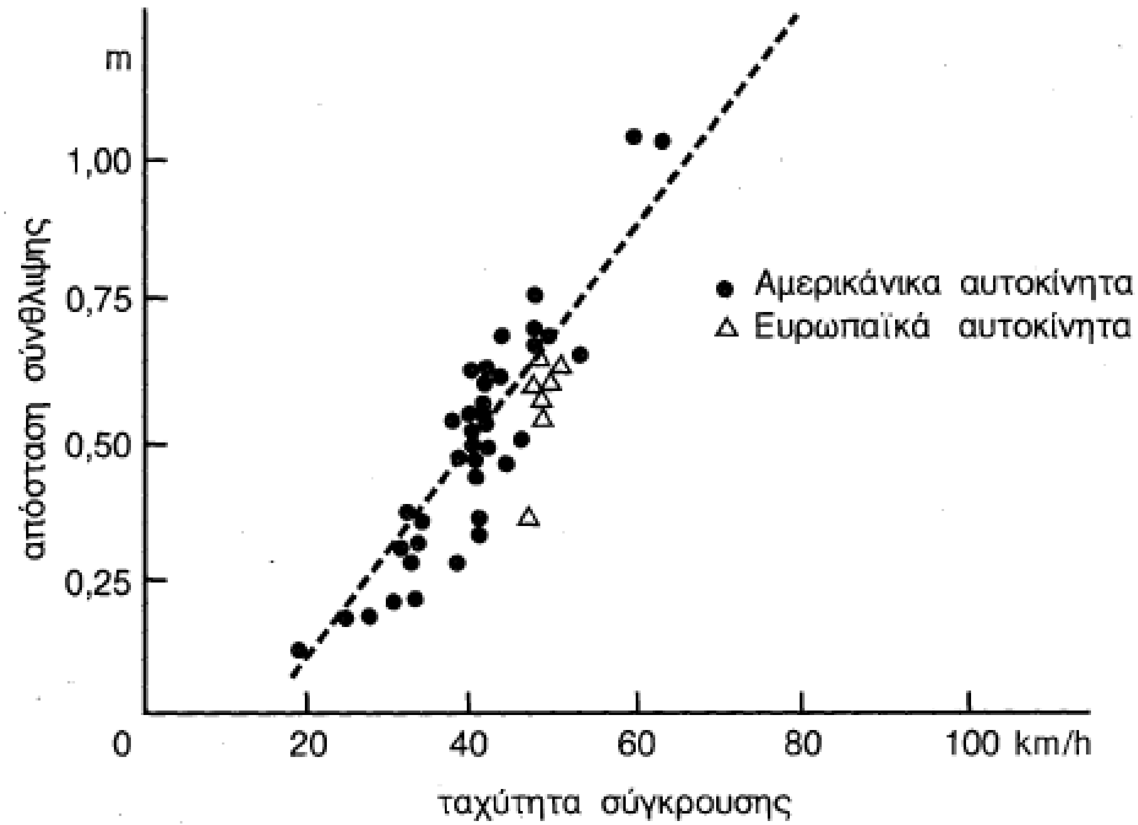
Συνθήκη για δυνατότητα αντίδρασης με αρνητικό Q: $K_{\text{int}} > |Q|$

Συγκρούσεις αυτοκινήτων και δομή αυτοκινήτων



Σχ. ΙΙΙ.1 Αυξανόμενος ρυθμός θανάτων και αυξανόμενη χρήση αυτοκινήτων στις Ηνωμένες Πολιτείες. Μολαταύτα, σημειώστε την απότομη πτώση στο ρυθμό θανάτων το 1974, όταν επεβλήθη από την ομοσπονδιακή κυβέρνηση το όριο των 55 mi/h (88 km/h). Μολονότι ένα τμήμα αυτής της πτώσης αντικατοπτρίζει μια προσωρινή μείωση της χρήσης του αυτοκινήτου εξαιτίας της πετρελαϊκής κρίσης, το μεγαλύτερο τμήμα αντικατοπτρίζει τον αριθμό των ζωών που σώθηκαν εξαιτίας της μικρότερης ταχύτητας οδήγησης.

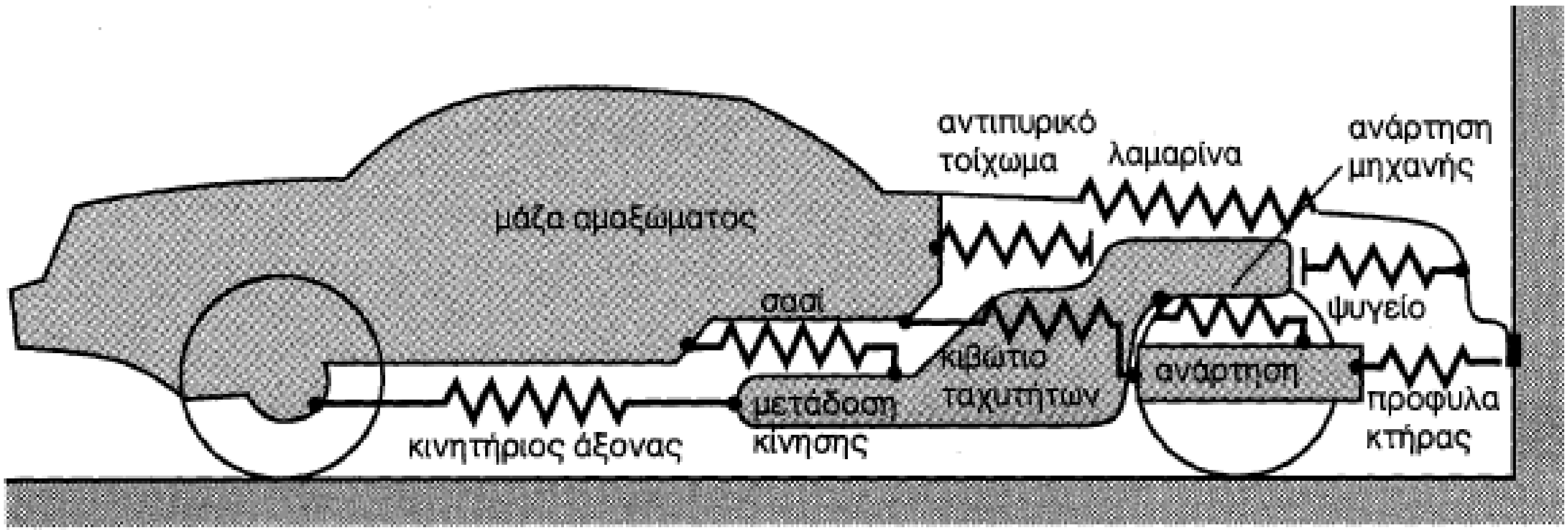
Συγκρούσεις αυτοκινήτων και δομή αυτοκινήτων



Σχήμα. Απόσταση σύνθλιψης συναρτήσει της ταχύτητας κρούσης για μετωπικές συγκρούσεις σε ακλόνητο εμπόδιο (γραμμική συνάρτηση).

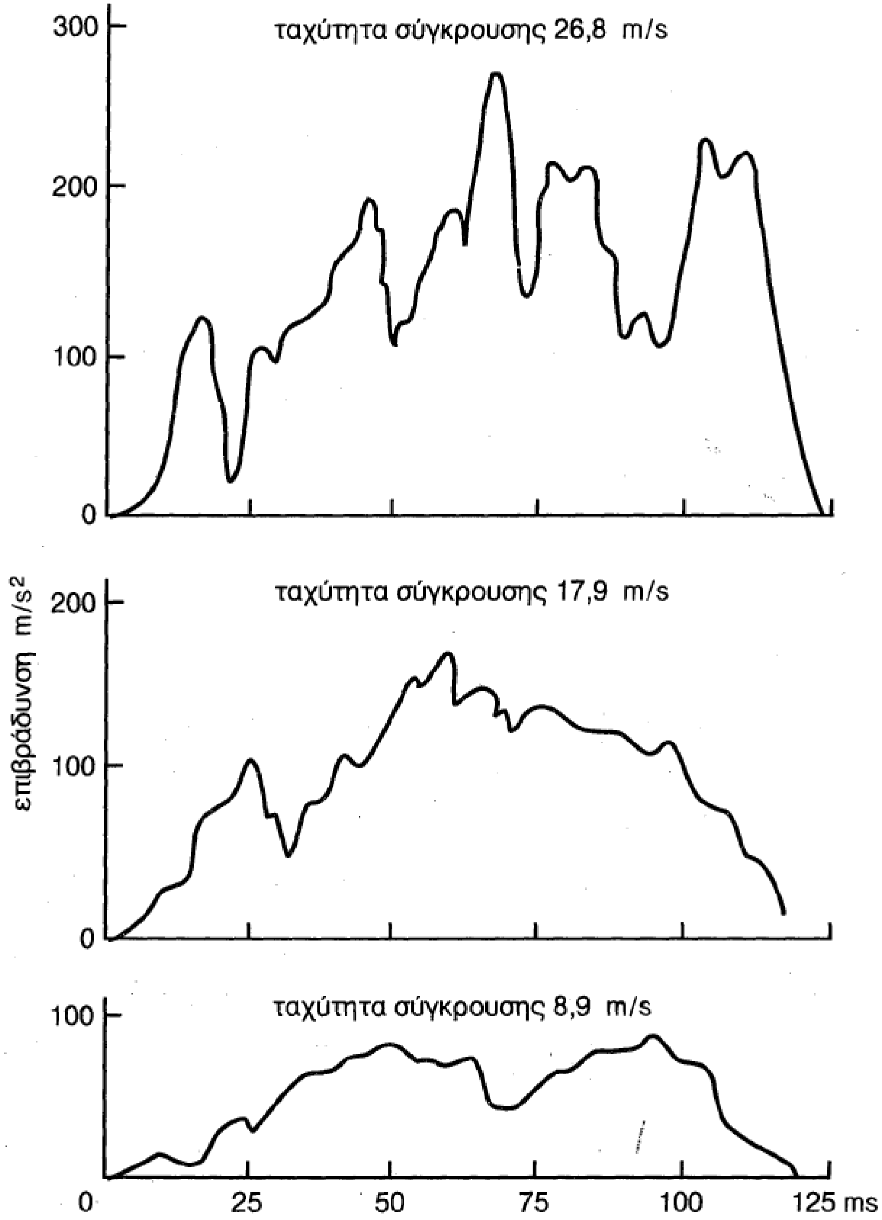
Ερώτηση. Στα βαρύτερα-μεγαλύτερα ή στα ελαφρά-μικρότερα αυτοκίνητα παρατηρούνται μεγαλύτερες αποστάσεις σύνθλιψης?

Συγκρούσεις αυτοκινήτων και δομή αυτοκινήτων



Σχ. III.5 Σχηματικό μοντέλο αυτοκινήτου που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της συμπεριφοράς κατά τις μετωπικές συγκρούσεις.

Συγκρούσεις αυτοκινήτων και δομή αυτοκινήτων



Σχήμα. Στιγμιαία επιτάχυνση αυτοκινήτου 1600 kg σε πρόσκρουση με ακίνητο εμπόδιο ($\Delta t = 0,11$ sec), για ταχύτητες 97, 64, 32 km/hr.

Σοβαρότητα σύγκρουσης:

$$\alpha = \Delta\upsilon/\Delta t \approx 1/0,11 \times \Delta\upsilon$$

Δηλαδή ευθέως ανάλογη με τη μεταβολή της ταχύτητας

Συγκρούσεις μεταξύ αυτοκινήτων

$K = \frac{1}{2} M \upsilon_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

$v_1 = \upsilon_1 - \upsilon_{CM}$

$v_2 = \upsilon_2 - \upsilon_{CM}$

από διατήρηση της ορμής υπολογίζεται η υ_{CM} που αν αντικατασταθεί στην παραπάνω σχέση μας δίνει

$$\boxed{K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2}$$

Ολική κινητική ενέργεια δύο σωμάτων (άθροισμα της κινητικής ενέργειας του κέντρου μάζας και της «εσωτερικής» κινητικής ενέργειας της κίνησης ως προς το κέντρο μάζας).
Μόνο η «εσωτερική» κινητική ενέργεια είναι διαθέσιμη για τη σύνθλιψη

Τελείως ανελαστική κρούση (πλαστική):
$v_1, v_2 = 0$ (γιατί $\upsilon_1 = \upsilon_{CM}$ και $\upsilon_2 = \upsilon_{CM}$, ενωμένα)
(ο 2ος όρος = 0)

Μη ελαστική κρούση (ο 2ος όρος ≠ 0)

Αν $\upsilon_1 = 49$ km/hr , $\upsilon_2 = -49$ km/hr

$m_1 = 2000$ kg , $m_2 = 1000$ kg

$K_1 = 1{,}9\times10^5$ J , $K_2 = 0{,}93\times10^5$ J

$K_{o\lambda} = 2{,}8\times10^5$ J , «Εσωτ.» Κιν. Εν. $= \frac{1}{2} \frac{2000\text{ kg} \times 1000\text{ kg}}{2000\text{ kg} + 1000\text{ kg}} \times (98\text{ km/h})^2 = 2{,}5 \times 10^5$ J

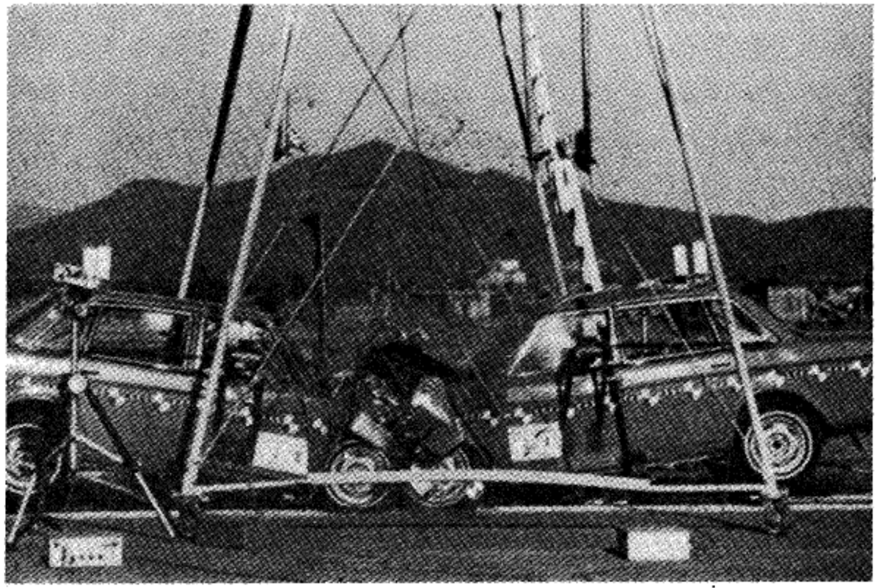
100% 89%

Η μέση επιτάχυνση των αυτοκινήτων (δηλ. η μεταβολή ταχύτητας) είναι αντιστρόφως ανάλογη με τη μάζα τους, άρα μικρό αυτ/το → σοβαρή σύγκρουση και το αντίθετο.

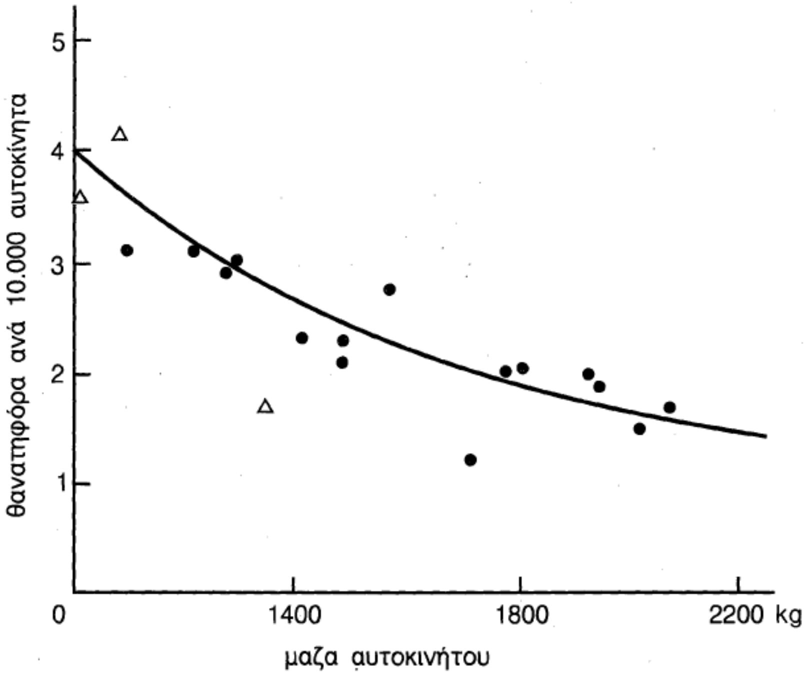
Μεγάλο αυτ/το: από 49 km/hr σε 16 km/hr ≈ με σύγκρουση με 33 km/hr σε ακλόνητο εμπόδιο

Μικρό αυτ/το: από -49 km/hr σε +16 km/hr ≈ με σύγκρουση με 65 km/hr σε ακλόνητο εμπόδιο

Συγκρούσεις μεταξύ αυτοκινήτων

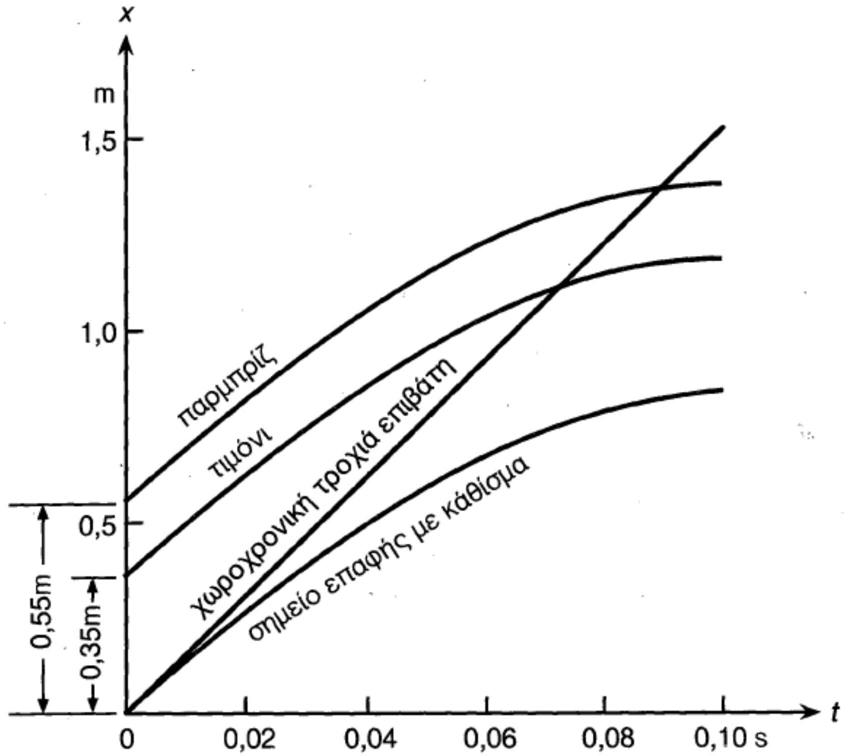


Σχήμα. Πείραμα μετωπικής σύγκρουσης.



Σχήμα. Θάνατοι συναρτήσει μάζας αυτοκινήτου.

Δευτερεύουσα σύγκρουση



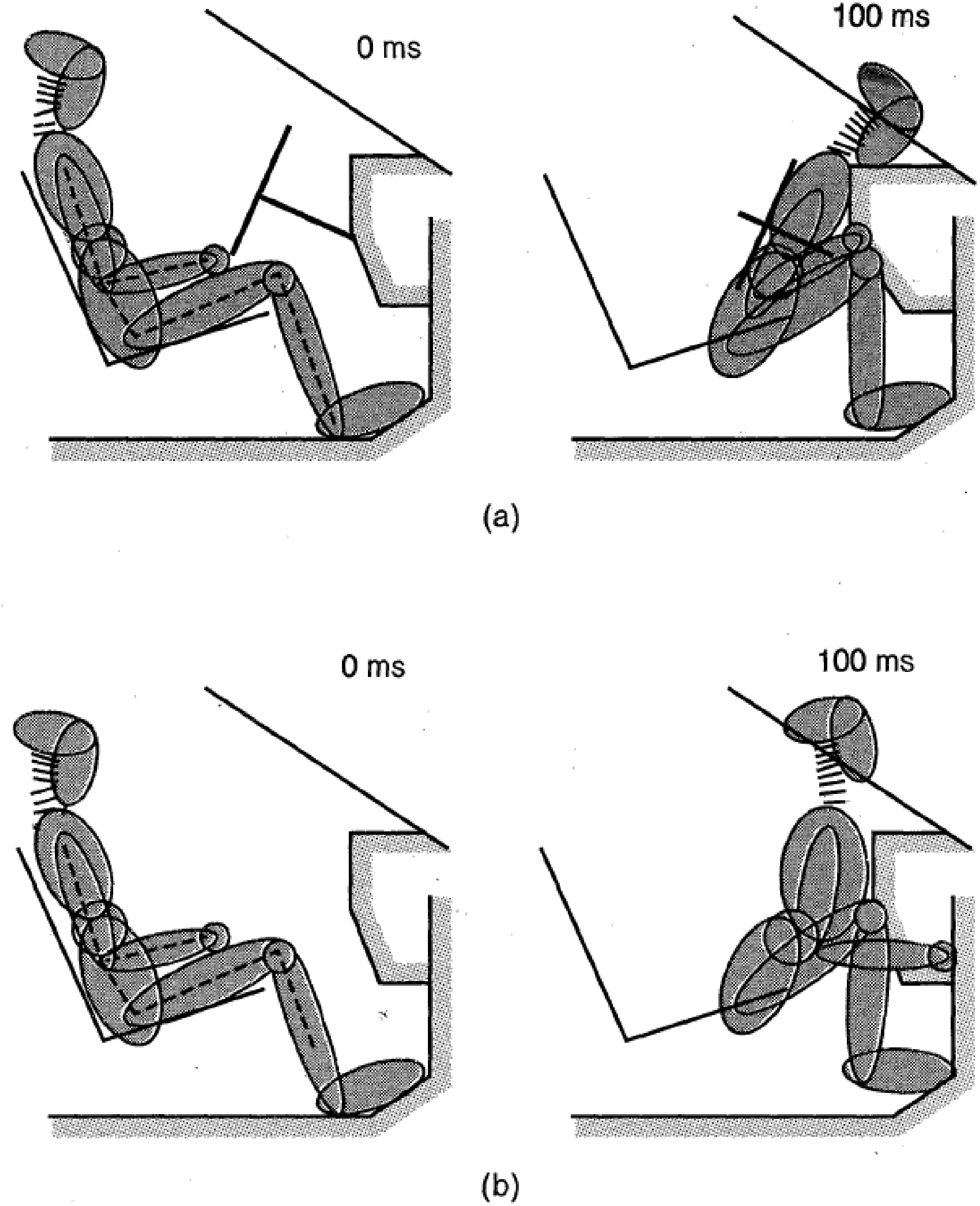
Σχήμα. Χωροχρονική τροχιά του επιβάτη και χωροχρονικές τροχιές του καθίσματος, τιμονιού και παρμπρίζ.

Πίνακας. Σύγκριση ταχυτήτων πρόσκρουσης και υψών πτώσης.

Ταχύτητα		*Ύψος (αριθμός πατωμάτων από το έδαφος)*[a]
15 km/h	9,3 mi/h	$\frac{1}{3}$
30	18,6	1
45	28,0	3
60	37,2	5
75	46,6	8
90	55,9	11
105	65,2	15

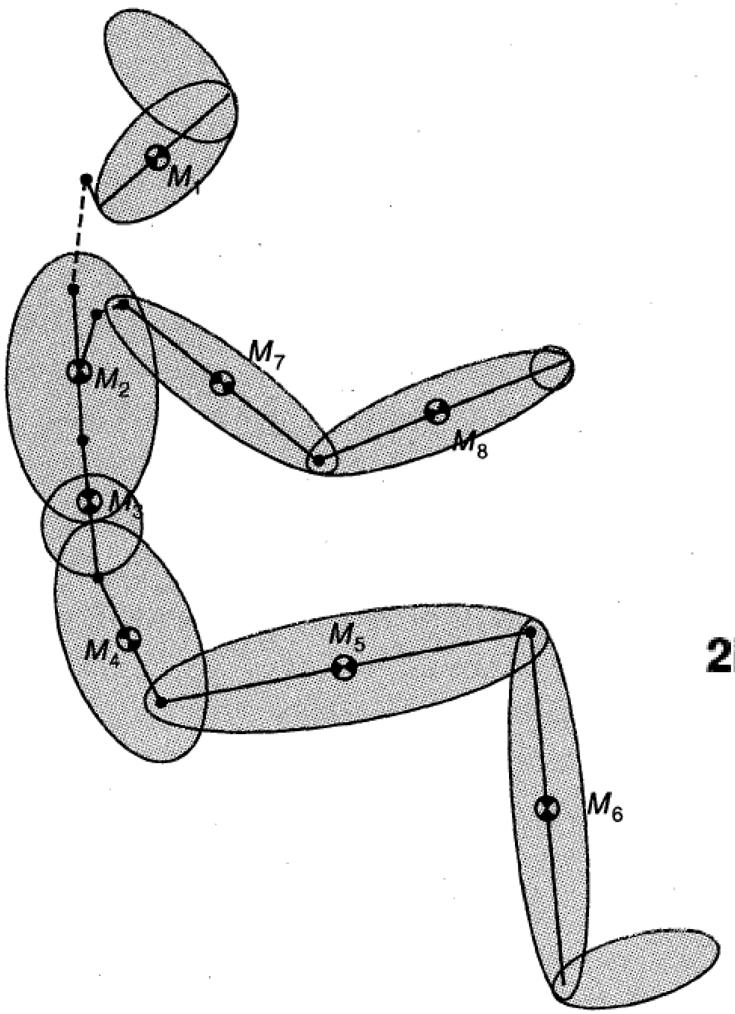
[a] Κάθε πάτωμα έχει ύψος 2,9 m.

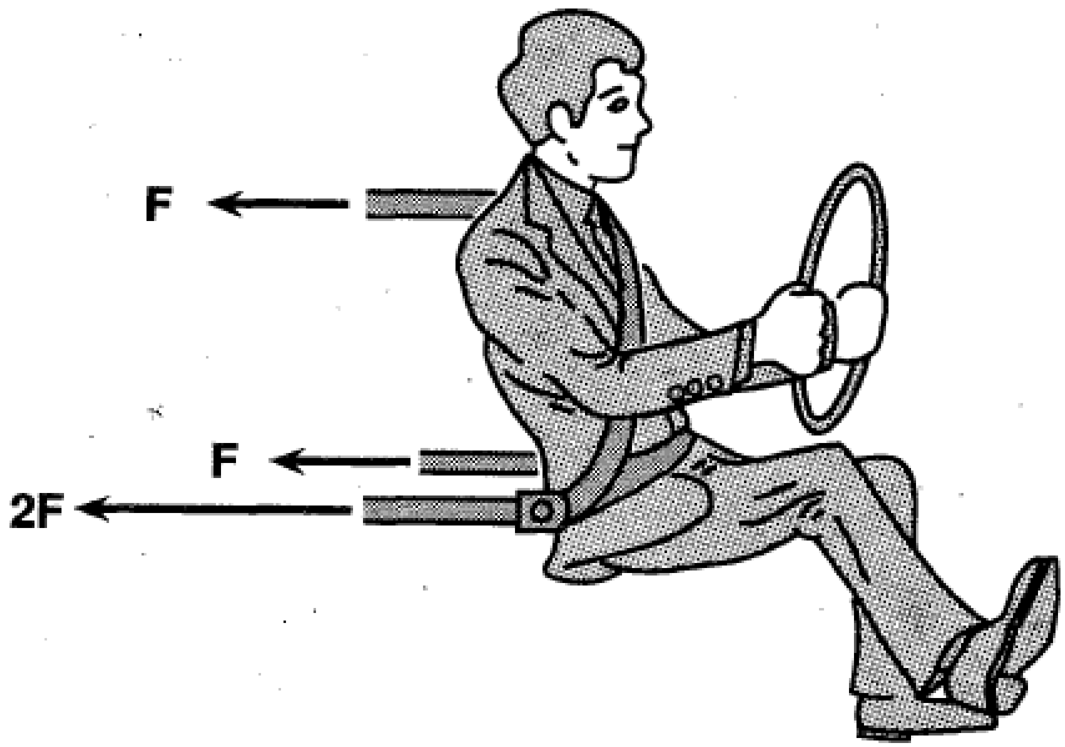
Δευτερεύουσα σύγκρουση



Σχήμα. Κίνηση οδηγού και συνοδηγού που δεν φορούν ζώνη.

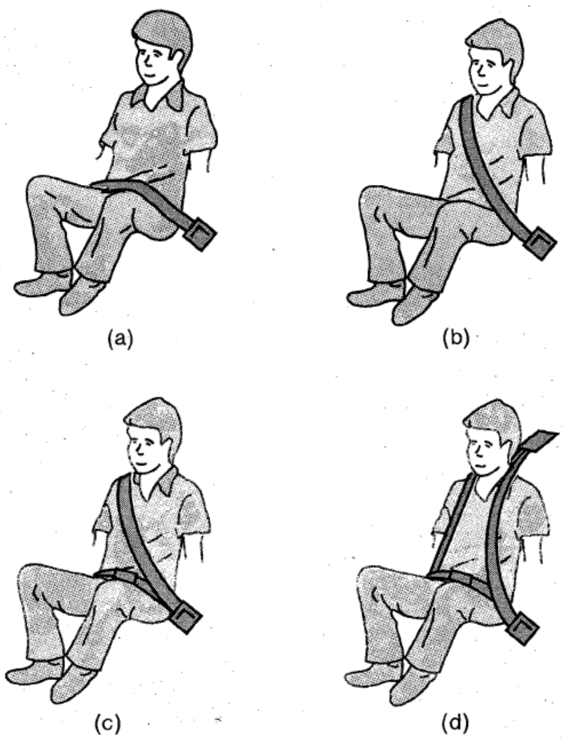
Δευτερεύουσα σύγκρουση

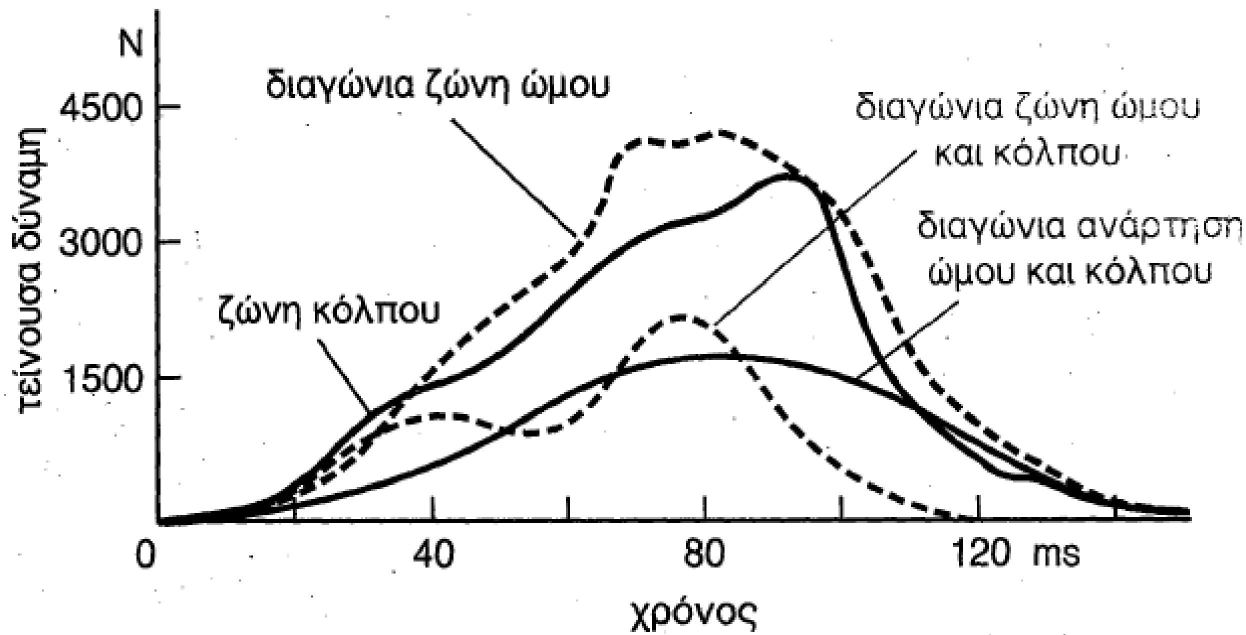




Σχήμα. Δυνάμεις που εξασκούνται από ζώνη 3 σημείων.

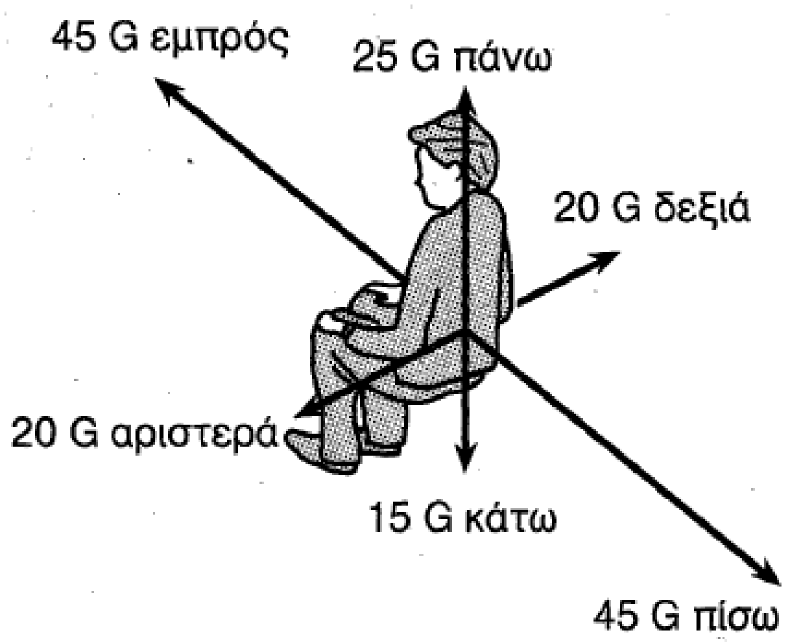
Δευτερεύουσα σύγκρουση





Σχήμα. Σύγκριση τεινουσών δυνάμεων ζώνης.

Δευτερεύουσα σύγκρουση



Σχήμα. Όρια αντοχής του ανθρώπινου σώματος.

Σχήμα. Ελάχιστη απόσταση σταματήματος επιβάτη συναρτήσει της ταχύτητας πρόσκρουσης για επιβάτη που υπόκειται στη μέγιστη ανεκτή επιβράδυνση.

Ασκήσεις

5. Με φωτογράφηση μεγάλης ταχύτητας έχει δειχθεί ότι όταν ένα μπαστούνι του γκολφ κτυπήσει την μπάλα, το μπαστούνι και η μπάλα παραμένουν σ' επαφή για $1,0 \times 10^{-3}$ s και η μπάλα αποκτάει ταχύτητα 70 m/s. Η μάζα της μπάλας ισούται με 45 g. Υπολογίστε το μέτρο της δύναμης, την οποία το μπαστούνι ασκεί στη μπάλα.

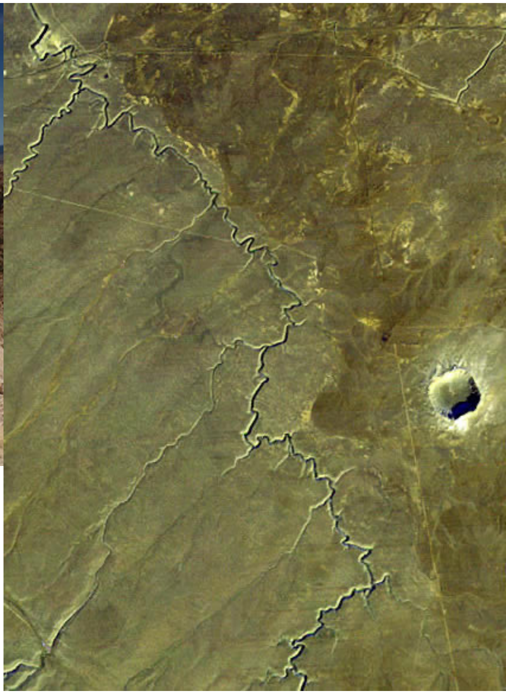
$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m\Delta u}{\Delta t} = \frac{45 * 10^{-3} \text{ X } 70}{10^{-3}} = 3150\text{N}$$

Ασκήσεις

9. Το Meteor Crater της Arizona (Σχ. 11.11), μία τρύπα βάθους 180 m και διαμέτρου 1300 m, "σκάφτηκε" στην επιφάνεια της Γης από την πρόσκρουση ενός μεγάλου μετεωρίτη. Η μάζα και η ταχύτητα του μετεωρίτη υπολογίστηκε ότι ήταν 2×10^9 kg και 10 km/s, αντιστοίχως, πριν από τη σύγκρουση.

(a) Τι ταχύτητα ανάκρουσης απέκτησε η Γη κατά τη διάρκεια αυτής της (μη ελαστικής) κρούσης;

(b) Πόση κινητική ενέργεια ελευθερώθηκε για μη ελαστικές διαδικασίες κατά την πρόσκρουση; Η ενέργεια να εκφρασθεί σε ισοδύναμους τόννους TNT. 1 τόννος TNT ελευθερώνει $4{,}2 \times 10^9$ J όταν εκραγεί.



Ασκήσεις

9. Το Meteor Crater της Arizona (Σχ. 11.11), μία τρύπα βάθους 180 m και διαμέτρου 1300 m, "σκάφτηκε" στην επιφάνεια της Γης από την πρόσκρουση ενός μεγάλου μετεωρίτη. Η μάζα και η ταχύτητα του μετεωρίτη υπολογίστηκε ότι ήταν 2×10^9 kg και 10 km/s, αντιστοίχως, πριν από τη σύγκρουση.
   (a) Τι ταχύτητα ανάκρουσης απέκτησε η Γη κατά τη διάρκεια αυτής της (μη ελαστικής) κρούσης;
   (b) Πόση κινητική ενέργεια ελευθερώθηκε για μη ελαστικές διαδικασίες κατά την πρόσκρουση; Η ενέργεια να εκφρασθεί σε ισοδύναμους τόννους TNT. 1 τόννος TNT ελευθερώνει $4{,}2 \times 10^9$ J όταν εκραγεί.

$$m_1 u = (m_1 + m_2)u' \Rightarrow u' = \frac{m_1 u}{m_1 + m_2} = \frac{2\times 10^9\, kg \times 10^4\, m/s}{(2\times 10^9 + 5{,}98\times 10^{24})kg} = 3\times 10^{-12}\, m/s$$

$$K = \frac{1}{2} M u_{CM}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(u_1 - u_2)^2 \approx \ldots (m_2 \rangle\rangle m_1) \ldots \frac{1}{2} m_1 (u_1 - u_2)^2$$

$$= 1\times 10^{17}\, J = 2\times 10^7\, tons TNT$$

Ασκήσεις

*14. Ενα αυτοκίνητο πέφτει με μεγάλη ταχύτητα στο πίσω μέρος ενός σταθμευμένου αυτοκινήτου. Μετά τη σύγκρουση τα δύο αυτοκίνητα παραμένουν ενωμένα και ντεραπάρουν πάνω στο δρόμο με όλους τους τροχούς τους κλειδωμένους. Η τροχαία που διερεύνησε το ατύχημα βρήκε ότι τα σημάδια που άφησαν στο δρόμο τα αυτοκίνητα μετά τη σύγκρουση είχαν μήκος 18 m· η μάζα του κινούμενου αυτοκινήτου ήταν 2200 kg και του σταθμευμένου ήταν 1400 kg. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των τροχών και του δρόμου ήταν 0,95.

(a) Πόση ήταν η ταχύτητα των δύο αυτοκινήτων αμέσως μετά τη σύγκρουση;

(b) Πόση ήταν η ταχύτητα του κινούμενου αυτοκινήτου πριν από τη σύγκρουση;

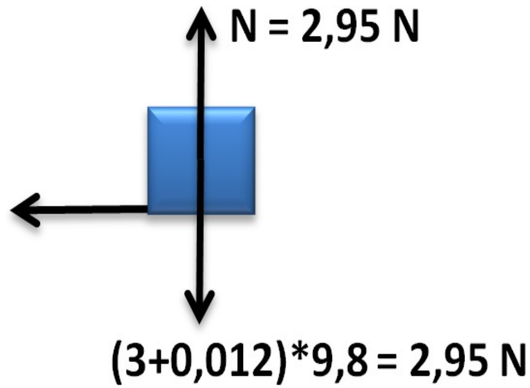
Επιβράδυνση $\alpha = \frac{F_{\tau\rho.}}{m} = \frac{\mu m g}{m} = \mu\, g$

α) $u_o = \sqrt{2\alpha(x - x_o)} = \sqrt{2\mu g(x - x_o)} = \sqrt{2 * 0.95 * 9.81 * 18}$ => $u_o = 18.3$ m/s

b) $m_1\, u = (m_1 + m_2)\, u_o$ => $u = 30$ m/s

Ασκήσεις

*17. Μία χονδρική αλλά απλή, μέθοδος για να μετρηθεί η ταχύτητα μιας σφαίρας είναι να βληθεί η σφαίρα οριζοντίως σε ένα καδρόνι ξύλινο που ηρεμεί πάνω σ' ένα τραπέζι. Το καδρόνι θ' αρχίσει να ολισθαίνει έως ότου η κινητική του ενέργεια διασκορπιστεί εξαιτίας των δυνάμεων τριβής με την επιφάνεια του τραπεζιού. Υποθέστε ότι ένα καδρόνι 3 kg ολισθαίνει σε απόσταση 6 cm αφού κτυπηθεί από σφαίρα μάζας 12 gr. Εάν ο συντελεστής της τριβής ολίσθησης του ξύλου με το τραπέζι ισούται με 0,6, πόση ταχύτητα κατά την κρούση είχε η σφαίρα



Έργο Τριβής = Κινητική Ενέργεια αμέσως μετά τη σύγκρουση

$F_{fx} = 0,06*(0,6) * (29,5) = ½ (3 + 0,012) u^2$ =>

=> u = 1.09 m/s μετά αμέσως τη σύγκρουση

$0,012 * u_b = (3 + 0.012) * 1.09$ => $u_b = 274$ m/s

Ασκήσεις

*33. Στις 27 Ιουλίου 1956 τα πλοία *Andrea Doria* (40000 μετρικών τόννων) και *Stocholm* συγκρούστηκαν μέσα σε ομίχλη νοτίως της Νήσου Nantucket και έμειναν ενωμένα (για κάποιο διάστημα). Αμέσως πριν από τη σύγκρουση, η ταχύτητα του *Andrea Doria* ήταν 22 κόμβοι με κατεύθυνση 15° από Ν προς Α και η ταχύτητα του *Stockholm* ήταν 19 κόμβοι με κατεύθυνση 48° από Ν προς Α (1 κόμβος = 1 mi/h = 1,85 km/h).

(a) Υπολογίστε την ταχύτητα (μέτρο και φορά) του ναυαγίου αμέσως μετά τη σύγκρουση.

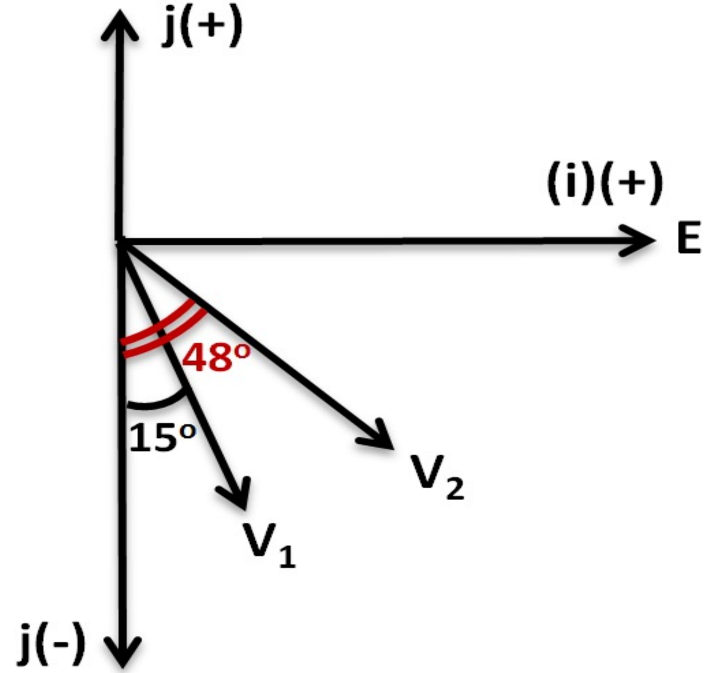
(b) Βρείτε την ποσότητα της κινητικής ενέργειας που μετατράπηκε σε άλλες μορφές ενέργειας μέσω μη ελαστικών διαδικασιών κατά τη σύγκρουση.

(c) Στη μεγάλη ποσότητα ενέργειας που απορροφήθηκε εξαιτίας των μη ελαστικών διαδικασιών οφείλεται η μεγάλη ζημιά που έπαθαν τα πλοία. Πόσα χιλιόγραμμα TNT θα έπρεπε να είχαν εκραγεί, ώστε ν' αποδώσουν την ίδια ποσότητα ενέργειας μ' αυτή που απορροφήθηκε λόγω της μη ελαστικής σύγκρουσης; Η έκρηξη 1 kg TNT ελευθερώνει $4{,}6 \times 10^6$ J.

α) $m_1V_1 + m_2V_2 = (m_1 + m_2)\,V'$ =>

=> $V' = \frac{m_1V_1+m_2V_2}{m_1+m_2}$ =>

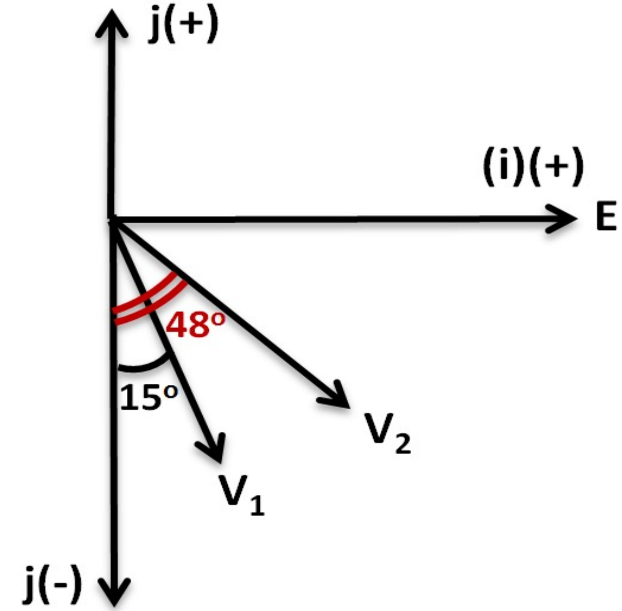
m_1 = 40.000 τόνοι
m_2 = 20.000 τόνοι
V_1 = 22 knots ($\sin 15^o\,\hat{\imath} - \cos 15^o\,\hat{\jmath}$)
V_2 = 19 knots ($\sin 48^o\,\hat{\imath} - \cos 48^o\,\hat{\jmath}$)



=> $V' = \frac{40.000(22\sin 15^o\hat{\imath} - 22\cos 15^o\hat{\jmath}) + 20.000(19\sin 48^o\hat{\imath} - 19\cos 48^o\hat{\jmath})}{20.000+40.000}$

=> $V' = (8.5\,\hat{\imath} - 18.4\,\hat{\jmath})$ knots =>Απόλυτο μέγεθος $=\sqrt{8{,}5^2+18{,}4^2}$ = 20knot

Δ/νση : $\tan^{-1}\frac{8.5}{18.4} = 25^o$ ανατ. του νότου



b) 22 knots = 11.25 m/s

19 knots = 9.7 m/s

Αρχ. KE = $\frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = 3.47 * 10^9$ J

Τελ. KE = $\frac{1}{2} (m_1+m_2) V'^2 = \frac{1}{2} (60.000 * 10^3) (10.23 \text{ m/s})^2 = 3.14 * 10^9$ J

$\Delta E = (3{,}14 - 3{,}47) * 10^9 = -3{,}3 * 10^8$ J

c) kg TNT = $\frac{3.3 * 10^8}{4.6 * 10^6}$ = 71.7 kg TNT