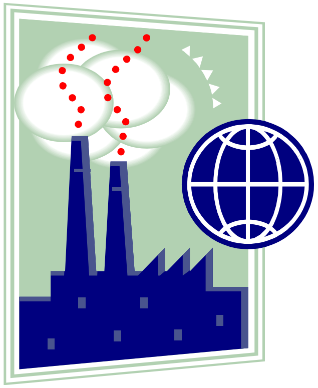
Κεφάλαιο 6



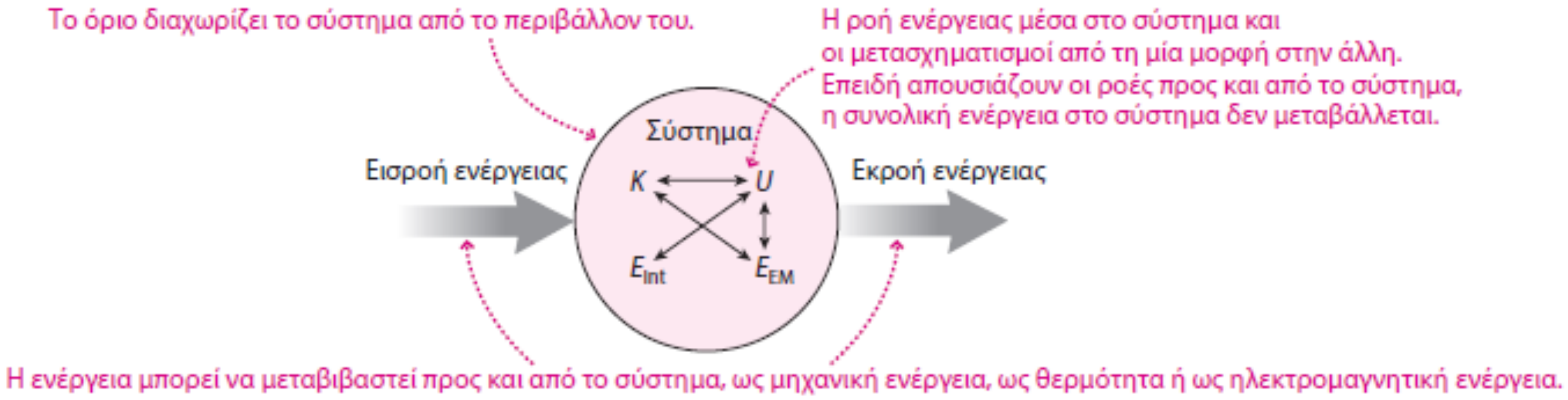
Ενέργεια, έργο και ισχύς

Τι μαθαίνετε

- Την έννοια της ενέργειας
- Πώς να υπολογίζετε το έργο
  - Από μια σταθερή δύναμη
  - Από μια δύναμη που μεταβάλλεται με τη θέση
- Την έννοια της κινητικής ενέργειας
  - Το θεώρημα έργου-ενέργειας
- Την ισχύ και τη σχέση της με την ενέργεια

Ενέργεια

- Παρότι μιλάμε για παραγωγή και κατανάλωση ενέργειας, στην πραγματικότητα η ενέργεια διατηρείται
- Αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια μπορεί να ρέει μέσα ή έξω από ένα σύστημα ή να αλλάζει μορφή, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί
- Η ενέργεια διακρίνεται σε:
  - Κινητική ενέργεια (ενέργεια της κίνησης)
  - Δυναμική ενέργεια (ενέργεια θέσης ή διαμόρφωσης)
  - Εσωτερική ενέργεια (ενέργεια τυχαίων κινήσεων ή διαμόρφωσης σε μοριακό επίπεδο)



Έργο

- Για ένα σώμα που κινείται σε μία διάσταση, το έργο *W* που παράγεται στο σώμα από μια σταθερά εφαρμοζόμενη δύναμη $\vec{F}$ είναι :

$$W = F_x \Delta x$$

όπου F_x η συνιστώσα της δύναμης στην κατεύθυνση της κίνησης του σώματος και Δx η μετατόπισή του

- Η μονάδα SI του έργου είναι το joule (J): 1 J = 1 newton x meter

Έργο σε μια διάσταση

Νόμοι διατήρησης: ενέργειας

ορμής

στροφορμής

μάζας

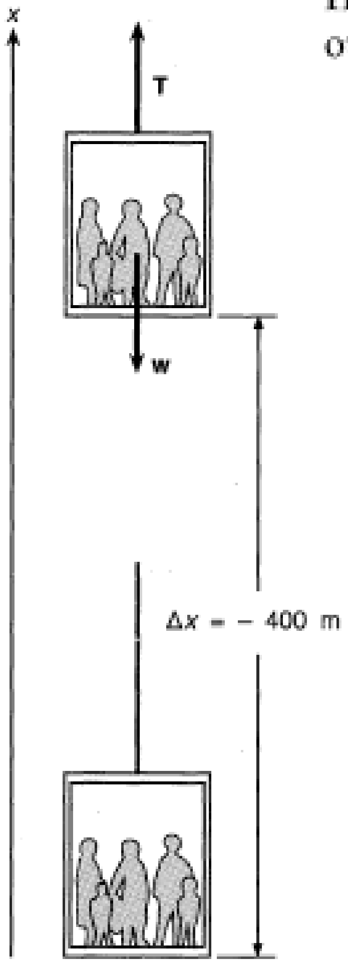
$$\mathbf{W = F_x \cdot \Delta x}$$

1 Joule = 1 J = 1 N·m = 1 kg·m^2/s^2

1 ft·lbf = 1ft × 1 lbf = 1,356 J

James Prescott Joule *(προφέρεται τζουλ) 1818 – 1889, Αγγλος φυσικός. Απέδειξε πειραματικά ότι η θερμότητα είναι μια μορφή μηχανικής ενέργειας και έκανε την πρώτη άμεση μέτρηση του μηχανικού ισοδυνάμου της θερμότητας. Με μια σειρά από μεγάλης ακριβείας μηχανικά, θερμικά και ηλεκτρικά πειράματα προσέφερε την πειραματική απόδειξη του γενικού νόμου διατήρησης της ενέργειας.*

Έργο σε μια διάσταση



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Θαλαμίσκος ανελκυστήρα 900 kg κατέρχεται 400 m μέσα σ' έναν ουρανοξύστη. Πόσο είναι το έργο που παρήγαγε η βαρύτητα κατ' αυτή τη μετατόπιση;

$$W = F_x \Delta x = (-8{,}8 \times 10^3 \text{ N}) \times (-400 \text{ m})$$

$$= 3{,}5 \times 10^6 \text{ J}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Υποθέτοντας ότι ο θαλαμίσκος του ανελκυστήρα του Παραδείγματος 1 κατέρχεται με σταθερή ταχύτητα, πόσο είναι το έργο που παράγεται από την τάση του καλωδίου ανάρτησης;

ΛΥΣΗ: Για κίνηση με σταθερή ταχύτητα η τάση του καλωδίου πρέπει να εξισορροπεί το βάρος. Επομένως, η τείνουσα δύναμη έχει το ίδιο μέτρο με το βάρος αλλά αντίθετη φορά, $F_x = T = +8{,}8 \times 10^3$ N. Το έργο που παράγεται από τη δύναμη ισούται, τότε, με

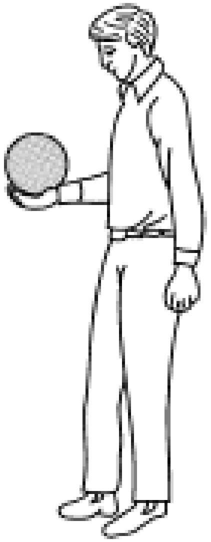
$$W = F_x \Delta x = (8{,}8 \times 10^3 \text{ N}) \times (-400 \text{ m})$$

$$= -3{,}5 \times 10^6 \text{ J}$$

Έργο σε μια διάσταση

Ο άνθρωπος παράγει έργο (όχι χρήσιμο) στην πραγματικότητα, αλλά επειδή $\Delta x=0$ φαίνεται ότι δεν παράγεται έργο (η ανθρώπινη μηχανή θα ήταν πιο αποδοτική αν είχε προβλεφθεί μηχανισμός ακαμψίας)

Αν ο άνθρωπος κινείται μέσα σε ανελκυστήρα, τότε $\Delta x>0$ και επειδή η μετατόπιση και η δύναμη είναι ομόρροπες → έργο θετικό



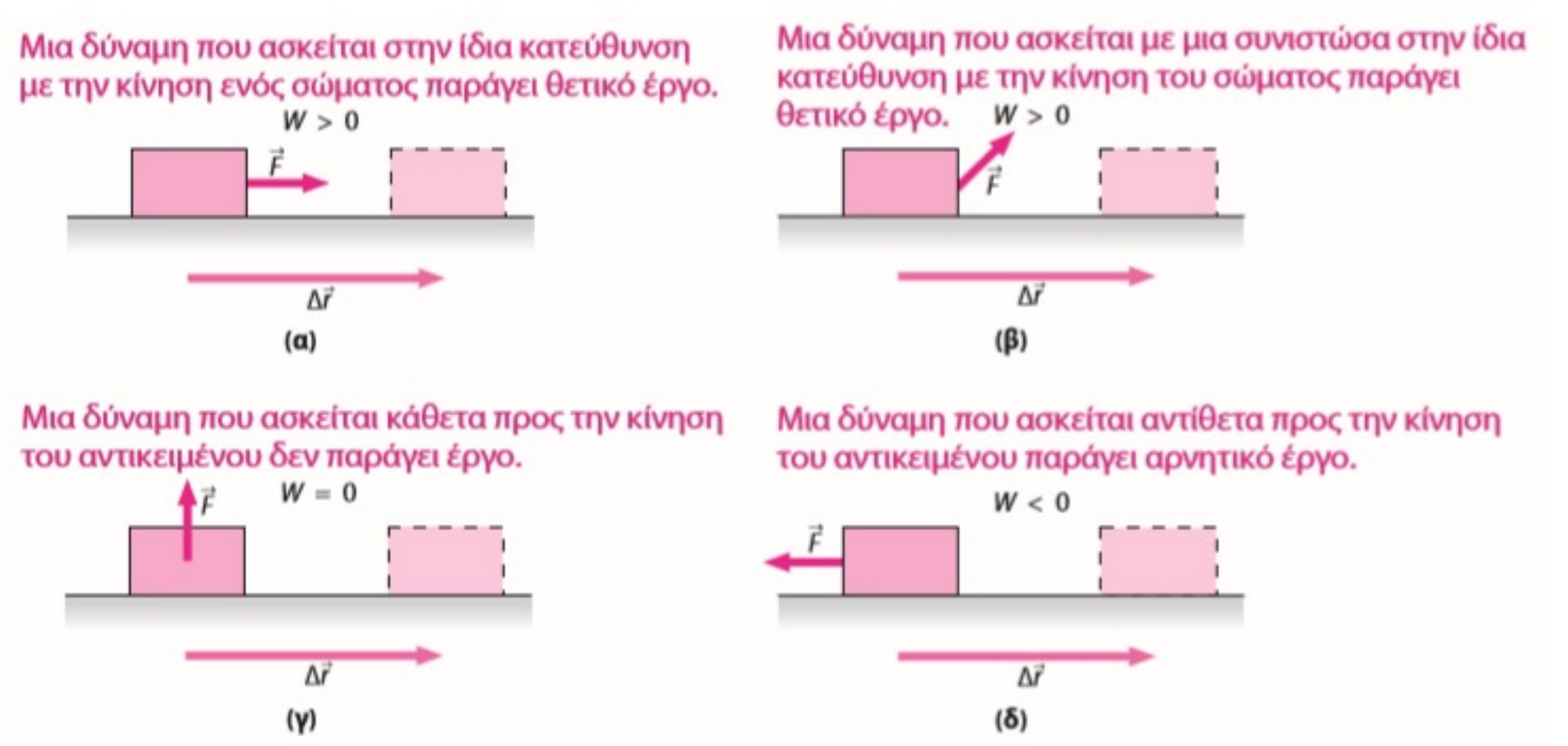
Στο σύστημα αναφοράς του εδάφους,
η μπάλα κινείται προς τα πάνω και παράγεται επάνω της έργο.

Στο σύστημα αναφοράς του ανελκυστήρα,
η μπάλα ηρεμεί και δεν παράγεται έργο επάνω της.

Άρα,
πριν τον υπολογισμό του έργου πρέπει να καθοριστεί σαφώς το σύστημα αναφοράς.

Το έργο μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό

- Το έργο είναι θετικό αν η δύναμη έχει μια συνιστώσα στην ίδια κατεύθυνση με την κίνηση
- Το έργο είναι αρνητικό αν η δύναμη έχει μια συνιστώσα σε κατεύθυνση αντίθετη με την κίνηση
- Το έργο είναι μηδενικό αν η δύναμη είναι κάθετη προς την κίνηση



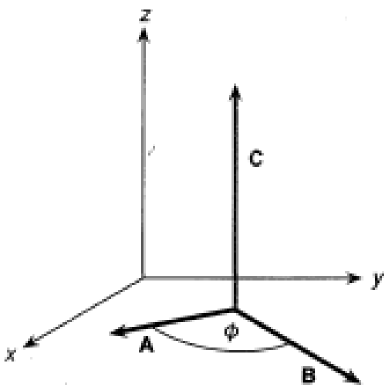
Πολλαπλασιασμός διανυσμάτων

Εσωτερικό Γινόμενο (δίνει αριθμό, όχι διάνυσμα)

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\phi \qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = AA\cos 0 = A^2$$

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}$$

Εξωτερικό Γινόμενο (δίνει διάνυσμα)

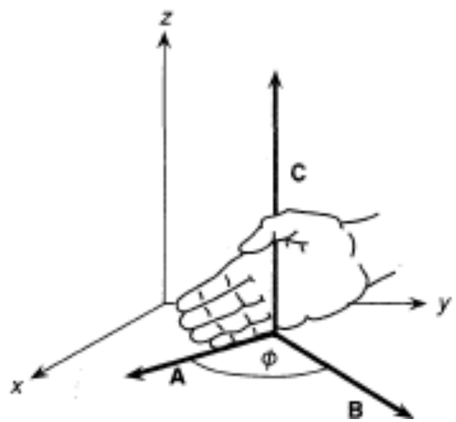


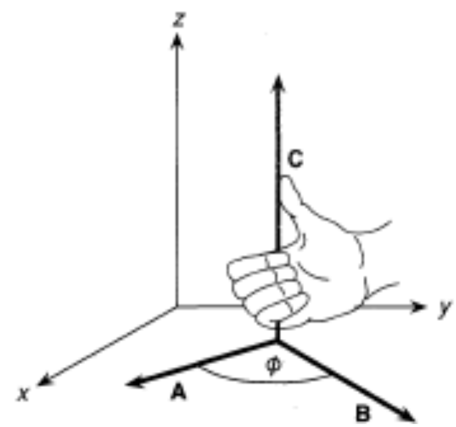
$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

$$C = AB\sin\phi$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0$$





$$\boxed{\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\,\widehat{\mathbf{x}} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\widehat{\mathbf{y}} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\widehat{\mathbf{z}}}$$

$$\boxed{\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{x}} & \widehat{\mathbf{y}} & \widehat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}}$$

Το εσωτερικό γινόμενο

- Το έργο καθορίζεται εύκολα με τη χρήση του *εσωτερικού γινομένου*, ενός τρόπου συνδυασμού δύο διανυσμάτων για την παραγωγή ενός βαθμωτού που εξαρτάται από τα μέτρα των διανυσμάτων και τη μεταξύ τους γωνία

- Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{B}$ ορίζεται ως $\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$

  όπου *A* και *B* τα μέτρα των διανυσμάτων και *θ* η μεταξύ τους γωνία

- Με τα διανύσματα με μορφή μοναδιαίων διανυσμάτων, $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ και $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$, το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

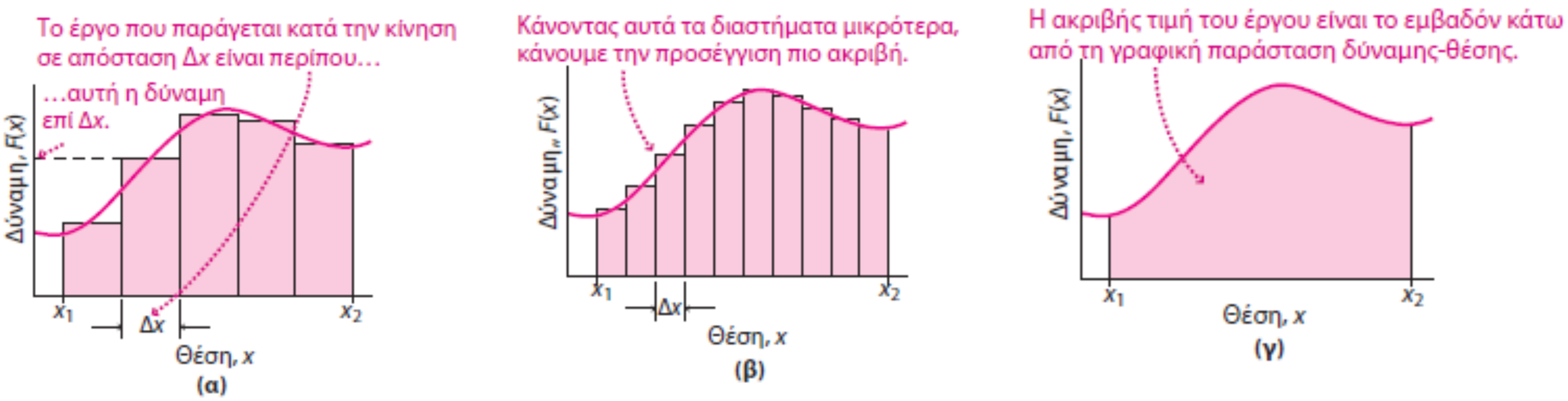
- Το έργο είναι το εσωτερικό γινόμενο της δύναμης με τη μετατόπιση:

$$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

Έργο από μεταβλητή δύναμη

- Όταν μια δύναμη μεταβάλλεται ανάλογα με τη θέση, η ολοκλήρωση είναι απαραίτητη για να υπολογίσουμε το έργο που παράγεται

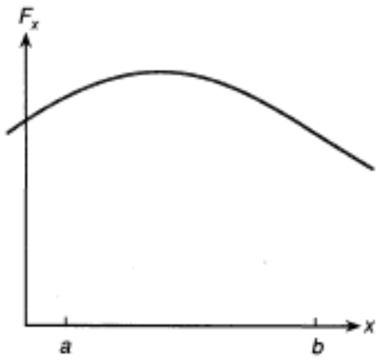
- Γεωμετρικά, το έργο είναι το εμβαδόν της περιοχής κάτω από τη γραφική παράσταση δύναμης-θέσης



Έργο σε μια διάσταση

Έστω ότι η δύναμη είναι συνάρτηση της θέσης

$$F_x = F_x(x)$$

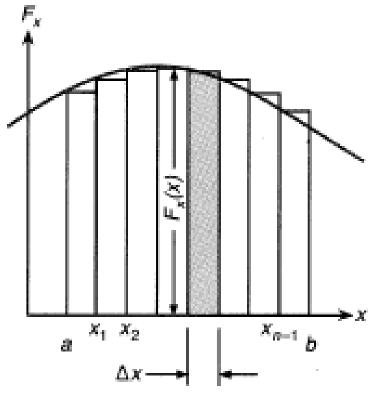


Τότε το ολικό έργο είναι:

$$W = \sum_{i=0}^{i=n-1} \Delta W i = \sum_{i=0}^{i=n-1} F_x(x_i)\Delta x$$

$$W = \int_a^b F_x(x)dx$$

= εμβαδό που περιορίζεται από την καμπύλη της συνάρτησης



Ολοκλήρωση

- Το *ορισμένο ολοκλήρωμα* είναι το αποτέλεσμα της διαδικασίας του ορίου, στο πλαίσιο της οποίας η περιοχή διαμερίζεται σε μικρότερα τμήματα

- Το έργο ως ολοκλήρωμα της δύναμης *F* ως προς τη θέση *x* γράφεται

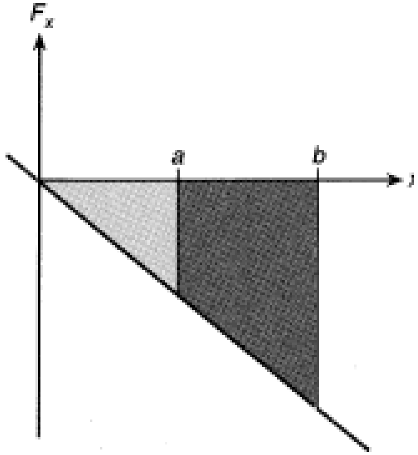
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx$$

- Η ολοκλήρωση είναι η αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης, έτσι τα ολοκληρώματα των απλών συναρτήσεων υπολογίζονται εύκολα. Για τις δυνάμεις του *x*, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{x_1}^{x_2} x^n\, dx = \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^{n+1}}{n+1} - \frac{x_1^{n+1}}{n+1}$$

Έργο σε μια διάσταση

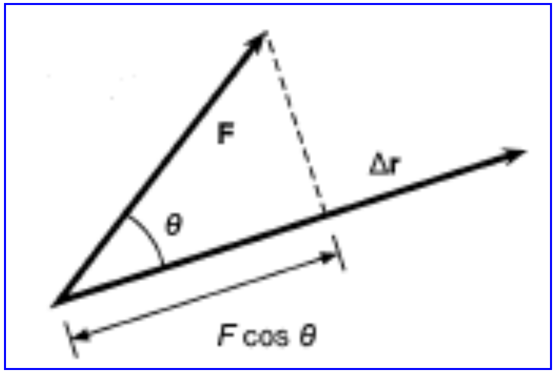
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Ελατήριο ασκεί δύναμη επαναφοράς $F_x(x) = -kx$ σε σωματίδιο προσαρτημένο σ' αυτό (πρβλ. Εδάφιο 6.5). Ποιό είναι το έργο που παράγεται από το ελατήριο στο σωματίδιο όταν κινείται από $x = a$ ώς $x = b$;



$$W = \int_a^b F_x(x)dx = \int_a^b (-kx)dx = -k\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_a^b = -\tfrac{1}{2}k(b^2 - a^2)$$

Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να ληφθεί με τον υπολογισμό του εμβαδού σ' ένα γράφημα της δύναμης συναρτήσει της θέσης. Στο Σχ. 7.5 φαίνεται η δύναμη $F_x(x) = -kx$ συναρτήσει του x. Το εμβαδόν του τριγώνου ανάμεσα στην αρχή και στο $x = b$ ισούται προς $\frac{1}{2}$ [βάση] × [ύψος] = $\frac{1}{2}\, b \times kb = \frac{1}{2}\, kb^2$. Ομοίως, το εμβαδόν του τριγώνου ανάμεσα στην αρχή και στο $x = a$ ισούται προς $\frac{1}{2}\, ka^2$. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου που αντιπροσωπεύει το έργο είναι η διαφορά των εμβαδών των δύο τριγώνων, δηλαδή, $\frac{1}{2}\, kb^2 - \frac{1}{2}\, ka^2$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το εμβαδόν κάτω από τον άξονα x πρέπει να λαμβάνεται ως αρνητικό, βλέπουμε ότι ο υπολογισμός με τα εμβαδά συμφωνεί με την Εξ. (12).

Έργο σε τρεις διαστάσεις



Σχήμα. Σταθερή δύναμη F δρα κατά τη μετατόπιση Δr. Fcosθ είναι η συνιστώσα της F κατά μήκος της Δr.

$$W = F\mathit{\Delta r}\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\mathbf{\Delta r} = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z$$

- Έργο + ή – ανάλογα με τη γωνία θ (F, Δr ομόρροπα, αντίρροπα)
- Για δύναμη κάθετη στη φορά της κίνησης W=0

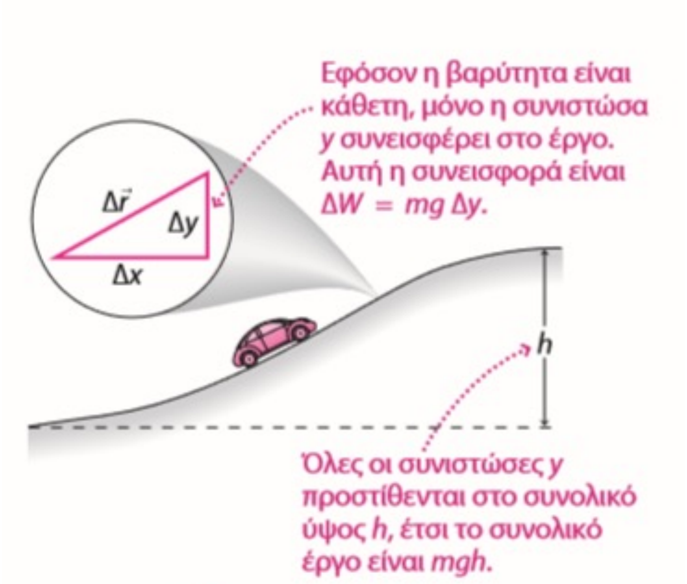
(π.χ. κεντρομόλος, δύναμη N κάθετη σε σώμα που ολισθαίνει κτλ.)

Έργο που παράγεται κόντρα στη βαρύτητα

- Το έργο που παράγεται από έναν παράγοντα που σηκώνει ένα σώμα μάζας *m* κόντρα στη βαρύτητα εξαρτάται μόνο από την κάθετη απόσταση *h*:

$$W = mgh$$

διότι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οποιαδήποτε διαδρομή αποτελείται από μικρά οριζόντια και κάθετα βήματα, αλλά μόνο τα κάθετα βήματα συμβάλλουν στο έργο.

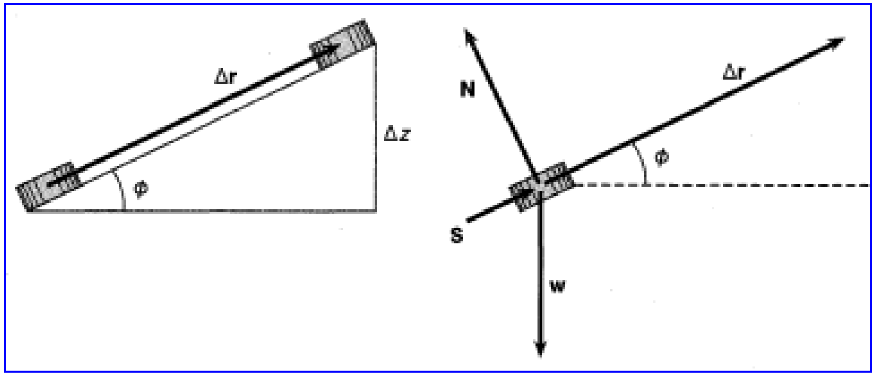


- Το έργο είναι θετικό αν το σώμα ανυψώνεται και αρνητικό αν χαμηλώνει

- Το έργο είναι ανεξάρτητο από τη συγκεκριμένη διαδρομή που ακολουθείται για να σημειωθεί μια δεδομένη κάθετη μετατόπιση

Έργο σε τρεις διαστάσεις

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Υποθέστε ότι σπρώχνετε ένα σώμα μάζας m πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο μέχρι το ύψος Δz. Πόσο είναι το έργο που παράγεται από τη βαρύτητα πάνω στο σώμα κατά τη μετατόπιση αυτή;



Επειδή $W = F\Delta r\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z$

και $\Delta r = \dfrac{\Delta z}{\sin\phi}$

$$W = mg\Delta r\cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right) = mg\frac{\Delta z}{\sin\phi}(-\sin\phi) = -mg\Delta z$$

$$W = 0\times\Delta x + 0\times\Delta y + (-mg)\times\Delta z = -mg\,\Delta z$$

Το έργο που παράγεται από τη βαρύτητα εξαρτάται μόνο από τη μεταβολή του ύψους Δz.

Μεταβαλλόμενη δύναμη σε πολλές διαστάσεις

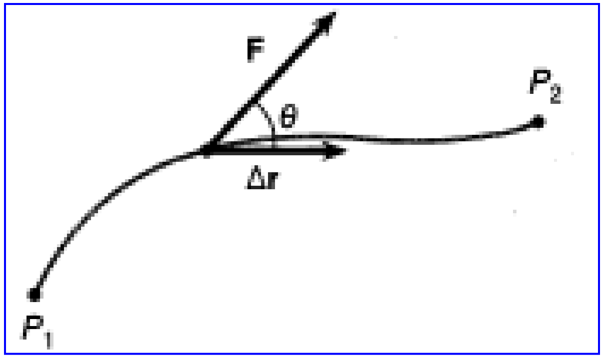
- Συχνά, ένα σώμα που κινείται σε τυχαία διαδρομή δέχεται μια δύναμη της οποίας το μέτρο και η κατεύθυνση σε σχέση με τη διαδρομή μπορεί να μεταβάλλεται με τη θέση

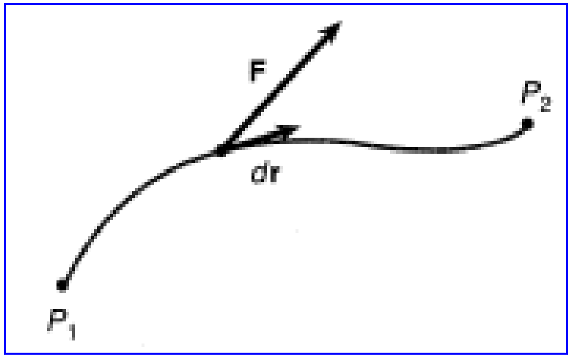
- Σε αυτή την περίπτωση το ολοκλήρωμα του έργου γίνεται ένα **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα**, το όριο του αθροίσματος των εσωτερικών γινομένων των πολύ μικρών μετατοπίσεων με τη δύναμη σε κάθε σημείο

- Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα πρέπει να υπολογίζονται σε μια συγκεκριμένη διαδρομή που συνδέει τα όρια της ολοκλήρωσης

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Έργο παραγόμενο από μεταβλητή δύναμη σε τρεις διαστάσεις



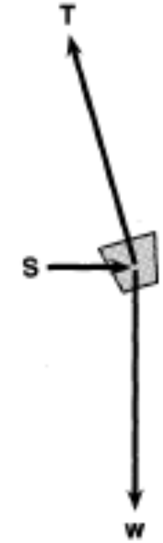


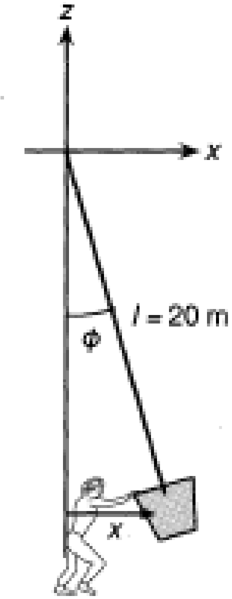
$\Delta W = F \,\Delta r \cos\theta$

Το ολικό έργο είναι κατά προσέγγιση το άθροισμα όλων αυτών των μικρών ποσοτήτων έργου. Στο όριο $\Delta r \to 0$, αυτό το άθροισμα γίνεται το ολοκλήρωμα

$$W = \int_{P_1}^{P_2} F\cos\theta dr = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{P_1}^{P_2} F_x dx + \int_{P_1}^{P_2} F_y dy + \int_{P_1}^{P_2} F_z dz$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Σ' ένα εργοτάξιο ένας εργάτης σπρώχνει ένα κάδο γεμάτο μπετόν, ολικής μάζας 600 kg, που κρέμεται από ένα γερανό με καλώδιο μήκους 20 m (Σχ. 7.11a). Πόσο έργο πρέπει να παραγάγει ο εργάτης επί του κάδου για να τον απομακρύνει αργά 2 m από την κατακόρυφο; Πόσο έργο παράγει η βαρύτητα επί του κάδου;





$T \sin\varphi = S$

$T \cos\varphi = mg \rightarrow S = mg \tan\varphi$

$$W = \int_{P_1}^{P_2} F_x dx = \int_{P_0}^{P_{2m}} mg \tan\phi dx = \int_{P_0}^{P_{2m}} mg \tan\phi d(l \sin\phi) = \int_{0^0}^{5,7^0} mg \tan\phi (l \cos\phi d\phi) =$$

$$\int_{0^0}^{5,7^0} mgl \sin\phi d\phi = mgl[-\cos\phi]_0^{5,7} = mgl(1-0,995) = 600 \times 9,8 \times 20 \times 0,005 = 590J$$

Το έργο που παράγεται από τη βαρύτητα με $l_{\alpha\rho\chi.} = -l$ και $l_{\tau\varepsilon\lambda.} = -l(\cos 5,7^0)$ είναι:

$W = -mg(l_{\tau\varepsilon\lambda.} - l_{\alpha\rho\chi.}) = -mgl\,(1-\cos 5,7^0) = -590\ J$

Έργο και ολικό έργο

- Το έργο που *εσείς* παράγετε όταν μετακινείτε ένα σώμα αφορά μόνο τη δύναμη που *εσείς* ασκείτε:
  - Ωστόσο, μπορεί να υπάρχουν και άλλες δυνάμεις που δρουν στο σώμα
  - **Ολικό έργο** είναι το έργο που παράγεται από όλες τις δυνάμεις που επενεργούν – δηλαδή, το έργο που παράγεται από την ολική δύναμη
- **Παράδειγμα:**
  - Όταν σηκώνετε ένα σώμα με σταθερή ταχύτητα, παράγετε έργο mgh.
  - Αλλά η βαρύτητα, που δρα προς τα κάτω, παράγει έργο $-mgh$
  - Επομένως, το ολικό έργο σε αυτή την περίπτωση είναι μηδέν

Θεώρημα έργου-ενέργειας

- Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στο ολικό έργο που παράγεται σε ένα σώμα οδηγούμαστε στο **θεώρημα έργου-ενέργειας:**

$$W_{\text{net}} = \int F_{\text{net}}\, dx = \int ma\, dx = \int m\frac{dv}{dt}\, dx = \int m\frac{dx}{dt}\, dv = \int mv\, dv$$

- Υπολογίζοντας το τελευταίο ολοκλήρωμα μεταξύ αρχικής και τελικής ταχύτητας v_1 και v_2, έχουμε

$$W_{\text{net}} = \int_{v_1}^{v_2} mv\, dv = \tfrac{1}{2}mv^2\Big|_{v_1}^{v_2} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

- Επομένως, η ποσότητα $\boxed{\frac{1}{2}mv^2}$ μεταβάλλεται μόνο όταν ένα ολικό έργο παράγεται σε ένα σώμα και η μεταβολή αυτής της ποσότητας ισούται με το ολικό έργο

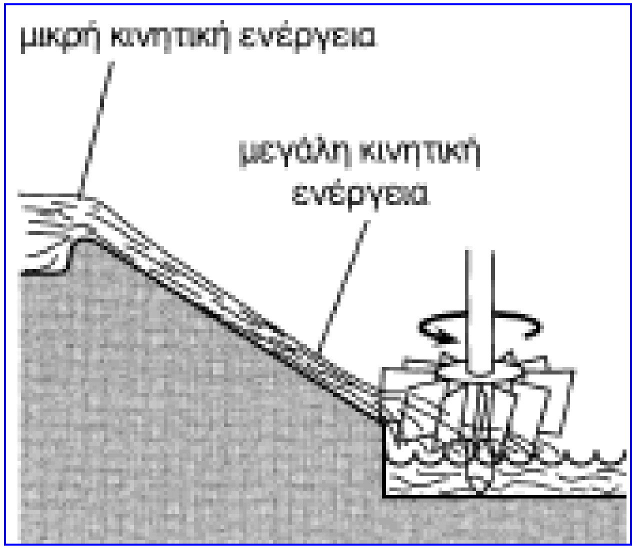
Κινητική ενέργεια (Θεώρημα Έργου – Ενέργειας)

- Η ποσότητα **$K = ½ m\upsilon^2$** ονομάζεται **κινητική ενέργεια** σωματιδίου.

- Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ισούται με το έργο που παράγεται πάνω στο σωματίδιο από την ολική δύναμη

  $K_2 - K_1 = \Delta K = W_{net}$ (θεώρημα έργου – ενέργειας)

  $K = p^2/2m$ (ορμή $p=mu$)



Κινητική ενέργεια

Πίνακας. Μερικές τιμές κινητικής ενέργειας.

Τροχιακή κίνηση της Γης	$2{,}6 \times 10^{33}$ J
Περιστροφική κίνηση της Γης	$2{,}1 \times 10^{29}$ J
Πλοίο Queen Elizabath (ταχύτητα πλεύσης)	9×10^{9} J
Αεριωθούμενο (Boeing 747, μέγιστη ταχύτητα)	7×10^{9} J
Αυτοκίνητο (90 km/h)	5×10^{5} J
Σφαίρα όπλου	4×10^{3} J
Άνθρωπος που περπατάει	60 J
Μέγιστη ενέργεια μιας απλής κοσμικής ακτίνας	50 J
Βροχοσταγόνα που πέφτει	4×10^{-5} J
Πρωτόνια από μεγάλο επιταχυντή (Fermilab)	$1{,}6 \times 10^{-7}$ J
Θραύσματα σχάσης ενός πυρήνα ουρανίου 235	$2{,}6 \times 10^{-11}$ J
Πρωτόνιο σε πυρήνα	3×10^{-12} J
Ηλεκτρόνιο σε άτομο (υδρογόνο)	$2{,}2 \times 10^{-18}$ J
Μόριο αέρα (σε θερμοκρασία δωματίου)	$6{,}2 \times 10^{-21}$ J

Παράδειγμα

Ένα αυτοκίνητο 1400 kg επιταχύνει από 70 σε 95 km/h.

(α) Πόσο έργο παράγεται στο αυτοκίνητο;

(β) Αν το αυτοκίνητο φρενάρει μέχρι να σταματήσει, πόσο έργο έχει παραχθεί σε αυτό;

<u>Λύση</u>

(α) Μετατρέπουμε τις ταχύτητες:

70 km/h = 19,4 m/s και 95 km/h = 26,4 m/s.

$$W_{\text{net}} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(1400\ \text{kg})\left[(26{,}4\ \text{m/s})^2 - (19{,}4\ \text{m/s})^2\right] = 220\ \text{kJ}$$

(β) Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$W_{\text{net}} = \frac{1}{2}(1400\ \text{kg})\left[0^2 - (26{,}4\ \text{m/s})^2\right] = -490\ \text{kJ}$$

Βαρυτική δυναμική ενέργεια

- **Δυναμική ενέργεια**

  η ικανότητα ενός σωματιδίου να παράγει έργο εξαιτίας της θέσης του στο χώρο

- η συνάρτηση ***mgz*** ονομάζεται **βαρυτική δυναμική ενέργεια** του σωματιδίου

- αν η μόνη δύναμη που επιδρά σε σωματίδιο είναι το βάρος του, τότε:

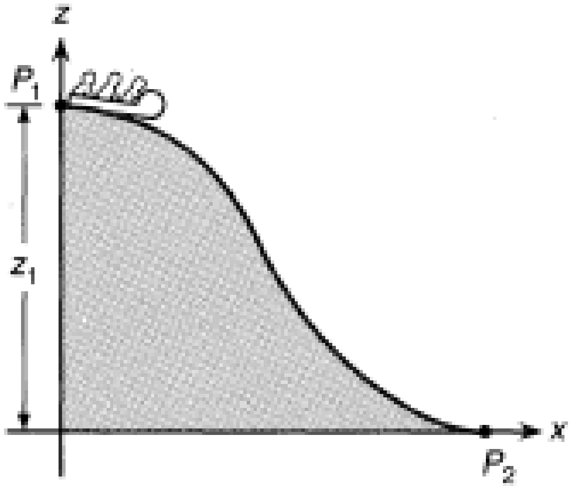
  $W = B\Delta z = -mg(z_2-z_1) = -mgz_2+mgz_1 = K_2-K_1 = ½\, mυ_2^2 – ½\, mυ_1^2$

  $$\mathbf{W = K_2 - K_1}$$

  $\rightarrow K_1 + mgz_1 = K_2 + mgz_2 \rightarrow$ **$K + mgz =$ [σταθ.]** $= E$ (μηχανική ενέργεια σωματιδίου)

(Νόμος διατήρησης μηχανικής ενέργειας)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Μια πίστα για αγώνες μπόμπ – σλέι που βρίσκεται στην πλαγιά ενός λόφου στη Λίμνη Placid (την τοποθεσία των Χειμερινών ολυμπιακών αγώνων του 1980) έχει διαφορά ύψους 148 m από το υψηλότερο σημείο ως το χαμηλότερο. Υποθέστε ότι ένα μπόμπ – σλέι, που αρχικά ηρεμεί στο υψηλότερο σημείο, ολισθαίνει σ' αυτή την πίστα προς τα κάτω χωρίς τριβές. Ποιά ταχύτητα θ' αποκτήσει το μπόμπ – σλέι στο χαμηλότερο σημείο;

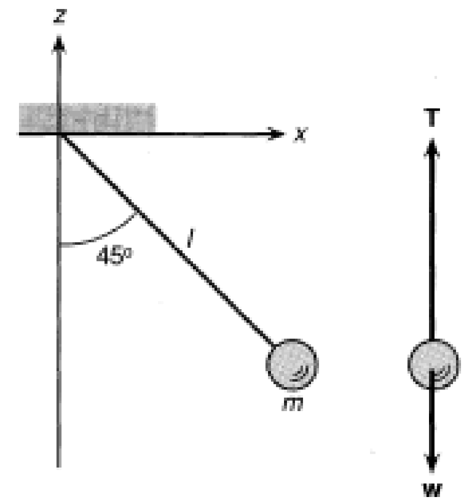


$$E_1 = E_2 \rightarrow \tfrac{1}{2}\, m\upsilon_1^2 + mgz_1 = \tfrac{1}{2}\, m\upsilon_2^2 + mgz_2$$

$$\rightarrow mgz_1 = \tfrac{1}{2}\, m\upsilon_2^2 \rightarrow \upsilon_2 = 54 \text{ m/s}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Ενα εκκρεμές αποτελείται από μάζα m δεμένη στο άκρο νήματος μήκους l. Το άλλο άκρο του νήματος προσαρμόζεται σε στερεό σημείο (Σχ. 7.14a). Υποθέστε ότι το εκκρεμές εκρατείτο αρχικά υπό γωνία $45°$ ως προς την κατακόρυφο. Εάν το εκκρεμές αφεθεί ελεύθερο από αυτή τη θέση, πόση θα είναι η τάση του νήματος τη στιγμή που η μάζα διέρχεται από τη χαμηλότερη θέση της;

ΛΥΣΗ: Πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα που αποκτάει η μάζα. Εάν η συνιστώσα z μετριέται προς τα πάνω από το σημείο στήριξης, οι αρχικές συντεταγμένες της μάζας είναι $z_1 = -l\cos\theta = -l\cos 45°$ και η χαμηλότερη συνιστώσα είναι $z_2 = -l$. Η ενέργεια της αρχικής θέσης είναι



$$E = \tfrac{1}{2} m v_1^2 + m g z_1 = 0 - mgl\cos 45°$$

και η ενέργεια στη χαμηλότερη θέση είναι

$$E = \tfrac{1}{2} m v_2^2 + m g z_2 = \tfrac{1}{2} m v_2^2 - mgl$$

Η διατήρηση της ενέργειας, τότε, συνεπάγεται ότι

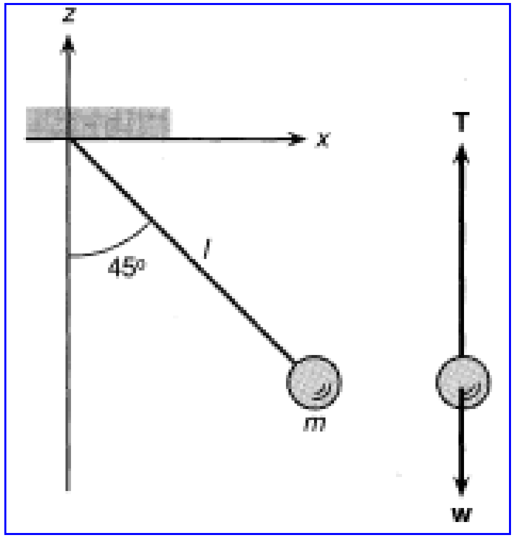
$$\tfrac{1}{2} m v_2^2 - mgl = -mgl\cos 45°$$

$$v_2^2 = 2\,(gl - gl\cos 45°) = 2\,gl\,(1 - \cos 45°)$$

Συνεπώς, η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι

$$v_2^2 / l = 2\,g\,(1 - \cos 45°)$$

Το γινόμενο της μάζας επί την κεντρομόλο επιτάχυνση μας δίνει το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης. Σ' αυτή τη δύναμη συνεισφέρουν δύο συνιστώσες: μία θετική (προς τα πάνω) συνιστώσα που οφείλεται στην τάση T του νήματος και μία αρνητική (προς τα κάτω) συνιστώσα που οφείλεται στο βάρος mg (Σχ. 7.14b). Επομένως, η συνισταμένη κεντρομόλος δύναμη είναι $T - mg$, οπότε,



$$mv_2^2/l = T - mg$$

ή

$$2\,mg\,(1 - \cos 45^\circ) = T - mg$$

Συνεπώς,

$$T = mg + 2\,mg\,(1 - \cos 45^\circ)$$

$$= (3 - \sqrt{2}/2)\,mg$$

Ισχύς και ενέργεια

- **Ισχύς** είναι ο *ρυθμός* με τον οποίο παράγεται το έργο. Αν το έργο ΔW παράγεται σε χρόνο Δt, τότε η **μέση ισχύς** σε αυτό το χρονικό διάστημα είναι

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad \text{(μέση ισχύς)}$$

- Όταν ο ρυθμός μεταβάλλεται με τον χρόνο, η **στιγμιαία ισχύς** είναι

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

- Η ισχύς μετριέται σε **watt** (W), με 1 W = 1 J/s

- Το ολικό έργο ή ενέργεια προκύπτει από την ισχύ πολλαπλασιάζοντας (για σταθερή ισχύ) ή ολοκληρώνοντας (για μη σταθερή ισχύ):

$$W = P\,\Delta t \quad \text{ή} \quad W = \int_{t_1}^{t_2} P\,dt$$

Ισχύς και ταχύτητα

- Όταν μια δύναμη δρα σε ένα σώμα που υφίσταται μια απειροελάχιστη μετατόπιση παράγει έργο

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Επομένως, αν αυτή η μετατόπιση σημειωθεί σε χρόνο *dt*, η ισχύς που παράγεται από τη δύναμη είναι

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Ισχύς

Μέση Ισχύς: $P_{μέση} = ΔW/Δt$

Στιγμιαία ισχύς: $P = dW/dt$

Μονάδες: 1 watt = 1 W = 1 J/s

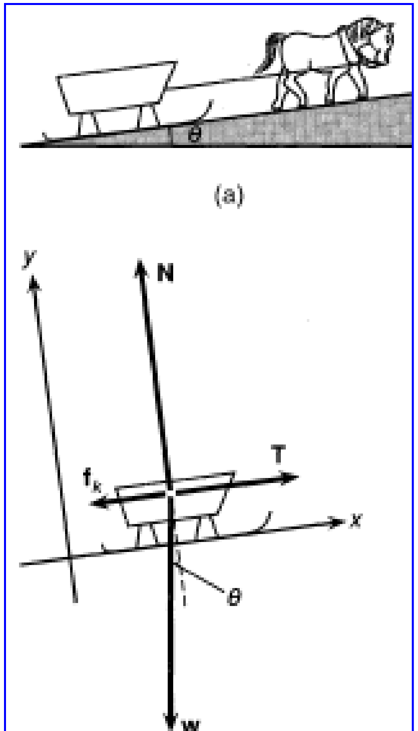
1 horsepower = 1 hp = 550 ft·lbf/s = 745,7 W

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Ενας ανελκυστήρας έχει μάζα 900 kg. Πόση ισχύ σε hp πρέπει ο κινητήρας να προσφέρει στον ανελκυστήρα για να τον ανεβάζει με ρυθμό 1,8 m/s; Ο ανελκυστήρας δεν έχει αντίβαρο.

$$P = ΔW / Δt = F\, Δz/Δt = F\, υ = m\, g\, υ = 900\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 1{,}8\text{m/s} = 1{,}6\times10^4\ \text{W} =$$

$$= 1{,}6 \times 10^4\ \text{W} \times \frac{1\ \text{hp}}{746\ \text{W}} = 21\ \text{hp}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Ενα άλογο σύρει έλκυθρο σε ανηφορικό, σκεπασμένο με χιόνι, δρόμο με κλίση 1:7 (Σχ. 8.9a). Το έλκυθρο έχει μάζα 300 kg και ο συντελεστής της τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο έλκυθρο και στο χιόνι είναι 0,12. Εάν το άλογο ασκεί έλξη παράλληλα προς την επιφάνεια του δρόμου και προσφέρει ισχύ 1,0 hp, πόση είναι η μέγιστη (σταθερή) ταχύτητα με την οποία το άλογο μπορεί να σύρει το έλκυθρο; Ποιό κλάσμα αυτής της ισχύος καταναλίσκεται στις τριβές; Ποιό κλάσμα καταναλίσκεται για να υπερνικήσει τη βαρύτητα;



Αφού η επιτάχυνση κατά μήκος του δρόμου είναι μηδέν,

$$0 = T + w_x - f_k = T - mg\sin\theta - f_k$$

έτσι, ώστε

$$T = mg\sin\theta + f_k = mg\sin\theta + \mu_k mg\cos\theta$$

Η ισχύς που προσφέρεται από το άλογο στο έλκυθρο είναι

$$P = \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} = (mg\sin\theta + \mu_k mg\cos\theta)\,v$$

από την οποία

$$v = \frac{P}{mg(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)}$$

Με $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{7} = 8{,}13°$, έχουμε

$$v = \frac{746\ \mathrm{W}}{300\ \mathrm{kg}\times 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}\times(\sin 8{,}13° + 0{,}12\cos 8{,}13°)}$$

$$= 0{,}98\ \mathrm{m/s}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Ενα άλογο σύρει έλκυθρο σε ανηφορικό, σκεπασμένο με χιόνι, δρόμο με κλίση 1:7 (Σχ. 8.9a). Το έλκυθρο έχει μάζα 300 kg και ο συντελεστής της τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο έλκυθρο και στο χιόνι είναι 0,12. Εάν το άλογο ασκεί έλξη παράλληλα προς την επιφάνεια του δρόμου και προσφέρει ισχύ 1,0 hp, πόση είναι η μέγιστη (σταθερή) ταχύτητα με την οποία το άλογο μπορεί να σύρει το έλκυθρο; Ποιό κλάσμα αυτής της ισχύος καταναλίσκεται στις τριβές; Ποιό κλάσμα καταναλίσκεται για να υπερνικήσει τη βαρύτητα;

Η ισχύς που καταναλίσκεται από τη δύναμη τριβής είναι

$$P_{\text{friction}} = \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{v} = -f_k v = -\mu_k mg \cos\theta \times v$$

$$= -0{,}12 \times 300\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times \cos 8{,}13^\circ \times 0{,}98\ \text{m/s}$$

$$= -3{,}4 \times 10^2\ \text{W} = -0{,}46\ \text{hp}$$

και η ισχύς που προσφέρεται από τη βαρύτητα είναι

$$P_{\text{gravity}} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = w_x v = -mg \sin\theta \times v$$

$$= -300\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times \sin 8{,}13^\circ \times 0{,}98\ \text{m/s}$$

$$= -4{,}1 \times 10^2\ \text{W} = -0{,}54\ \text{hp}$$

Επομένως, το 46% της ισχύος του αλόγου καταναλίσκεται στις τριβές και το 54% για να υπερνικήσει τη βαρύτητα.

Πίνακας. Μερικές τιμές ισχύος

Φως και θερμότητα που εκπέμπεται από τον Ηλιο	$3{,}9 \times 10^{26}$ W
Ηλιακό φως και θερμότητα που προσπίπτει στη Γη	$1{,}7 \times 10^{17}$ W
Μηχανική ισχύς που παράγεται από καταιγίδα	2×10^{13} W
Ολική ισχύς που καταναλίσκεται στις ΗΠΑ, (μέση τιμή)	2×10^{12} W
Μεγάλο εργοστάσιο ηλεκτροπαραγωγής	$\sim 10^{9}$ W
Μηχανή αεριωθουμένου (Boeing 747)	$2{,}1 \times 10^{8}$ W
Μηχανή αυτοκινήτου	$1{,}5 \times 10^{5}$ W
Εκπομπή ραδιοκυμάτων από μεγάλο ραδιοπομπό	1×10^{5} W
Ηλιακό φως και θερμότητα ανά m^2 στην επιφάνεια της Γης	$1{,}4 \times 10^{3}$ W
Ηλεκτρική ισχύς φρυγανιέρας	1×10^{3} W
Μέγιστη ισχύς αθλητή	2×10^{2} W
Ηλεκτρική ισχύς ηλεκτρικού λαμπτήρα	1×10^{2} W
Θερμότητα εκπεμπόμενη από άντρα (μέση τιμή)	1×10^{2} W
Θερμότητα και μηχανική ισχύς αγριομέλισσας (εν πτήσει)	2×10^{-2} W
Φωτεινή ακτινοβολία ατόμου	$\sim 10^{-10}$ W

Σύνοψη

Εργο παραγόμενο από σταθερή δύναμη: $W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$

Εργο παραγόμενο από μεταβλητή δύναμη:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} F_x\, dx + \int_{P_1}^{P_2} F_y\, dy + \int_{P_1}^{P_2} F_z\, dz$$

Εργο παραγόμενο από τη βαρύτητα: $W = -\,mg\,\Delta z$

Κινητική ενέργεια: $K = \frac{1}{2}\,mv^2$

$$= \frac{p^2}{2m}$$

Θεώρημα έργου – ενέργειας: $\Delta K = W$

Βαρυτική δυναμική ενέργεια: mgz

Μηχανική ενέργεια: $E = K + mgz$

Διατήρηση μηχανικής ενέργειας: $E = K + mgz \doteq$ [σταθερά]

Ασκήσεις

7. Η σταθερά ενός ελατηρίου ισούται προς $3{,}5 \times 10^4$ N/m. Το ελατήριο στην αρχή είναι χαλαρωμένο. Πόσο έργο απαιτείται για να συμπιεστεί το ελατήριο κατά 0,10 m; Πόσο έργο απαιτείται για να συμπιεστεί το ελατήριο ακόμα 0,10 m;

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} k\,x\,dx = ½\,k\,(x_2^2 - x_1^2)$$

i) συμπίεση κατά 0,10 m

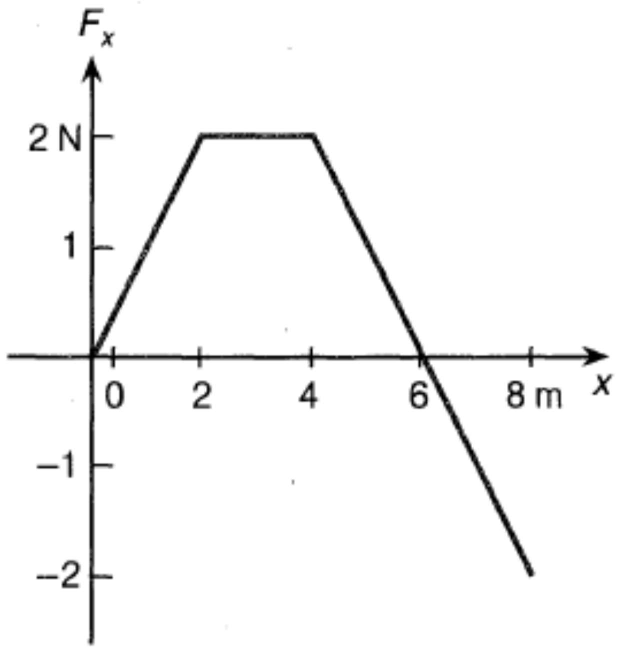
$W = ½\,(3.5 * 10^4) * 0{,}10^2 = 175$ J

ii) επιπλέον συμπίεση 0,10

$W = ½\,(3.5 * 10^4) * (0{,}20^2 - 0{,}10^2) = 525$ J

Ασκήσεις

8. Σε σωματίδιο που κινείται κατά μήκος του άξονα x, ασκείται δύναμη F_x, η οποία εξαρτάται από τη θέση όπως φαίνεται στο γράφημα του Σχ. 7.16. Από αυτό το γράφημα, να βρείτε το έργο που παράγεται από τη δύναμη καθώς το σωματίδιο κινείται από το $x = 0$ ώς το $x = 8$ m.



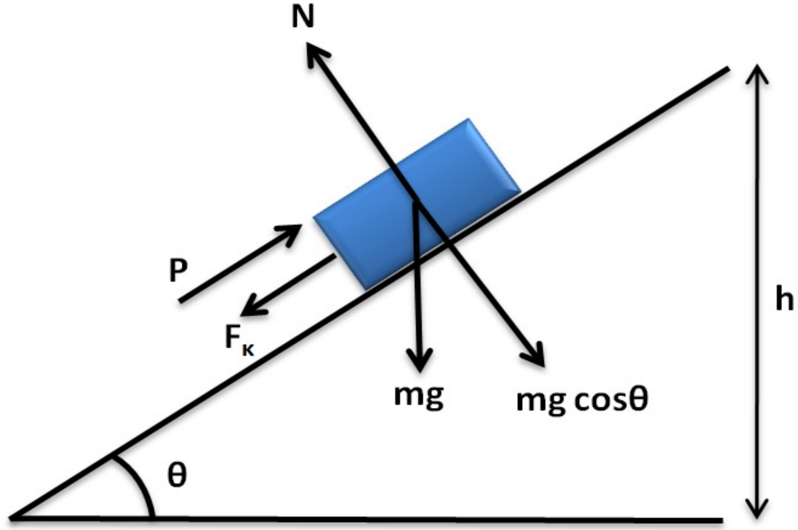
Θετικό έργο 8 J

Αρνητικό έργο 2 J

Συνολικό 8 – 2 = 6 J

Ασκήσεις

*10. Ενας άντρας σπρώχνει ένα βαρύ κιβώτιο σ' ένα κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία 30° με την οριζόντιο. Η μάζα του κιβωτίου είναι 60 kg και ο συντελεστής κινητικής τριβής ανάμεσα στο κιβώτιο και στο κεκλιμένο επίπεδο είναι 0,45. Πόσο έργο πρέπει να καταναλώσει ο άντρας για να σπρώξει το κιβώτιο σε ύψος 2,5 m με σταθερή ταχύτητα; Υποθέστε ότι ο άντρας σπρώχνει το κιβώτιο με φορά παράλληλη προς το κεκλιμένο επίπεδο.



$N = m\, g \cos\theta$

$P = m\, g \sin\theta + F_{\kappa} = m\, g \sin\theta + \mu_{\kappa} N = m\, g \sin\theta + \mu_{\kappa}\, m\, g \cos\theta = m\, g (\sin\theta + \mu_{\kappa} \cos\theta)$

Έργο $= P * \Delta x = m\, g (\sin\theta + \mu_{\kappa} \cos\theta) * \frac{h}{\sin\theta} = 2{,}6 * 10^3$ J

Ασκήσεις

*12. Ενα σωματίδιο κινείται κατά μήκος του άξονα x, από το $x=0$ ώς το $x=2$. Δύναμη $F_x(x)=2x^3+8x$ δρα στο σωματίδιο (η απόσταση x μετριέται σε μέτρα και η δύναμη σε newton). Να υπολογιστεί το έργο που παρήγαγε η δύναμη $F_x(x)$ κατά τη διάρκεια αυτής της κίνησης.

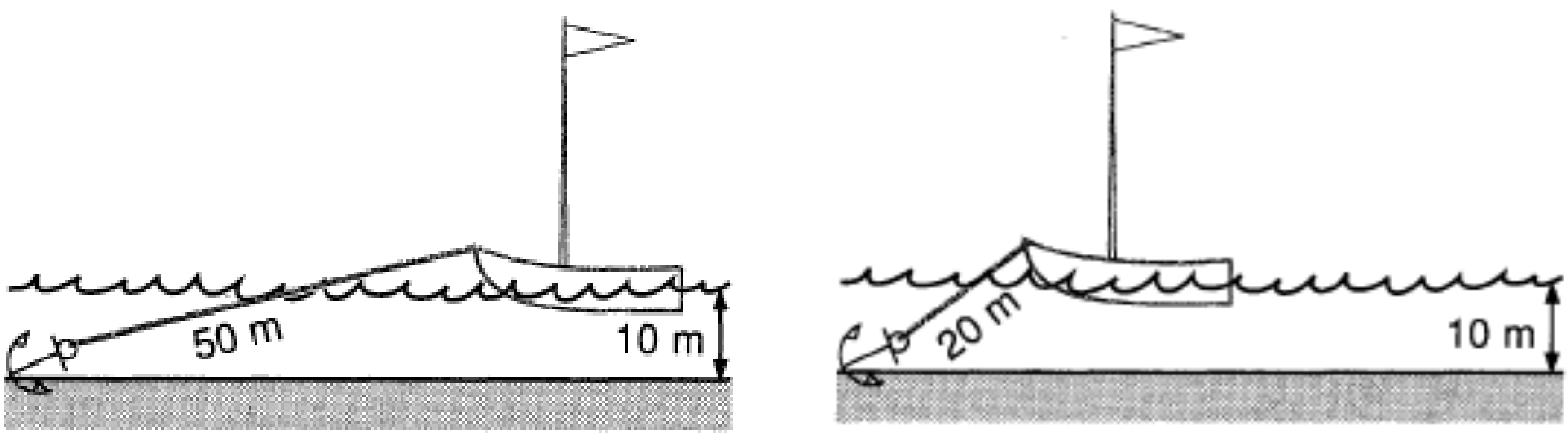
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \int_0^2 (2x^3 + 8x)\,dx = \left.\frac{1}{2}x^4 + 4x^2\right|_0^2 = 24\ \text{J}$$

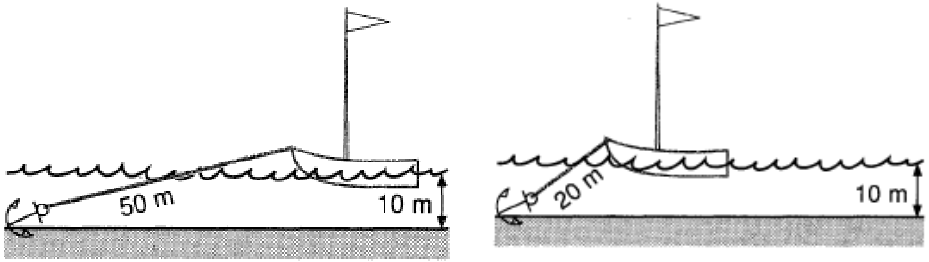
Ασκήσεις

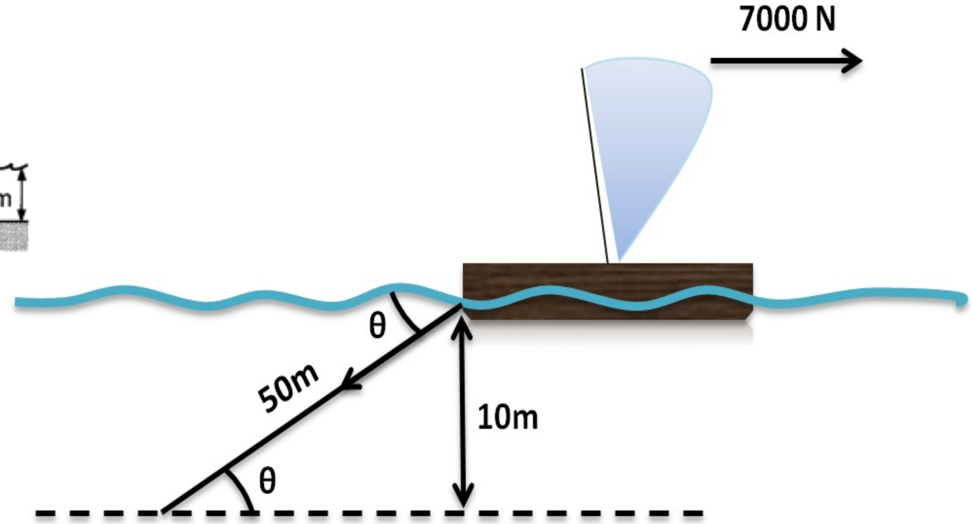
*18. Κατά τη διάρκεια καταιγίδας ένα ιστιοφόρο είναι αγκυροβολημένο σε μαρίνα βάθους 10 m. Ο άνεμος κτυπάει το πλεούμενο με σταθερή οριζόντια δύναμη 7000 N.

(a) Το σκοινί της άγκυρας που κρατάει το ιστιοφόρο έχει μήκος 50 m και είναι τεντωμένο ανάμεσα στην άγκυρα και στο ιστιοφόρο (Σχ. 7.19a). Πόση είναι η τάση του σκοινιού;

(b) Πόσο έργο πρέπει να καταβάλει το πλήρωμα του ιστιοφόρου για να τραβήξει 30 m από το σκοινί της άγκυρας έτσι, ώστε να πλησιάσει το πλεούμενο στην άγκυρα (Σχ. 7.19b); Πόση είναι η τάση του σκοινιού όταν το ιστιοφόρο βρίσκεται στη νέα του θέση;



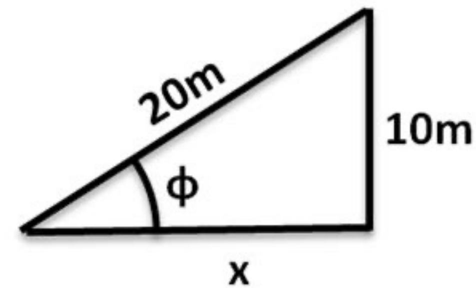




$\sin\theta = \frac{10}{50}$ => $\theta = 11{,}5^{o}$

$T \cos\theta = 7000$ N => $T \cos 11.5^{o} = 7000$ => $T * 0.98 = 7000$ => $T = 7143$ N

Αν τραβηχτούν 30 m σχοινιού έχουμε την παρακάτω κατάσταση:



$\sin\phi = \frac{10}{20} = 0.5$ => $\phi = 30^{o}$

$x = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = 17$ m | Οριζόντια μετακίνηση της

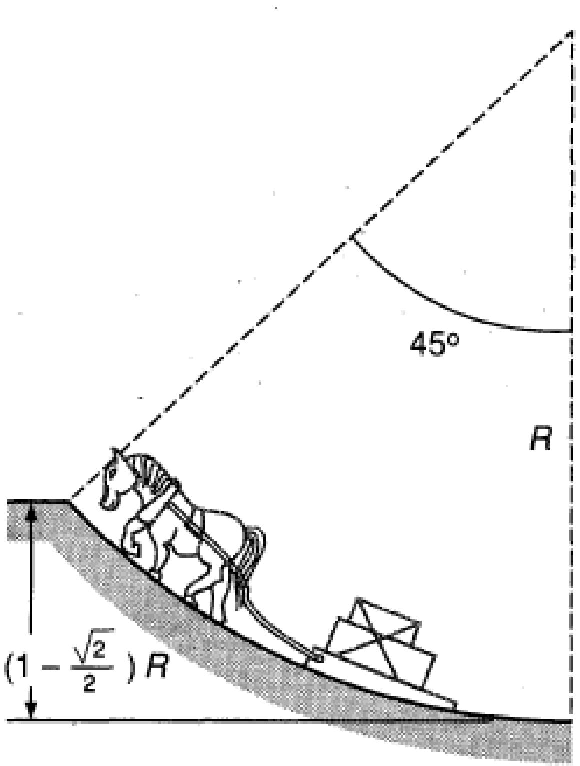
Αρχικό $x = \sqrt{50^2 - 10^2} = 49$ m | βάρκας κατά 32 m

$W = F * \Delta x = 7000 * 32 = 2.2 * 10^{5}$ J

Στη νέα θέση η τάση T είναι: $T = \frac{7000}{\cos\varphi} = \frac{7000}{\sqrt{3}/2}$ N => $T = 8083$ N

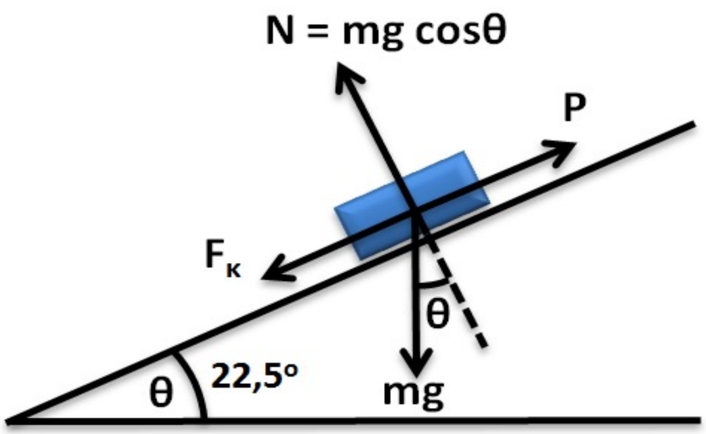
Ασκήσεις

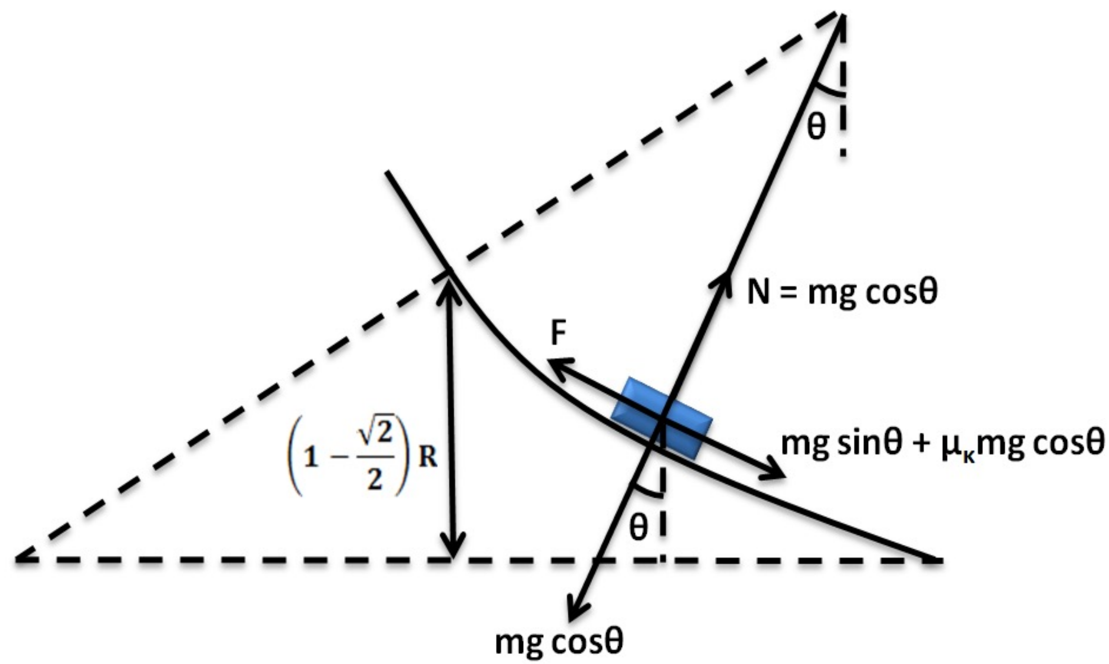
*20. Ενα άλογο τραβάει έλκυθρο κατά μήκος μιας καλυμμένης με χιόνι καμπύλης ράμπας. Οπως φαίνεται από το πλάι, η επιφάνεια της ράμπας σχηματίζει τόξο κύκλου ακτίνας R (Σχ. 7.20). Η έλξη του αλόγου παραμένει πάντοτε παράλληλη προς την επιφάνεια. Η μάζα του έλκυθρου είναι m και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο έλκυθρο και στο έδαφος είναι μ_k. Πόσο έργο πρέπει να καταβάλει το άλογο για να τραβήξει το έλκυθρο σε ύψος $(1-\sqrt{2}/2)R$, που αντιστοιχεί σε γωνία 45° κατά μήκος του κύκλου (Σχ. 7.20); Πώς συγκρίνεται αυτή η τιμή με την ποσότητα έργου που απαιτείται για να μετακινηθεί το έλκυθρο από το ίδιο σημείο εκκίνησης ώς το ίδιο ύψος κατά μήκος μιας επίπεδης ράμπας που έχει κλίση 22,5°;

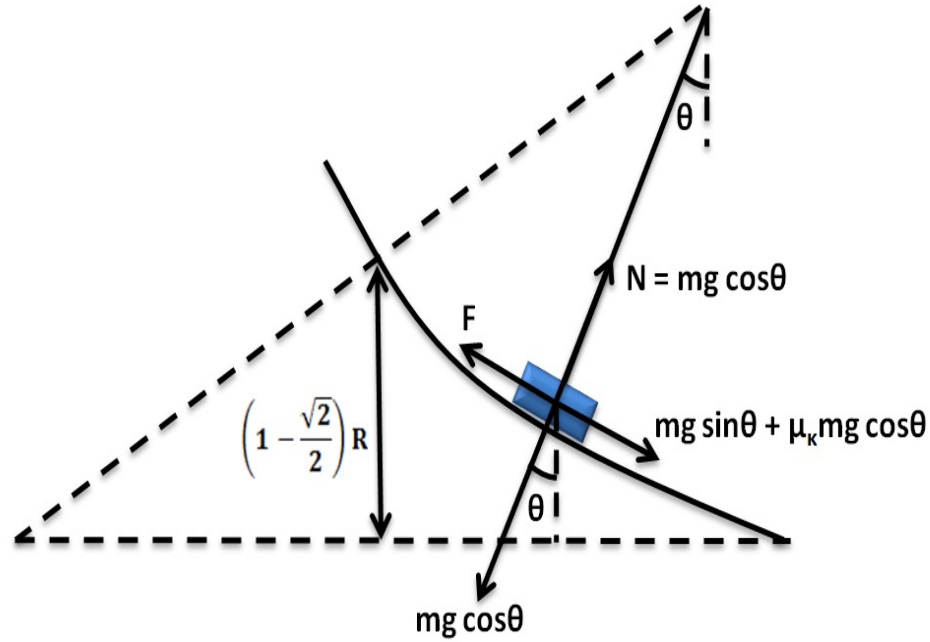


Ασκήσεις

*20. Ενα άλογο τραβάει έλκυθρο κατά μήκος μιας καλυμμένης με χιόνι καμπύλης ράμπας. Οπως φαίνεται από το πλάι, η επιφάνεια της ράμπας σχηματίζει τόξο κύκλου ακτίνας R (Σχ. 7.20). Η έλξη του αλόγου παραμένει πάντοτε παράλληλη προς την επιφάνεια. Η μάζα του έλκυθρου είναι m και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο έλκυθρο και στο έδαφος είναι μ_κ. Πόσο έργο πρέπει να καταβάλει το άλογο για να τραβήξει το έλκυθρο σε ύψος $(1-\sqrt{2}/2)R$, που αντιστοιχεί σε γωνία 45° κατά μήκος του κύκλου (Σχ. 7.20); Πώς συγκρίνεται αυτή η τιμή με την ποσότητα έργου που απαιτείται για να μετακινηθεί το έλκυθρο από το ίδιο σημείο εκκίνησης ως το ίδιο ύψος κατά μήκος μιας επίπεδης ράμπας που έχει κλίση 22,5°;







Άρα το άλογο πρέπει να τραβά με δύναμη:

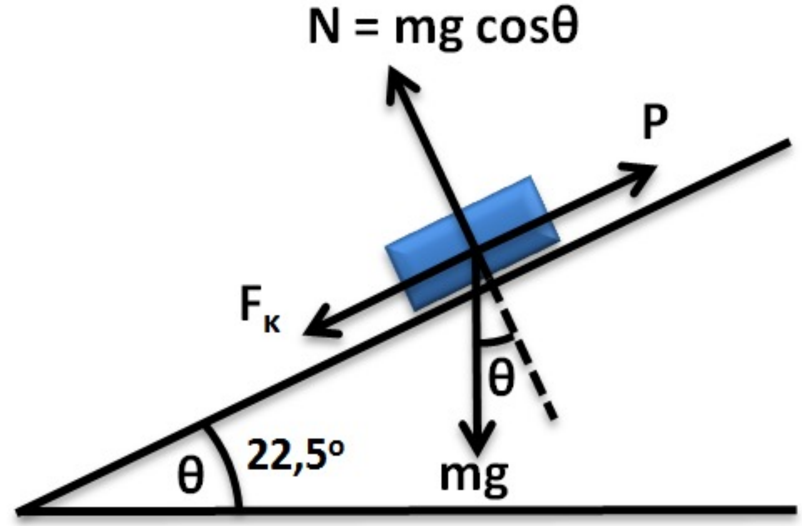
$F = m\, g \sin\theta + \mu_\kappa\, m\, g \cos\theta$

Αν προχωρήσει κατά x τότε: $x = R\,\theta$

$$W = \int_{x=0}^{x=\text{final}} m\, g\, (\sin\theta + \mu_\kappa \cos\theta)\, dx = m\, g\, R \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} (\sin\theta + \mu_\kappa \cos\theta)\, d\theta =$$

$$m\, g\, R(-\cos\theta + \mu_\kappa \sin\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} =$$

$$= m\, g\, R\left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \mu_\kappa \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = m\, g\, R\,(0.29 + \mu_\kappa * 0.71)$$



Το άλογο πρέπει να τραβά με δύναμη:

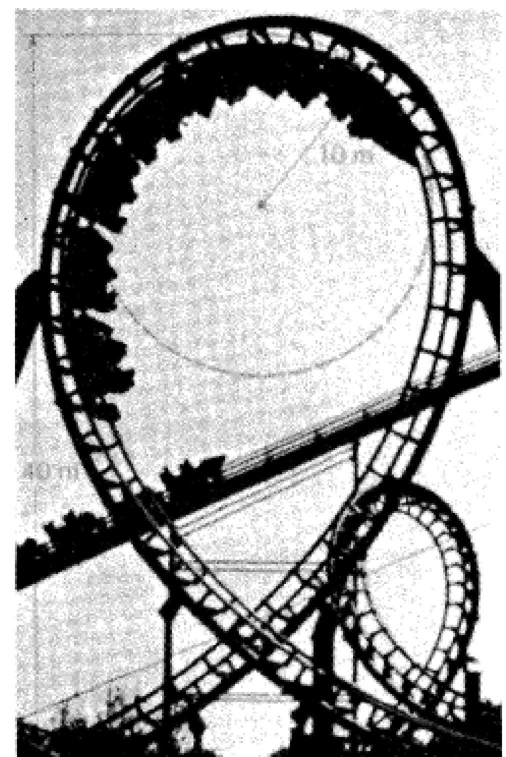
$P = m\, g \sin\theta + \mu_\kappa\, m\, g \cos\theta = m\, g\, (\sin\theta + \mu_\kappa \cos\theta)$

$W = \int_{x=0}^{x=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)R} m\, g\, (\sin\theta + \mu_\kappa \cos\theta)\, dx = \ldots\ldots.. =$

$= m\, g\, R\, [(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) + \mu_\kappa \frac{\sqrt{2}}{2}\,]$ Ίδιο έργο!!

Ασκήσεις

**52. Στο "loop coaster" ενός λούνα παρκ τα βαγονέτα κινούνται σε ράγιες που σχηματίζουν πλήρη κατακόρυφο βρόχο (Σχ. 7.23). Εάν οι ράγιες στο πάνω τμήμα τους σχηματίζουν κύκλο ακτίνας $R = 10\,\text{m}$, πόση είναι η ελάχιστη ταχύτητα, που πρέπει να έχει ένα βαγονέτο στην κορυφή του βρόχου για να μην πέσει; Εάν το υψηλότερο σημείο του βρόχου έχει ύψος $h = 40\,\text{m}$, πόση είναι η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία το βαγονέτο πρέπει να εισέλθει στο βρόχο; Αμελήστε τις τρ.βές.



**52. Στο "loop coaster" ενός λούνα παρκ τα βαγονέτα κινούνται σε ράγιες που σχηματίζουν πλήρη κατακόρυφο βρόχο (Σχ. 7.23). Εάν οι ράγιες στο πάνω τμήμα τους σχηματίζουν κύκλο ακτίνας $R = 10\,\text{m}$, πόση είναι η ελάχιστη ταχύτητα, που πρέπει να έχει ένα βαγονέτο στην κορυφή του βρόχου για να μην πέσει; Εάν το υψηλότερο σημείο του βρόχου έχει ύψος $h = 40\,\text{m}$, πόση είναι η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία το βαγονέτο πρέπει να εισέλθει στο βρόχο; Αμελήστε τις τριβές.

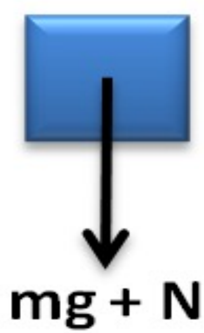
Στο ψηλότερο σημείο οι ράγες ασκούν δύναμη (m g + N) στο βαγονέτο

Η κεντρομόλος είναι $\frac{m\,u^2}{R}$

Για να μείνει στις γραμμές (να μην πέσει δηλ) το βαγονέτο πρέπει:

$N \geq 0$ ή $\frac{m\,u^2}{R} \geq m\,g \Rightarrow u^2 \geq R\,g \Rightarrow u \geq \sqrt{Rg}$

$\frac{m u_{min}^2}{R} = m\,g \Rightarrow u_{min} = \sqrt{Rg} = 9.9$ m/s



Διατήρηση ενέργειας: $\frac{1}{2}\,m\,u_1^2 + m\,g\,z_1 = \frac{1}{2}\,m\,u_2^2 + m\,g\,z_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ :\frac{1}{2}\,m\,u_1^2 + m(9.8)20 = \frac{1}{2}\,m\,(9.9)^2 + m\,(9.8)\,40 \Rightarrow u_1 = 22{,}5$ m/s

Ανάλογα σε ποιο ύψος θεωρούμε ότι μπαίνει (εδώ 20 m από το έδαφος).

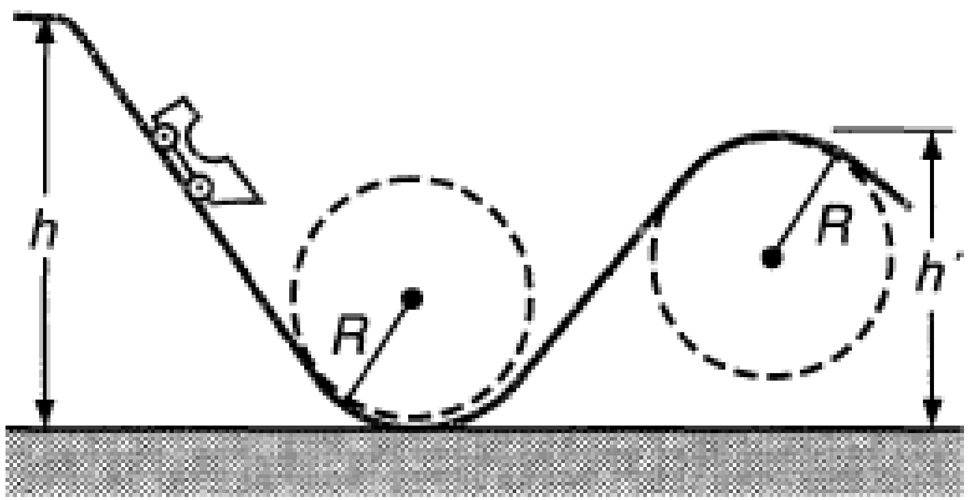
Ασκήσεις

**53. Πρόκειται να κατασκευάσετε ένα "roller coaster" στο οποίο τα βαγονέτα ξεκινούν από την ηρεμία σε ύψος $h = 30$ m, κυλάνε προς τα κάτω σε μια κοιλάδα και μετά ανεβαίνουν ένα βουνό (Σχ. 7.24).

(a) Πόση είναι η ταχύτητα στη βάση της κοιλάδας;

(b) Εάν θέλετε ν' ασκηθεί στους επιβάτες επιτάχυνση 8 G στη βάση της κοιλάδας, πόση πρέπει να είναι η ακτίνα του τόξου του κύκλου που προσαρμόζεται στη βάση της κοιλάδας;

(c) Στο αμέσως επόμενο βουνό η κορυφή είναι τόξο κύκλου με την ίδια ακτίνα R. Εάν θέλετε ν' ασκηθεί στους επιβάτες επιτάχυνση 0 G στην κορυφή, πόσο πρέπει να είναι το ύψος της h';

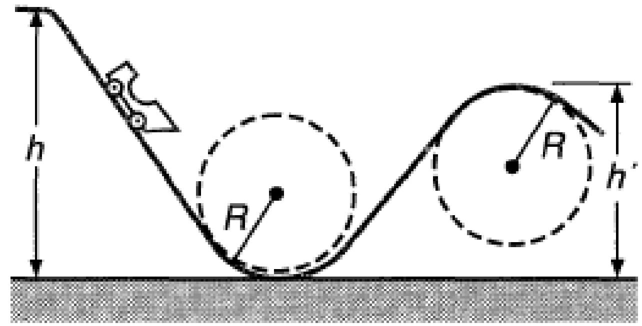


**53. Πρόκειται να κατασκευάσετε ένα "roller coaster" στο οποίο τα βαγονέτα ξεκινούν από την ηρεμία σε ύψος $h = 30$ m, κυλάνε προς τα κάτω σε μια κοιλάδα και μετά ανεβαίνουν ένα βουνό (Σχ. 7.24).

(a) Πόση είναι η ταχύτητα στη βάση της κοιλάδας;

(b) Εάν θέλετε ν' ασκηθεί στους επιβάτες επιτάχυνση 8 G στη βάση της κοιλάδας, πόση πρέπει να είναι η ακτίνα του τόξου του κύκλου που προσαρμόζεται στη βάση της κοιλάδας;

(c) Στο αμέσως επόμενο βουνό η κορυφή είναι τόξο κύκλου με την ίδια ακτίνα R. Εάν θέλετε ν' ασκηθεί στους επιβάτες επιτάχυνση 0 G στην κορυφή, πόσο πρέπει να είναι το ύψος της h';



Διατήρηση Ενέργειας $\frac{1}{2} m u_1^2 = mgh \Rightarrow u_1 = \sqrt{2gh}$

α) ταχύτητα βαγονέτου $u_1 = \sqrt{2 * 9.8 * 30} =$ **24.2 m/s**

β) θα ασκείται η δύναμη που θα προσδίδει επιτάχυνση α=8g

$$m\,\alpha = m\frac{u^2}{R} \Rightarrow R = \frac{u^2}{\alpha = 8g} = \frac{24.2^{\,2}}{8 \text{ X } 9.8} = \mathbf{7.5\ m}$$

γ) στην κορυφή $m\,g + N = m\frac{u^2}{R}$ και για N=0 (αφού 0 G) $\Rightarrow u^2 = gR$

Διατήρηση Ενέργειας $\frac{1}{2} m u_1^2 = \frac{1}{2} m u^2 + mgh' \Rightarrow h' = (u_1^2 - gR)/2g =$ **26.1m**