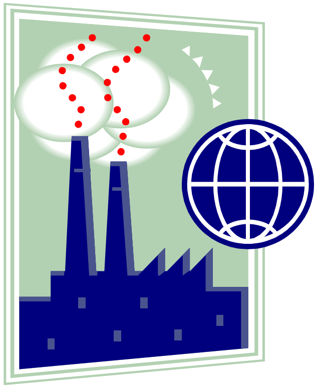
Κεφάλαιο 7



Διατήρηση της ενέργειας

Τι μαθαίνετε

- Τη διαφορά μεταξύ διατηρητικών δυνάμεων και μη διατηρητικών δυνάμεων
- Την έννοια της δυναμικής ενέργειας
  - Πώς να υπολογίζετε τη δυναμική ενέργεια
- Τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας
  - Πώς να λύνετε ευκολότερα προβλήματα μηχανικής
- Τις καμπύλες δυναμικής ενέργειας

Σύνοψη κεφ. 6

Εργο παραγόμενο από σταθερή δύναμη: $W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$

Εργο παραγόμενο από μεταβλητή δύναμη:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} F_x\, dx + \int_{P_1}^{P_2} F_y\, dy + \int_{P_1}^{P_2} F_z\, dz$$

Εργο παραγόμενο από τη βαρύτητα: $W = -mg\,\Delta z$

Κινητική ενέργεια: $K = \frac{1}{2} m v^2$

$$= \frac{p^2}{2m}$$

Θεώρημα έργου – ενέργειας: $\Delta K = W$

Βαρυτική δυναμική ενέργεια: mgz

Μηχανική ενέργεια: $E = K + mgz$

Διατήρηση μηχανικής ενέργειας: $E = K + mgz \doteq [\text{σταθερά}]$

Σύνοψη κεφ. 6

- αν η μόνη δύναμη που επιδρά σε σωματίδιο είναι το βάρος του, τότε:

  $W = B\Delta z = -mg(z_2-z_1) = -mgz_2+mgz_1 = K_2-K_1 = ½\, m\upsilon_2^2 – ½\, m\upsilon_1^2$

  $\rightarrow K + mgz = E$ (μηχανική ενέργεια σωματιδίου) = [σταθερά]

Νόμος διατήρησης μηχανικής ενέργειας

(ενός σωματιδίου που κινείται υπό την επίδραση της βαρύτητας)

<u>Εδώ</u> διατύπωση του γενικού νόμου διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

(όταν (και) άλλες δυνάμεις δρουν πάνω στο σωματίδιο)

Διατηρητικές και μη διατηρητικές δυνάμεις

- **Διατηρητική δύναμη** είναι μια δύναμη που «επιστρέφει» την ενέργεια η οποία μεταφέρθηκε **κατά** την παραγωγή έργου
- Για μια διατηρητική δύναμη, το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση μεταξύ δύο σημείων είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που ακολουθείται:

- Επειδή το έργο που παράγεται από μια διατηρητική δύναμη είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή, το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση σε μια *κλειστή διαδρομή* είναι ίσο με μηδέν:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

- Οι **μη διατηρητικές δυνάμεις** μετατρέπουν (μακροσκοπικά) τη μηχανική ενέργεια σε (μικροσκοπικά) εσωτερική ενέργεια

Διατηρητικές και μη διατηρητικές δυνάμεις

- Παραδείγματα διατηρητικών δυνάμεων
  - Βαρύτητα
  - Στατική ηλεκτρική δύναμη
  - Η δύναμη ενός ιδανικού ελατηρίου

- Παραδείγματα μη διατηρητικών δυνάμεων
  - Τριβή
  - Η ηλεκτρική δύναμη παρουσία χρονικά μεταβαλλόμενων μαγνητικών φαινομένων

Δυναμική ενέργεια Διατηρητικής δύναμης

Οταν η δύναμη που δρα σ' ένα σωματίδιο είναι διατηρητική, είναι δυνατό να κατασκευάσουμε μιαν αντίστοιχη δυναμική ενέργεια με την ακόλουθη συνταγή: Παίρνουμε ένα σημείο αναφοράς P_0· το σημείο αυτό μπορεί να είναι είτε η αρχή των συντεταγμένων, είτε κάποιο σημείο πολύ μακρυά από την περιοχή στην οποία δρα η δύναμη, είτε οποιοδήποτε άλλο βολικό σημείο. Στο σημείο P_0 ορίζουμε ότι η δυναμική ενέργεια έχει κάποια τιμή $U(P_0)$· η τιμή αυτή μπορεί να είναι οποιοσδήποτε βολικός αριθμός, λόγου χάρη, $U(P_0) = 0$. Σε οποιοδήποτε άλλο σημείο P ορίζουμε ως τιμή της δυναμικής ενέργειας την

$$\boxed{U(P) = -\int_{P_0}^{P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + U(P_0)} \qquad (4)$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται κατά μήκος οποιουδήποτε δρόμου που συνδέει τα P_0 και P – εξαιτίας του διατηρητικού χαρακτήρα της $\mathbf{F}$, οποιαδήποτε εκλογή του δρόμου θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα. Το ολοκλήρωμα, επομένως, μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση της θέσης P (είναι επίσης συνάρτηση της θέσης P_0, αφού, όμως, το P_0 κρατιέται σταθερό, αυτή η εξάρτηση μπορεί ν' αμεληθεί). Συνεπώς, η $U(P)$ είναι μία καλώς καθορισμένη συνάρτηση θέσης.

Δυναμική ενέργεια

- Το «αποθηκευμένο έργο» που σχετίζεται με μια διατηρητική δύναμη ονομάζεται **δυναμική ενέργεια**
  - Η δυναμική ενέργεια είναι αποθηκευμένη ενέργεια που μπορεί να ελευθερωθεί ως κινητική ενέργεια
- Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας ορίζεται ως το αρνητικό έργο που παράγεται από μια διατηρητική δύναμη η οποία δρα σε οποιαδήποτε διαδρομή μεταξύ δύο σημείων:

$$\boxed{\Delta U_{AB} = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

  - Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι ανεξάρτητη από τη διαδρομή που ακολουθείται
  - Μόνο οι *μεταβολές* στη δυναμική ενέργεια έχουν σημασία
  - Μπορούμε να ορίσουμε τη δυναμική ενέργεια μηδενική σε οποιοδήποτε σημείο μας εξυπηρετεί

Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

- Σύμφωνα με το θεώρημα έργου-ενέργειας, η μεταβολή στην κινητική ενέργεια ενός σώματος ισούται με το ολικό έργο που παράγεται σε αυτό:

$$K_2 - K_1 = W = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad \boxed{\Delta K = W_{\text{net}}}$$

- Όταν επιδρούν μόνο διατηρητικές δυνάμεις, το ολικό έργο είναι η αρνητική μεταβολή της δυναμικής ενέργειας:

$$\boxed{\Delta U_{AB} = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}} \qquad W_{\text{net}} = -\Delta U$$

- Επομένως, όταν επιδρούν μόνο διατηρητικές δυνάμεις, κάθε μεταβολή στη δυναμική ενέργεια αντισταθμίζεται από μια αντίθετη μεταβολή στην κινητική ενέργεια: $\Delta K + \Delta U = 0$

$$K_2 - K_1 = U(P_1) - U(P_2)$$

- Ισοδύναμα,

$$K_2 + U(P_2) = K_1 + U(P_1) \qquad K + U = \text{σταθερά} = K_0 + U_0$$

- Και οι δύο αυτές εξισώσεις αποτελούν εκφράσεις του νόμου της **διατήρησης της μηχανικής ενέργειας**

δηλαδή E = K + U (νόμος διατήρησης της μηχανικής ενέργειας)

Δυναμική ενέργεια Διατηρητικής δύναμης

Έστω διατηρητική δύναμη F.

Έστω σημείο αναφοράς P_0 με δυναμική ενέργεια $U(P_0)$.

Σε οποιοδήποτε άλλο σημείο P η τιμή της δυναμικής ενέργειας είναι:

$$\boxed{U(P) = -\int_{P_0}^{P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + U(P_0)}$$

Τότε, η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας ανάμεσα στα σημεία P_1 και P_2 προσδιορίζεται:

$$\begin{aligned} U(P_2) - U(P_1) &= -\int_{P_0}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + U(P_0) + \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - U(P_0) \\ &= -\int_{P_0}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{P_1}^{P_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

Δυναμική ενέργεια Διατηρητικής δύναμης

Ως αδιαφιλονίκητο παράδειγμα αυτού του γενικού μαθηματικού αποτελέσματος, θεωρήστε την κίνηση ενός σωματιδίου υπό την επίδραση της βαρύτητας, $F_z = -mg$. Ως σημείο αναφοράς P_0 ας πάρουμε την αρχή $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ και ως δυναμική ενέργεια σ' αυτό το σημείο ας πάρουμε $U(P_0) = 0$. Τότε, η γενική συνταγή (4) δίνει[2]

$$U(P) = -\int_0^x F_x\,dx' - \int_0^y F_y\,dy' - \int_0^z F_z\,dz'$$

$$= -\int_0^z F_z\,dz' = -\int_0^z (-mg)\,dz' = mgz$$

Επομένως, η δυναμική ενέργεια είναι συνάρτηση του z μόνο,

$$U(P) = U(z) = mgz$$

και η διατηρούμενη μηχανική ενέργεια είναι

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgz$$

Δυναμική ενέργεια Διατηρητικής δύναμης

Ως ένα άλλο παράδειγμα, θεωρήστε την κίνηση ενός σωματιδίου σε μια διάσταση (κατά μήκος του άξονα x) υπό την επίδραση μιας δύναμης $F_x = -kx$ που δημιουργείται από ένα ελατήριο. Η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια μπορεί να κατασκευαστεί ως εξής: Για το σημείο αναφοράς P_0 πάρτε $x = 0$ και για τη δυναμική ενέργεια σ' αυτό το σημείο πάρτε $U(P_0) = 0$.

$$U(x) = -\int_0^x (-kx')\,dx' = k\left[\tfrac{1}{2}x'^2\right]_0^x$$

ή

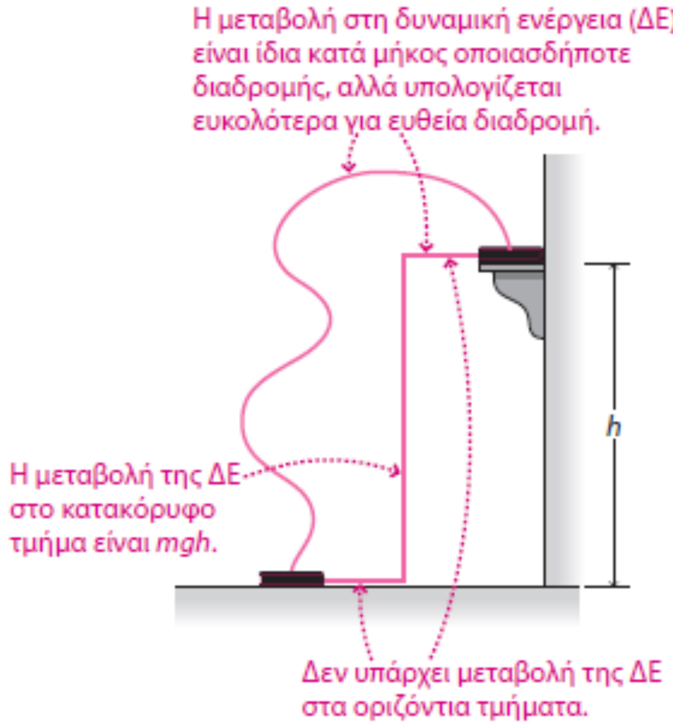
$$\boxed{U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2}$$

Επομένως η διατηρούμενη μηχανική ενέργεια είναι

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

Δύο κοινές μορφές δυναμικής ενέργειας

- Η **βαρυτική δυναμική ενέργεια** αποθηκεύει το έργο που παράγεται κόντρα στη βαρύτητα:
$$\Delta U = mg\Delta y$$
  - Η βαρυτική δυναμική ενέργεια αυξάνεται γραμμικά με το ύψος *y*
  - Αυτό αντικατοπτρίζει τη *σταθερή* βαρυτική δύναμη κοντά στην επιφάνεια της Γης

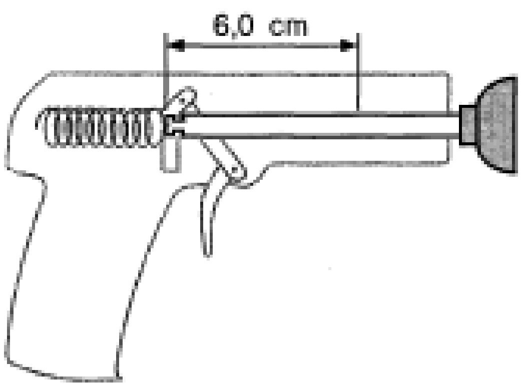


- Η **ελαστική δυναμική ενέργεια** αποθηκεύει το έργο που παράγεται κατά την επιμήκυνση ή τη συμπίεση ενός ελατηρίου ή άλλων ελαστικών συστημάτων: $U = \frac{1}{2}kx^2$
  - Η ελαστική δυναμική ενέργεια αυξάνεται *τετραγωνικά* με την επιμήκυνση ή συμπίεση *x*
  - Αυτό αντικατοπτρίζει τη *γραμμική αύξηση* της δύναμης του ελατηρίου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ενα παιδικό πιστόλι εκτοξεύει ένα βέλος με τη βοήθεια ενός συμπιεσμένου ελατηρίου. Η σταθερά του ελατηρίου είναι $3{,}2 \times 10^2$ N/m και η μάζα του βέλους είναι 8,0 g. Πριν από την εκτόξευση το ελατήριο συμπιέζεται κατά 6,0 cm και το βέλος φέρνεται σ' επαφή με το ελατήριο (Σχ. 8.3)· το ελατήριο μετά ελευθερώνεται. Πόση θα είναι η ταχύτητα του βέλους όταν το ελατήριο αποκτήσει το μήκος ισορροπίας του;

Η αρχική ενέργεια στο σημείο $x_1 = -6$ cm είναι:

$E = ½ mυ_1^2 + ½ kx_1^2 = 0 + ½ kx_1^2$



Η ενέργεια στο $x_2 = 0$ cm είναι:

$E = ½ mυ_2^2 + ½ kx_2^2 = ½ mυ_2^2 + 0$

Άρα,

$½ kx_1^2 = ½ mυ_2^2 \rightarrow \quad υ_2 = \sqrt{k/m}\,x_1 = 12 m/s$

Μη διατηρητική δύναμη

Τέλος, τί συμβαίνει εάν δρουν σ' ένα σωματίδιο τόσο μία διατηρητική όσο και μία μη διατηρητική δύναμη, όπως λ.χ. τριβή; Τότε, το άθροισμα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας θα ισούται με το έργο που παράγεται από τη μη διατηρητική δύναμη

$\Delta K + \Delta U = 0$ όχι

$\Delta K + \Delta U = \Delta E = W_{\text{μη διατηρητική}}$

Όχι τόσο χρήσιμη, όσο η σχέση που ισχύει όταν δεν υπάρχουν διατηρητικές δυνάμεις (υπολογισμός θέσης-ταχύτητας από τη σχέση ΔK+ΔU=0, βλ. παραπάνω παραδείγματα),

διότι η τιμή της $W_{\text{μη διατηρητική}}$ δεν εξαρτάται μόνο από τη μεταβολή της θέσης αλλά και από τις λεπτομέρειες της κίνησης,

και άρα

το $W_{\text{μη διατηρητική}}$ δεν μπορεί να υπολογιστεί επακριβώς εκτός και αν γίνουν γνωστές οι λεπτομέρειες της κίνησης

Μη διατηρητική δύναμη

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Κατά τη μελέτη των ζημιών που προκύπτουν μετά από σύγκρουση, ένα αυτοκίνητο μάζας 1800 kg πέφτει από ύψος 9,50 m σε στόχο, στον οποίο είχαν προσαρτηθεί διάφορα όργανα μέτρησης (βλ. Σχ. 8.4). Το αυτοκίνητο, μετά τη σύγκρουση, αναπήδησε 0,10 m. Πόσο έργο παρήχθη από μη διατηρητικές δυνάμεις κατά τη σύγκρουση;

ΛΥΣΗ: Η αρχική ενέργεια του αυτοκινήτου είναι αμιγώς δυναμική,

$$U_1 = mgz_1 = 1800\ \mathrm{kg} \times 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \times 9{,}50\ \mathrm{m} = 1{,}68 \times 10^5\ \mathrm{J}$$

Η τελική ενέργεια, στο υψηλότερο σημείο μετά τη σύγκρουση είναι ξανά αμιγώς δυναμική,

$$U_2 = mgz_2 = 1800\ \mathrm{kg} \times 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \times 0{,}10\ \mathrm{m} = 0{,}018 \times 10^5\ \mathrm{J}$$

Επομένως, η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας κατά τη σύγκρουση είναι

$$\Delta E = 1{,}68 \times 10^5\ \mathrm{J} - 0{,}018 \times 10^5\ \mathrm{J} = 1{,}66 \times 10^5\ \mathrm{J}$$

και, σύμφωνα με την Εξ. (16) αυτή πρέπει να ισούται με το έργο που παρήχθη από τις μη διατηρητικές δυνάμεις. Το έργο που παράγεται από αυτές τις δυνάμεις προκαλεί το τσάκισμα του εμπρόσθιου μέρους του αυτοκινήτου, καθώς επίσης και την παραγωγή κάποιας ποσότητας θερμότητας, εξαιτίας εσωτερικών τριβών των μεταλλικών μερών την ώρα που παραμορφώνονται.

Υπολογισμός της δύναμης από τη δυναμική ενέργεια

$$\boxed{U(P) = -\int_{P_0}^{P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + U(P_0)} \longrightarrow dU = U(P) - U(P_0) = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$dU = -F_x\,dx - F_y\,dy - F_z\,dz$$

Και στην περίπτωση που dy=0 και dz=0, έτσι ώστε $dU = -F_x dx$ ή $F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x}$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Αν για παράδειγμα η δυναμική ενέργεια ελατηρίου είναι: $U(x) = \frac{1}{2} kx^2$, τότε :

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial(\frac{1}{2}k\,x^2)}{\partial x} = -kx$$

Άλλες μορφές ενέργειας

Θερμότητα: η άτακτη κινητική και δυναμική ενέργεια των ατόμων ενός σώματος, π.χ. εξαιτίας της τριβής.

Χημική ενέργεια: κινητική και δυναμική ενέργεια των ηλεκτρονίων στο εσωτερικό των ατόμων

Πυρηνική ενέργεια: κινητική και δυναμική ενέργεια των πρωτονίων και νετρονίων στο εσωτερικό των πυρήνων των ατόμων

Μονάδες: $1\ \mathrm{eV} = 1{,}602\times10^{-19}\ \mathrm{J}$

$1\ \mathrm{kW\cdot h} = 3600\times10^{6}\ \mathrm{J}$

$1\ \mathrm{kcal} = 4{,}187\times10^{3}\ \mathrm{J}$

$1\ \mathrm{Btu} = 1{,}055\times10^{3}\ \mathrm{J}$

Πίνακας. Μερικές ενέργειες

Πυρηνικό καύσιμο στον Ήλιο	1×10^{45} J
Εκρηξη supernova	1×10^{44} J
Ορυκτά καύσιμα της Γης	$2{,}0 \times 10^{23}$ J
Ετήσια κατανάλωση ενέργειας στις ΗΠΑ	8×10^{19} J
Εκρηξη ηφαιστείου (Krakatoa)	6×10^{18} J
Εξαΰλωση 1 kg ύλης – αντιύλης	$9{,}0 \times 10^{16}$ J
Πυρηνικό καύσιμο σε πυρηνικό αντιδραστήρα	1×10^{16} J
Εκρηξη θερμοπυρηνικής βόμβας (1 μεγατόννου)	$4{,}2 \times 10^{15}$ J
Σχάση 1 kg ουρανίου	$8{,}2 \times 10^{13}$ J
Βαρυτική δυναμική ενέργεια αεριωθούμενου (Boeing 747 στα 9000 m)	2×10^{10} J
Κεραυνός	1×10^{9} J
Καύση 1 γαλονιού βενζίνης (~ 3,79 l)	$1{,}3 \times 10^{8}$ J
Ημερήσια κατανάλωση τροφής ανθρώπου (3000 kcal)	$1{,}3 \times 10^{7}$ J
Εκρηξη 1 kg TNT	$4{,}6 \times 10^{6}$ J
Μεταβολισμός ενός μήλου (110 kcal)	$4{,}6 \times 10^{5}$ J
Κινητική ενέργεια δρομέα	4×10^{3} J
Ενα "push-up"	3×10^{2} J
Σχάση ενός ατόμου ουρανίου	$3{,}2 \times 10^{-11}$ J
Εξαΰλωση ενός ζεύγους ηλεκτρονίου – ποζιτρονίου	$1{,}6 \times 10^{-13}$ J
Ενέργεια ιονισμού ατόμου υδρογόνου	$2{,}2 \times 10^{-18}$ J

Επίλυση προβλημάτων που αφορούν τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

- **Ερμηνεύστε** το πρόβλημα για να βεβαιωθείτε ότι όλες οι δυνάμεις διατηρητικές, επομένως η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Προσδιορίσετε την ποσότητα που ζητά το πρόβλημα, η οποία μπορεί να είναι η ίδια η ενέργεια ή μια άλλη σχετική ποσότητα

- **Αναπτύξτε** το σχέδιό σας για την επίλυση του προβλήματος σχεδιάζοντας το σώμα σε μια κατάσταση στην οποία μπορείτε να προσδιορίσετε τόσο την κινητική όσο και τη δυναμική ενέργεια και στη συνέχεια στην κατάσταση στην οποία μία ποσότητα είναι άγνωστη. Σχεδιάστε επίσης απλά ραβδογράμματα που υποδεικνύουν τα σχετικά μεγέθη των ποικίλων μορφών ενέργειας
  - Γράψτε την εξίσωση $K + U = K_0 + U_0$

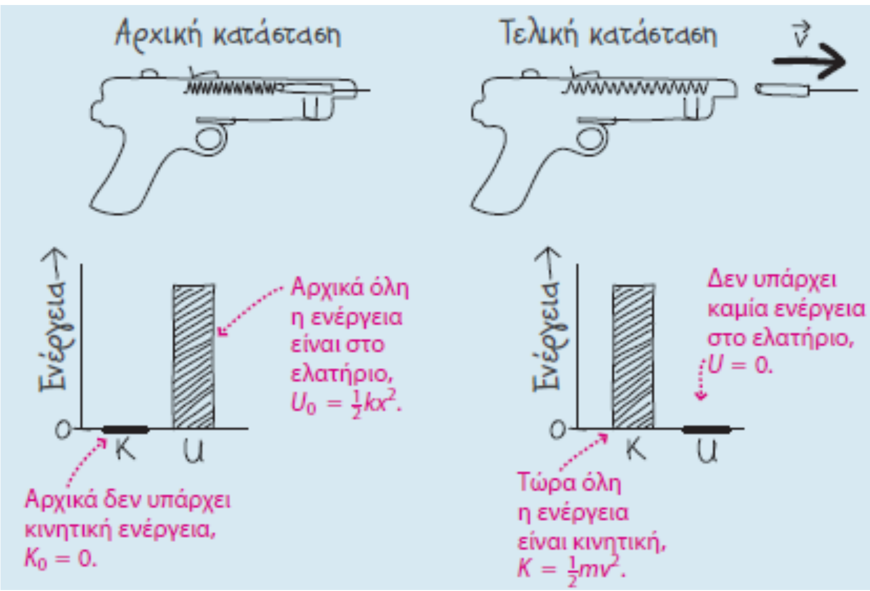
- **Υπολογίστε** για να επιλύσετε για την άγνωστη ποσότητα, η οποία μπορεί να είναι κάποια ενέργεια, η επιμήκυνση ενός ελατηρίου, η ταχύτητα κ.λπ.

- **Αξιολογήστε** τη λύση σας για να διαπιστώσετε ότι η απάντησή σας είναι λογική, ότι περιλαμβάνει τις κατάλληλες μονάδες και ότι είναι σύμφωνη με τα ραβδογράμματά σας

Παραδείγματα

Ένα πιστόλι ελατηρίου με βέλη.

Ποια είναι η ταχύτητα του βέλους;



$K + U = K_0 + U_0$ γίνεται

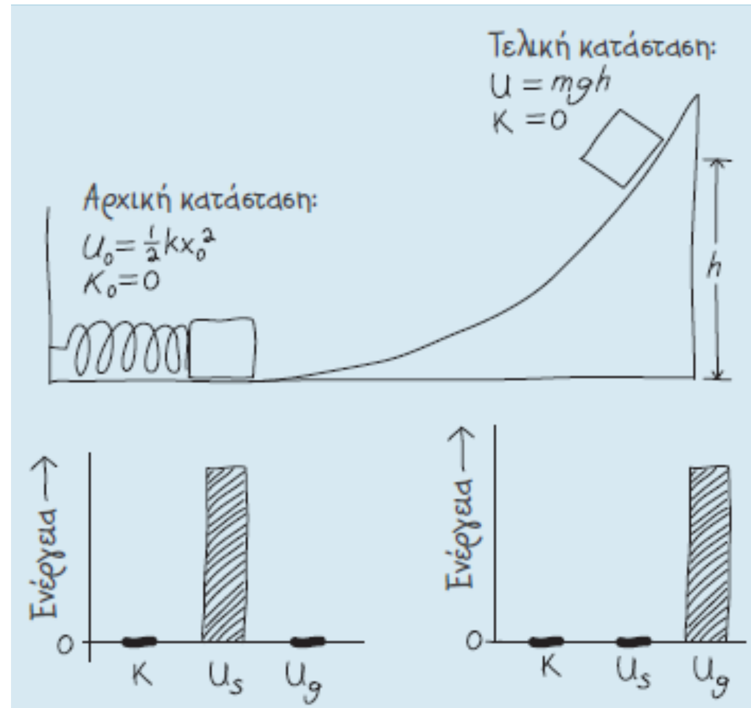
$$\tfrac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

Επομένως, $v = \sqrt{k/m}\,x$

όπου x είναι η αρχική συμπίεση του ελατηρίου

Ένα ελατήριο και η βαρύτητα.

Πόσο ψηλά φτάνει το κιβώτιο;



$K + U = K_0 + U_0$ γίνεται

$$0 + mgh = 0 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

Επομένως $h = \dfrac{kx^2}{2mg}$

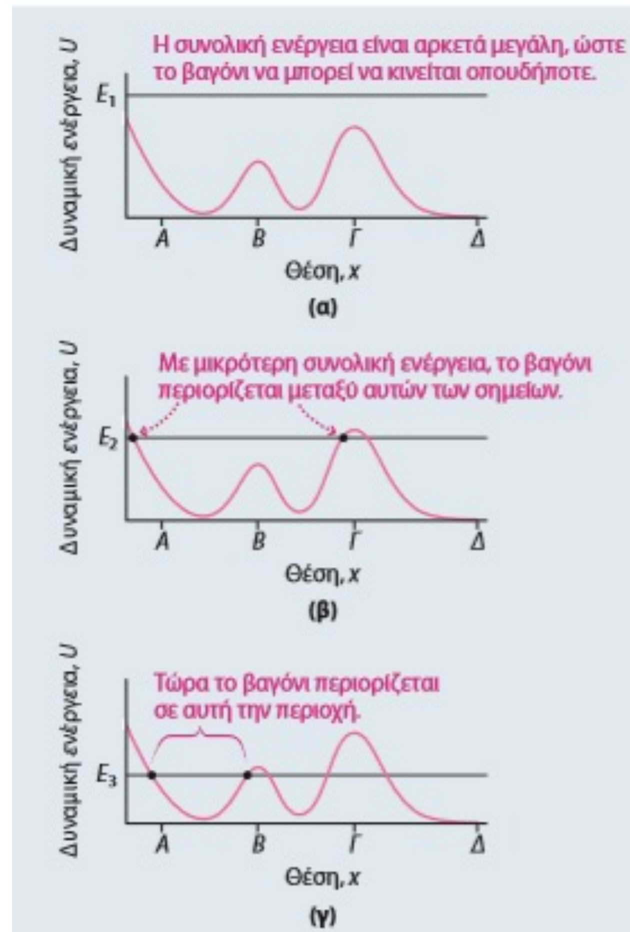
Καμπύλες δυναμικής ενέργειας

- Οι καμπύλες δυναμικής ενέργειας αναπαριστάνουν τη δυναμική ενέργεια ενός συστήματος ως συνάρτηση της θέσης και άλλων ποσοτήτων που αντιπροσωπεύουν τη διαμόρφωση του συστήματος

- Ένα σώμα με μια δεδομένη συνολική ενέργεια μπορεί να είναι «παγιδευμένο» σε ένα «πηγάδι δυναμικού» που δημιουργείται από τα σημεία στα οποία η συνολική ενέργεια είναι ίση με τη δυναμική ενέργεια

- Αυτά τα σημεία είναι **σημεία αναστροφής**, πέρα από τα οποία ένα σώμα δεν μπορεί να κινηθεί δεδομένης της σταθερής συνολικής του ενέργειας

Καμπύλες δυναμικής ενέργειας για το βαγόνι ενός τρένου λούνα παρκ με τρειςδιαφορετικές συνολικές ενέργειες :



Δύναμη και δυναμική ενέργεια

- Η δύναμη είναι μεγαλύτερη στα σημεία όπου το γράφημα είναι απότομο – δηλαδή εκεί όπου η δυναμική ενέργεια μεταβάλλεται ταχύτερα

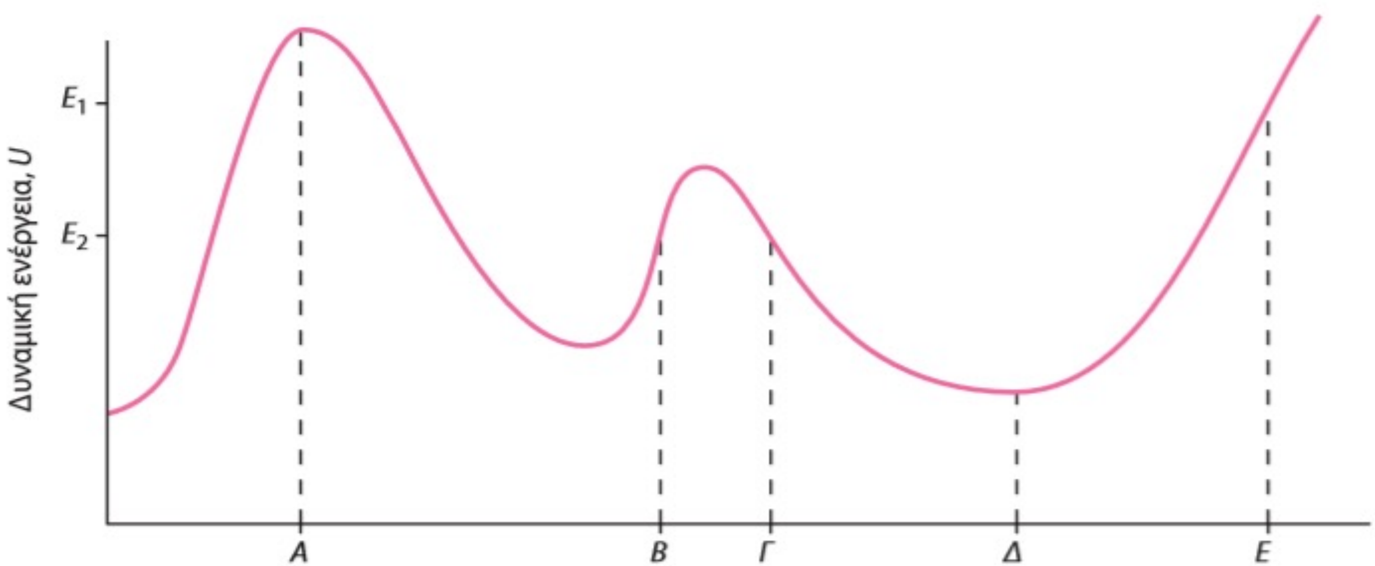
- Μαθηματικά, η συνιστώσα της δύναμης σε μια δεδομένη κατεύθυνση είναι η αρνητική παράγωγος της δυναμικής ενέργειας ως προς τη θέση σε αυτή την κατεύθυνση:

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

Το κατανοήσατε;

Το σχήμα δείχνει τη δυναμική ενέργεια που σχετίζεται με ένα ηλεκτρόνιο σε μια μικροηλεκτρονική συσκευή.

1. Σε ποιο από τα σημεία που έχουν επισημανθεί η δύναμη επί του ηλεκτρονίου είναι μεγαλύτερη;
2. Μέχρι ποιο σημείο προς τα δεξιά μπορεί να φτάσει το ηλεκτρόνιο αν έχει ολική ενέργεια E_1 και ξεκινά από το A ;
3. Αν έχει ολική ενέργεια E_2 και ξεκινά από το Δ μέχρι ποιο σημείο προς τα αριστερά μπορεί να πάει ;
4. Σε ποια σημεία δέχεται μηδενική δύναμη ;
5. Σε ποια σημεία η δύναμη που δέχεται είναι προς τα αριστερά ;



Μάζα και ενέργεια

Η ενέργεια μπορεί να μετατραπεί σε μάζα και αντίστροφα (θεωρία σχετικότητας Einstein):

$$E = mc^2 \qquad (c = 3{,}00\times10^8 \text{ m/s})$$

ή

$$\Delta m = \Delta E/c^2$$

δηλ. η ενέργεια έχει μάζα,

δηλ. κάθε φορά που η ενέργεια ενός σώματος μεταβάλλεται, η μάζα του (και το βάρος του) μεταβάλλονται.

δηλ. όταν π.χ. αυξάνει η κινητική ενέργεια ενός σώματος, η μάζα του (και το βάρος του) αυξάνει.

Σε μικρές ταχύτητες η αύξηση της μάζας είναι ανεπαίσθητη, αλλά όταν π.χ. η ταχύτητα στοιχειωδών σωματιδίων φθάνει στο 0,9999999997×c η μάζα τους είναι 44.000 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του ηλεκτρονίου που ηρεμεί.

Μάζα και ενέργεια

Άρα, οι νόμοι διατήρησης της μάζας και της ενέργειας **δεν είναι δύο ανεξάρτητοι νόμοι**, αλλά ο ένας εξυπακούει τον άλλο.

π.χ. η αντίδραση σχάσης 1 kg U αποδίδει ενέργεια $8{,}2 \times 10^{13}$ J.

Η αντίδραση διατηρεί την ενέργεια, μετασχηματίζοντας την πυρηνική σε θερμότητα, φως και κινητική ενέργεια, αλλά δεν αλλάζει τη συνολική ποσότητα της ενέργειας (θάλαμος αντιδραστήρα ερμητικά κλειστός και θερμικά μονωμένος).

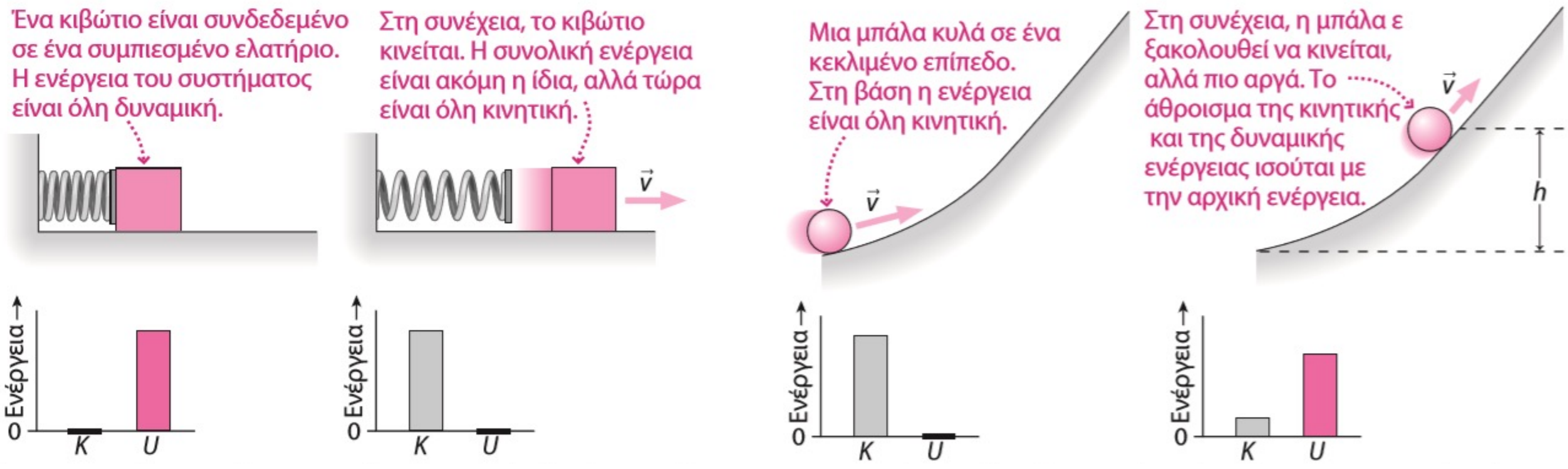
Αν ανοιχτεί, θα διαφύγει φως και θερμότητα και θα έχει χαθεί το 0,1% της μάζας του U. Το ίδιο φαινόμενο συμβαίνει και σε μια χημική (εξώθερμη) αντίδραση, όπου η μάζα των καταλοίπων είναι ελαφρώς μικρότερη (μη μετρήσιμη) από την αρχική μάζα.

Σύνοψη

- Η **δυναμική ενέργεια** είναι αποθηκευμένη ενέργεια που μπορεί να μετατραπεί σε κινητική ενέργεια

- Η μεταβολή στη δυναμική ενέργεια είναι το αρνητικό έργο που παράγεται από μια διατηρητική δύναμη, καθώς ένα σώμα κινείται σε οποιαδήποτε διαδρομή μεταξύ δύο σημείων: $$\boxed{\Delta U_{AB} = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

- Όταν δρουν μόνο διατηρητικές δυνάμεις, η συνολική μηχανική ενέργεια *K* + *U* διατηρείται:



- Οι **καμπύλες δυναμικής ενέργειας** περιγράφουν τη δυναμική ενέργεια ως συνάρτηση της θέσης και άλλων ποσοτήτων που αντιπροσωπεύουν τη διαμόρφωση του συστήματος

- Η **δύναμη** είναι η αρνητική παράγωγος της δυναμικής ενέργειας: $\boxed{F_x = -dU/dx.}$

Σύνοψη

Διατηρητική δύναμη: Το έργο που παράγεται από τη δύναμη δεν εξαρτάται από το δρόμο· εξαρτάται μόνο από τη θέση των ακραίων σημείων του δρόμου.

Δυναμική ενέργεια διατηρητικής δύναμης:

$$U(P) = -\int_{P_0}^{P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + U(P_0)$$

Μηχανική ενέργεια: $E = K + U$

Διατήρηση ενέργειας: $E = K + U = [\text{σταθερά}]$

Δυναμική ενέργεια ελατηρίου: $U(x) = \frac{1}{2} k x^2$

Απώλεια μηχανικής ενέργειας από μη διατηρητικές δυνάμεις: $\Delta E = W_{\text{μη διατηρητ.}}$

Δύναμη ως παράγωγος δυναμικής ενέργειας:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Η μάζα είναι μορφή ενέργειας: $E = mc^2$

Η ενέργεια έχει μάζα: $\Delta m = \Delta E / c^2$

Μέση ισχύς: $\overline{P} = \dfrac{\Delta W}{\Delta t}$

Στιγμιαία ισχύς: $P = \dfrac{dW}{dt}$

Μηχανική ισχύς προσφερομένη από δύναμη: $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

*28. Ο παρακάτω πίνακας περιέχει το ρυθμό ενεργειακής διασποράς ενός ανθρώπου που ασχολείται με διάφορες δραστηριότητες· οι ενέργειες δίνονται ανά χιλιόγραμμο μάζας σώματος:

ΡΥΘΜΟΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗΣ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΑΝΘΡΩΠΟΥ (ΑΝΔΡΟΣ, ΑΝΑ kg ΜΑΖΑΣ ΣΩΜΑΤΟΣ)

Οταν στέκεται	1,3 kcal/(kg · h)
Οταν βαδίζει (5 km/h)	3,3
Οταν τρέχει (8 km/h)	8,2
Οταν τρέχει (16 km/h)	15,2

Υποθέστε ότι ο άνθρωπος θέλει να διανύσει απόσταση 2,5 km σε μισή ώρα. Μπορεί να διανύσει αυτή την απόσταση ως εξής: είτε να περπατήσει ακριβώς μισή ώρα, είτε να τρέξει αργά και μετά να σταθεί ακίνητος ώς ότου περάσει η μισή ώρα, είτε να τρέξει γρήγορα και μετά να σταθεί ώς ότου περάσει η μισή ώρα. Πόση είναι η ενέργεια ανά kg σώματος για κάθε περίπτωση; Ποιό πρόγραμμα διασκορπίζει την περισσότερη ενέργεια; Ποιό τη λιγότερη;

*28. Ο παρακάτω πίνακας περιέχει το ρυθμό ενεργειακής διασποράς ενός ανθρώπου που ασχολείται με διάφορες δραστηριότητες· οι ενέργειες δίνονται ανά χιλιόγραμμο μάζας σώματος:

ΡΥΘΜΟΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗΣ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΑΝΘΡΩΠΟΥ (ΑΝΔΡΟΣ, ΑΝΑ kg ΜΑΖΑΣ ΣΩΜΑΤΟΣ)

Οταν στέκεται	1,3 kcal/(kg · h)
Οταν βαδίζει (5 km/h)	3,3
Οταν τρέχει (8 km/h)	8,2
Οταν τρέχει (16 km/h)	15,2

Υποθέστε ότι ο άνθρωπος θέλει να διανύσει απόσταση 2,5 km σε μισή ώρα. Μπορεί να διανύσει αυτή την απόσταση ως εξής: είτε να περπατήσει ακριβώς μισή ώρα, είτε να τρέξει αργά και μετά να σταθεί ακίνητος ώς ότου περάσει η μισή ώρα, είτε να τρέξει γρήγορα και μετά να σταθεί ώς ότου περάσει η μισή ώρα. Πόση είναι η ενέργεια ανά kg σώματος για κάθε περίπτωση; Ποιό πρόγραμμα διασκορπίζει την περισσότερη ενέργεια; Ποιό τη λιγότερη;

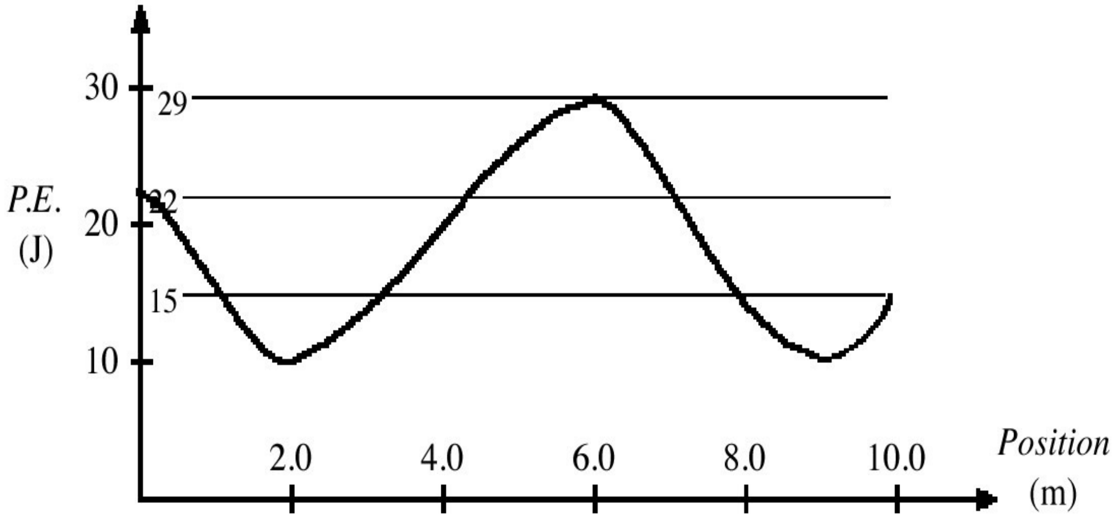
i) Ομοιόμορφο περπάτημα $E = \frac{3,3}{2} = 1,65$ kcal

ii) Τρέχει και μένει ακίνητος $E = (\frac{2,5}{8})\,8,2 + (0,5 - \frac{2,5}{8})\,1,3 = 2,8$ kcal

iii) Τρέχει γρήγορα και μένει ακίνητος

$$E = (\frac{2,5}{16})\,15,2 + (0,5 - \frac{2,5}{16})\,1,3 = 3,83 \text{ kcal}$$

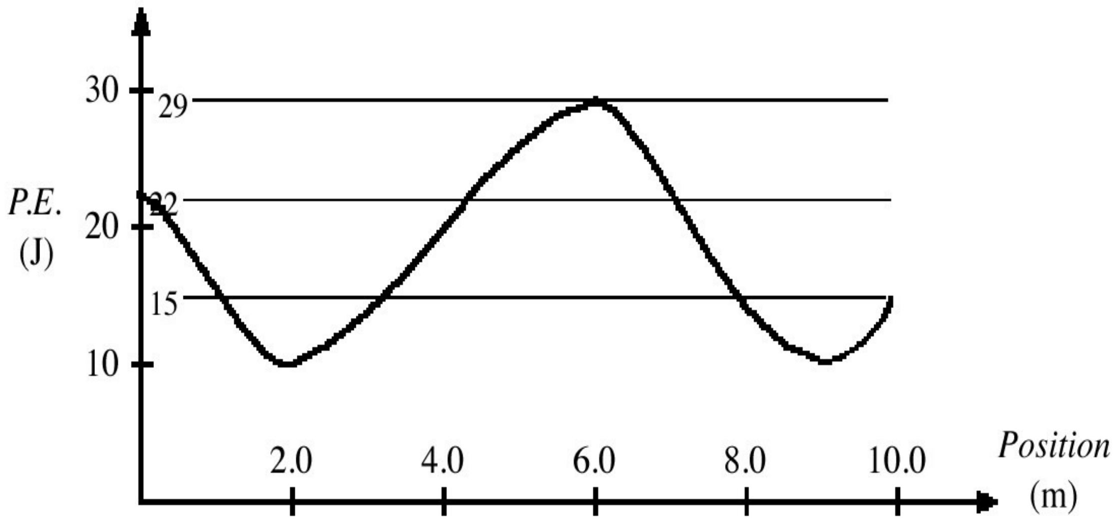
Μια μάζα 2,0 kg κινείται κατά μήκος του άξονα *x*.
Η καμπύλη της δυναμικής ενέργειας ως συνάρτηση της θέσης φαίνεται στο σχήμα.
Η κινητική ενέργεια του σώματος στην αρχή των αξόνων είναι ίση με 12 J.
Το σύστημα είναι διατηρητικό και δεν υπάρχει τριβή.



(α) Πόση θα είναι η κινητική ενέργεια στα 2,0 m κατά μήκος του άξονα *x*;

(β) Πόση θα είναι η ταχύτητα του σώματος στα 6,0 m κατά μήκος του άξονα *x*;

Μια μάζα 2,0 kg κινείται κατά μήκος του άξονα *x*.
Η καμπύλη της δυναμικής ενέργειας ως συνάρτηση της θέσης φαίνεται στο σχήμα.
Η κινητική ενέργεια του σώματος στην αρχή των αξόνων είναι ίση με 12 J.
Το σύστημα είναι διατηρητικό και δεν υπάρχει τριβή.



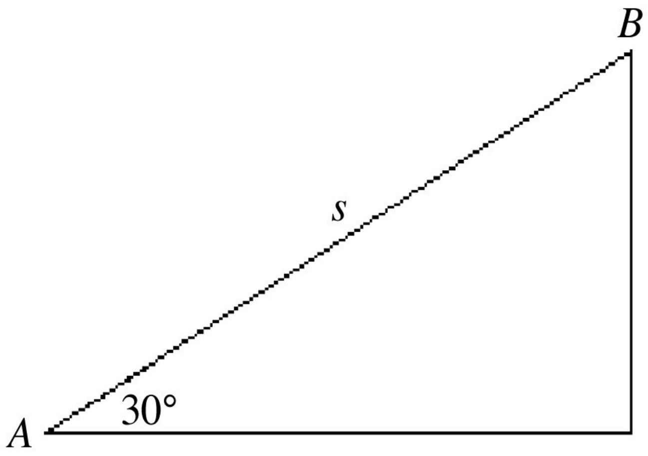
X=0m	X=2m	X=6m
K=12	K=24	K=5 K=1/2 mu² u=2,2 m/s
U=22	U=10	U=29
E=34	E=34	E=34

(α) Πόση θα είναι η κινητική ενέργεια στα 2,0 m κατά μήκος του άξονα *x*;   24 J

(β) Πόση θα είναι η ταχύτητα του σώματος στα 6,0 m κατά μήκος του άξονα *x*; 2,2 m/s

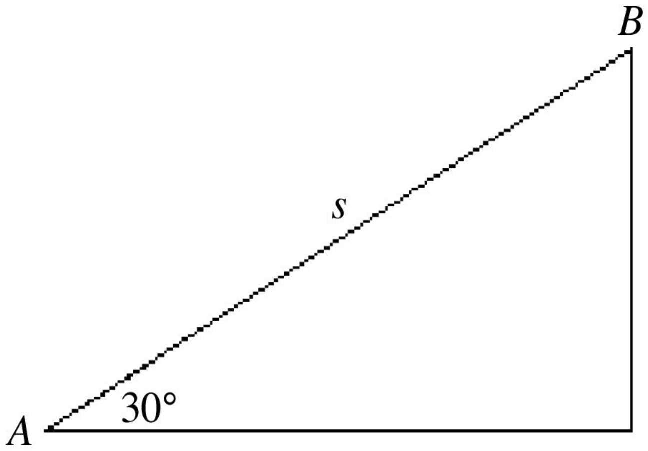
Απαιτείται έργο ίσο με 6,0 J, για την ώθηση ενός σώματος 2,0 kg από το σημείο *A* στο σημείο *B* της ράμπας χωρίς τριβή όπως φαίνεται στο σχήμα.

Πόσο είναι το μήκος *s* της ράμπας από το *A* στο *B*;



Απαιτείται έργο ίσο με 6,0 J, για την ώθηση ενός σώματος 2,0 kg από το σημείο *A* στο σημείο *B* της ράμπας χωρίς τριβή όπως φαίνεται στο σχήμα.

Πόσο είναι το μήκος *s* της ράμπας από το *A* στο *B*;



mgh=6

2X9,8Xh=6

h=0,30

s=0,30/sin30=0,6m

Στο σχήμα, μια μπάλα 4,0 kg βρίσκεται στο άκρο ενός σχοινιού 1,6 m το οποίο είναι στερεωμένο στο *0*. Η μπάλα συγκρατείται στο σημείο *A*, με το σχοινί οριζόντιο και της δίνεται μια αρχική ταχύτητα με κατεύθυνση προς τα κάτω. Η μπάλα διαγράφει τα τρία τέταρτα ενός κύκλου χωρίς τριβή και φτάνει στο *B*, με το σχοινί οριακά υπό τάση.

Η αρχική ταχύτητα της μπάλας στο σημείο *A*, βρίσκεται πιο κοντά στα

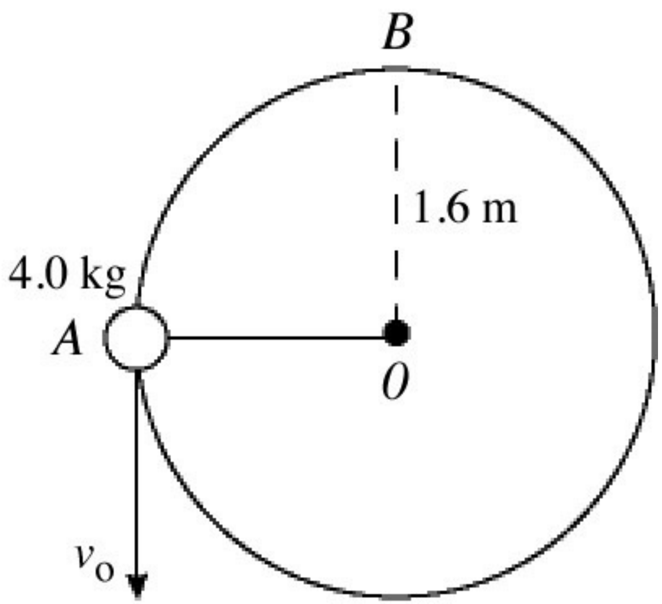
A) 4,0 m/s

B) 5,6 m/s

Γ) 6,3 m/s

Δ) 6,9 m/s

E) 7,9 m/s



Στο σχήμα, μια μπάλα 4,0 kg βρίσκεται στο άκρο ενός σχοινιού 1,6 m το οποίο είναι στερεωμένο στο *0*. Η μπάλα συγκρατείται στο σημείο *A*, με το σχοινί οριζόντιο και της δίνεται μια αρχική ταχύτητα με κατεύθυνση προς τα κάτω. Η μπάλα διαγράφει τα τρία τέταρτα ενός κύκλου χωρίς τριβή και φτάνει στο *B*, με το σχοινί οριακά υπό τάση.

Η αρχική ταχύτητα της μπάλας στο σημείο *A*, βρίσκεται πιο κοντά στα

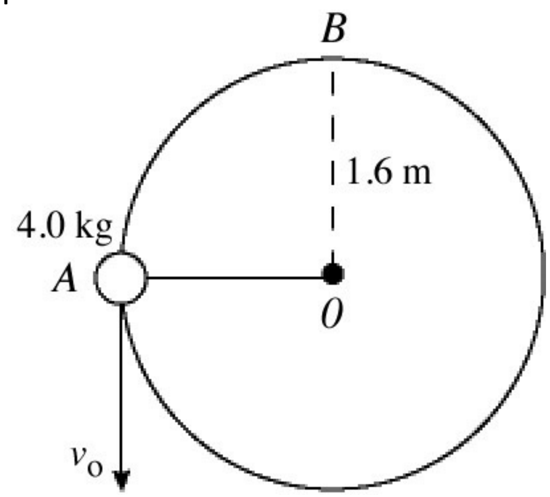
A) 4,0 m/s

B) 5,6 m/s

Γ) 6,3 m/s

Δ) 6,9 m/s

E) 7,9 m/s



Κεντρομόλος = Βάρος $\quad \frac{m v_B^2}{r} = mg \Rightarrow v_B = \sqrt{r \cdot g}$

$E_A = E_B \Rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 + mgh \Rightarrow \frac{1}{2} v_A^2 = \frac{1}{2}(r \cdot g) + g \cdot h$

$\Rightarrow \boxed{v_A = 6,9 \ m/s}$

Ένας αθλητής επιμηκύνει ένα ελατήριο 40,0 cm επιπλέον του αρχικού του μήκος. Πόση ενέργεια έχει μεταφέρει στο ελατήριο, εάν η σταθερά του ελατηρίου είναι ίση με 52,9 N/cm;

Α) 423 J

Β) 4230 kJ

Γ) 423 kJ

Δ) 4230 J

Μια μπάλα του τένις αναπηδά στο δάπεδο τρεις φορές. Εάν κάθε φορά χάνει 22,0% της ενέργειας του λόγω θερμότητας, πόσο ψηλά φτάνει μετά την τρίτη αναπήδηση, υπό την προϋπόθεση ότι την αφήσαμε ελεύθερη από ύψος 2,3 m από το δάπεδο;

Α) 110 cm

Β) 11 cm

Γ) 110 mm

Δ) 140 cm

Ένας αθλητής επιμηκύνει ένα ελατήριο 40,0 cm επιπλέον του αρχικού του μήκος. Πόση ενέργεια έχει μεταφέρει στο ελατήριο, εάν η σταθερά του ελατηρίου είναι ίση με 52,9 N/cm;

Α) 423 J

Β) 4230 kJ

Γ) 423 kJ

Δ) 4230 J

Α) 423 J

Μια μπάλα του τένις αναπηδά στο δάπεδο τρεις φορές. Εάν κάθε φορά χάνει 22,0% της ενέργειας του λόγω θερμότητας, πόσο ψηλά φτάνει μετά την τρίτη αναπήδηση, υπό την προϋπόθεση ότι την αφήσαμε ελεύθερη από ύψος 2,3 m από το δάπεδο;

Α) 110 cm

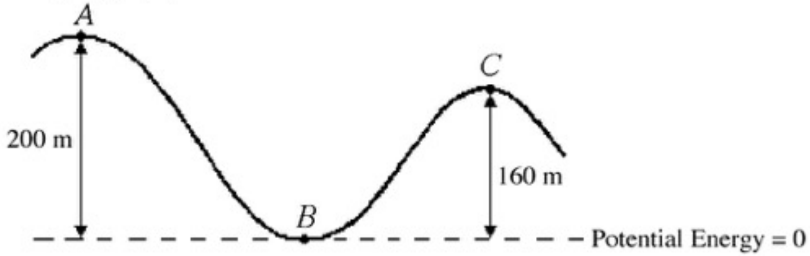
Β) 11 cm

Γ) 110 mm

Δ) 140 cm

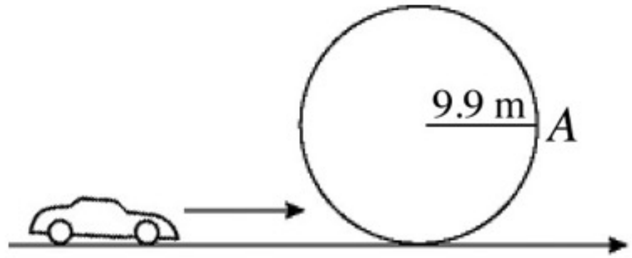
Α) 110 cm

7) Ένα τρενάκι του Λούνα Παρκ μάζας 80,0 kg κινείται στη θέση *A* με μέτρο ταχύτητας 20,0 m/s, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το κατακόρυφο ύψος στη θέση *A* από το επίπεδο της γης είναι ίσο με 200 m. Αγνοήστε την τριβή.

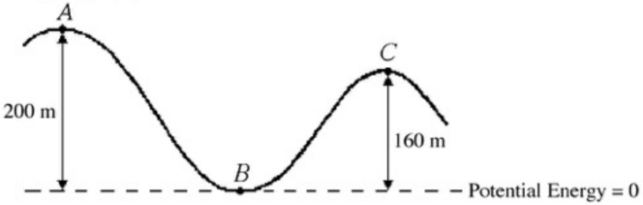


(α) Πόση είναι η συνολική μηχανική ενέργεια του τρένου στο σημείο *A*;
(β) Πόση είναι η συνολική μηχανική ενέργεια του τρένου στο σημείο *B*;
(γ) Πόση είναι το μέτρο της ταχύτητας του τρένου στο σημείο *B*;
(δ) Πόση είναι ο μέτρο της ταχύτητας του τρένου στο σημείο *Γ*;

Στο σχήμα, ένας οδηγός κασκαντέρ μπαίνει στη χωρίς τριβή πίστα που φαίνεται στο σχήμα, με τρόπο ώστε το αυτοκίνητο να βρίσκεται οριακά σε επαφή με τη πίστα στο πάνω μέρος του βρόχου. Η ακτίνα της πίστας είναι ίση με 9,9 m και η μάζα του αυτοκινήτου 1800 kg. Βρείτε το μέτρο της δύναμης του αυτοκινήτου στην πίστα, όταν το αυτοκίνητο βρίσκεται στο σημείο *A*. Μπορείτε να θεωρήσετε ότι το αυτοκίνητο είναι μια σημειακή μάζα.



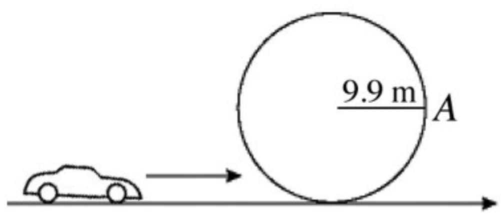
7) Ένα τρενάκι του Λούνα Παρκ μάζας 80,0 kg κινείται στη θέση *A* με μέτρο ταχύτητας 20,0 m/s, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το κατακόρυφο ύψος στη θέση *A* από το επίπεδο της γης είναι ίσο με 200 m. Αγνοήστε την τριβή.



(α) Πόση είναι η συνολική μηχανική ενέργεια του τρένου στο σημείο *A*;
(β) Πόση είναι η συνολική μηχανική ενέργεια του τρένου στο σημείο *B*;
(γ) Πόση είναι το μέτρο της ταχύτητας του τρένου στο σημείο *B*;
(δ) Πόση είναι ο μέτρο της ταχύτητας του τρένου στο σημείο *Γ*;

(α) $1{,}73 \times 10^5$ J (β) $1{,}73 \times 10^5$ J (γ) 65,7 m/s (δ) 34,4 m/s

Στο σχήμα, ένας οδηγός κασκαντέρ μπαίνει στη χωρίς τριβή πίστα που φαίνεται στο σχήμα, με τρόπο ώστε το αυτοκίνητο να βρίσκεται οριακά σε επαφή με τη πίστα στο πάνω μέρος του βρόχου. Η ακτίνα της πίστας είναι ίση με 9,9 m και η μάζα του αυτοκινήτου 1800 kg. Βρείτε το μέτρο της δύναμης του αυτοκινήτου στην πίστα, όταν το αυτοκίνητο βρίσκεται στο σημείο *A*. Μπορείτε να θεωρήσετε ότι το αυτοκίνητο είναι μια σημειακή μάζα.



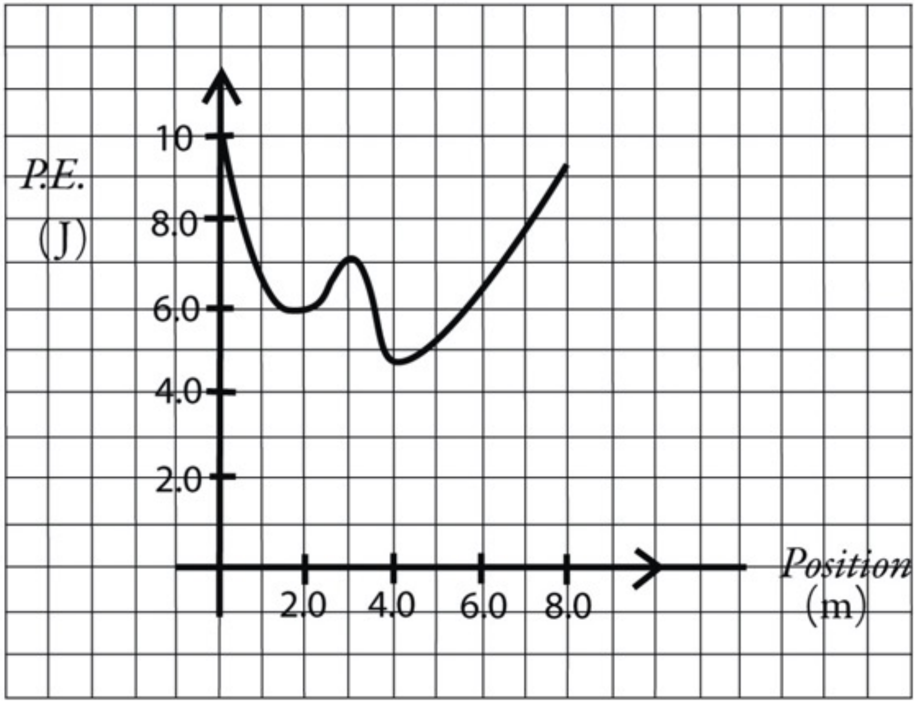
53.000 N

$$E_{πάνω} = E_A \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{πάνω}^2 + mg(9.9 \times 2) = \frac{1}{2} m v_A^2 + mg(9.9) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} (\sqrt{r \cdot g})^2 + \cancel{m} g (19{,}8) = \frac{1}{2} \cancel{m} v_A^2 + \cancel{m} g (9{,}9) \Rightarrow \boxed{v_A = 17{,}05\ m/s}$$

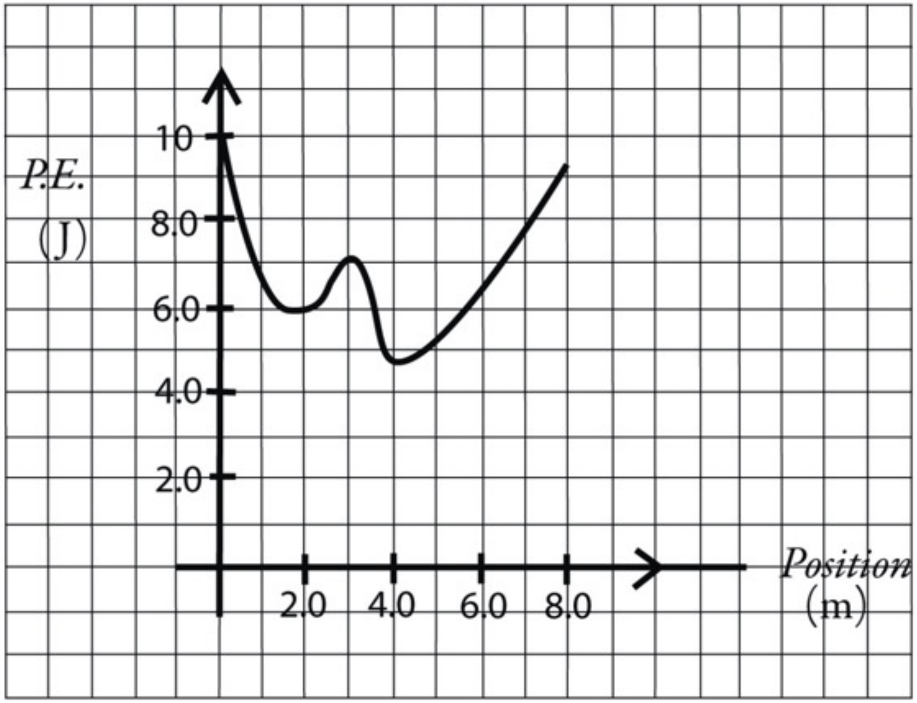
Δύναμη F στο A = με την κεντρομόλο $\frac{m v_A^2}{r} = \boxed{53{,}000N}$

Ένα σώμα 2,0 kg κινείται χωρίς τριβή κατά μήκος του άξονα *x*. Η καμπύλη της δυναμικής ενέργειας ως συνάρτηση της θέσης φαίνεται στο σχήμα και το σύστημα είναι διατηρητικό. Εάν το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στην αρχή των αξόνων είναι ίσο με 4,0 m/s, πόσο θα είναι το μέτρο της ταχύτητας στα 7,0 m κατά μήκος του άξονα *x*;



Α) 4,0 m/s
Β) 4,2 m/s
Γ) 4,4 m/s
Δ) 4,6 m/s
Ε) 9,8 m/s

Ένα σώμα 2,0 kg κινείται χωρίς τριβή κατά μήκος του άξονα *x*. Η καμπύλη της δυναμικής ενέργειας ως συνάρτηση της θέσης φαίνεται στο σχήμα και το σύστημα είναι διατηρητικό. Εάν το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στην αρχή των αξόνων είναι ίσο με 4,0 m/s, πόσο θα είναι το μέτρο της ταχύτητας στα 7,0 m κατά μήκος του άξονα *x*;



A) 4,0 m/s
B) 4,2 m/s
Γ) 4,4 m/s
Δ) 4,6 m/s
Ε) 9,8 m/s

B) 4,2 m/s