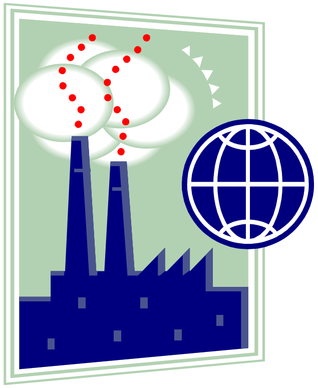
Φυσική

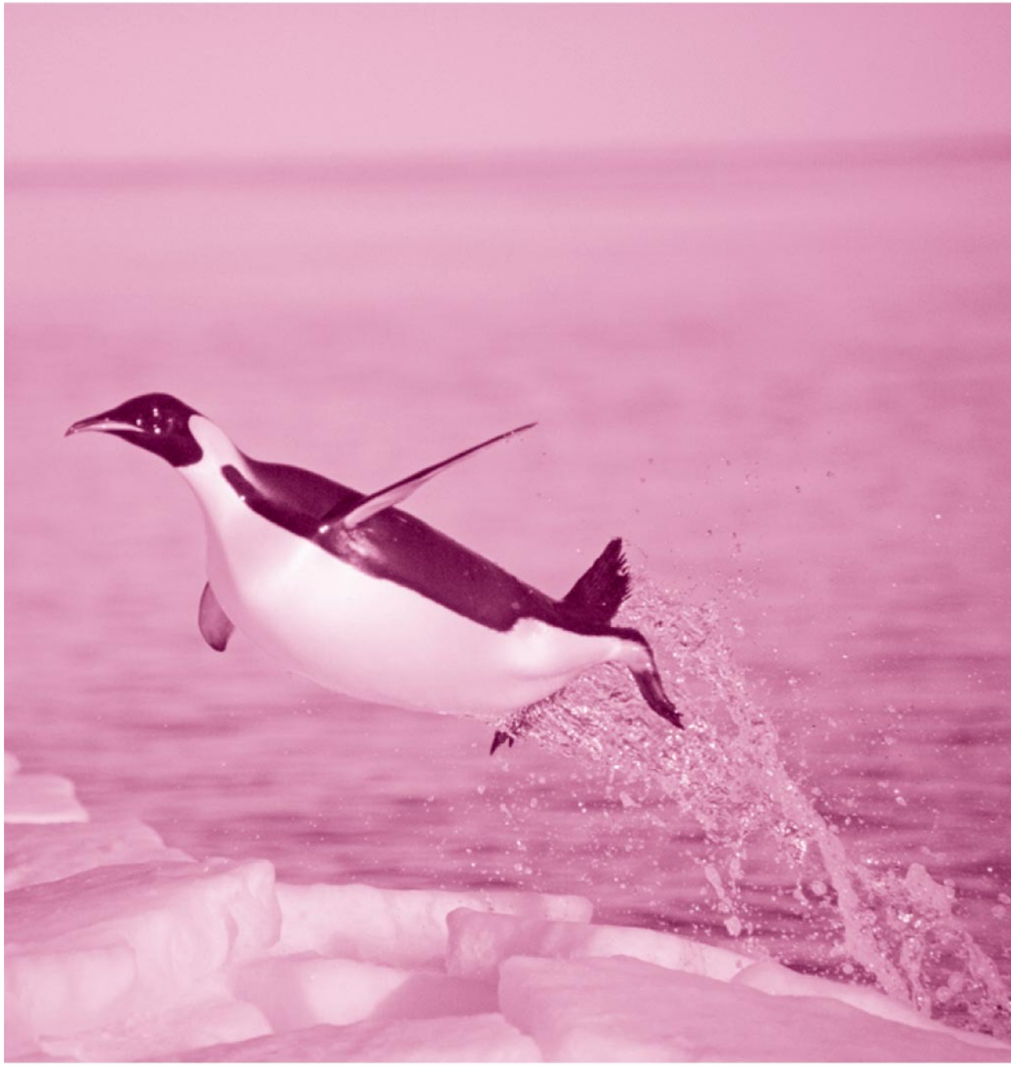


Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

3ο μάθημα

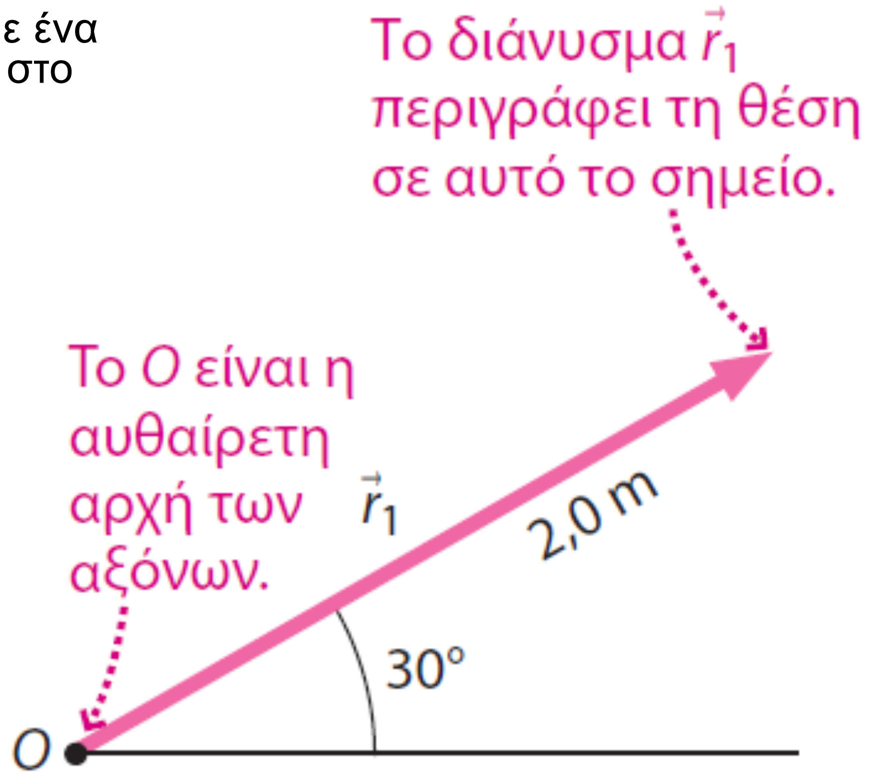
Τι μαθαίνετε

- Να περιγράφετε τη θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση σε δύο και τρεις διαστάσεις χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των διανυσμάτων
- Θα δείτε πώς οι τεχνικές του Κεφαλαίου 2, μπορούν να εφαρμοστούν στην πολυδιάστατη κίνηση
- Θα κατανοήσετε την κίνηση υπό την επίδραση της βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια της Γης
- Θα δείτε πώς η κυκλική κίνηση είναι μια ιδιαίτερη περίπτωση επιταχυνόμενης κίνησης και θα μάθετε πώς να βρίσκετε το μέτρο και την κατεύθυνση αυτής της επιτάχυνσης

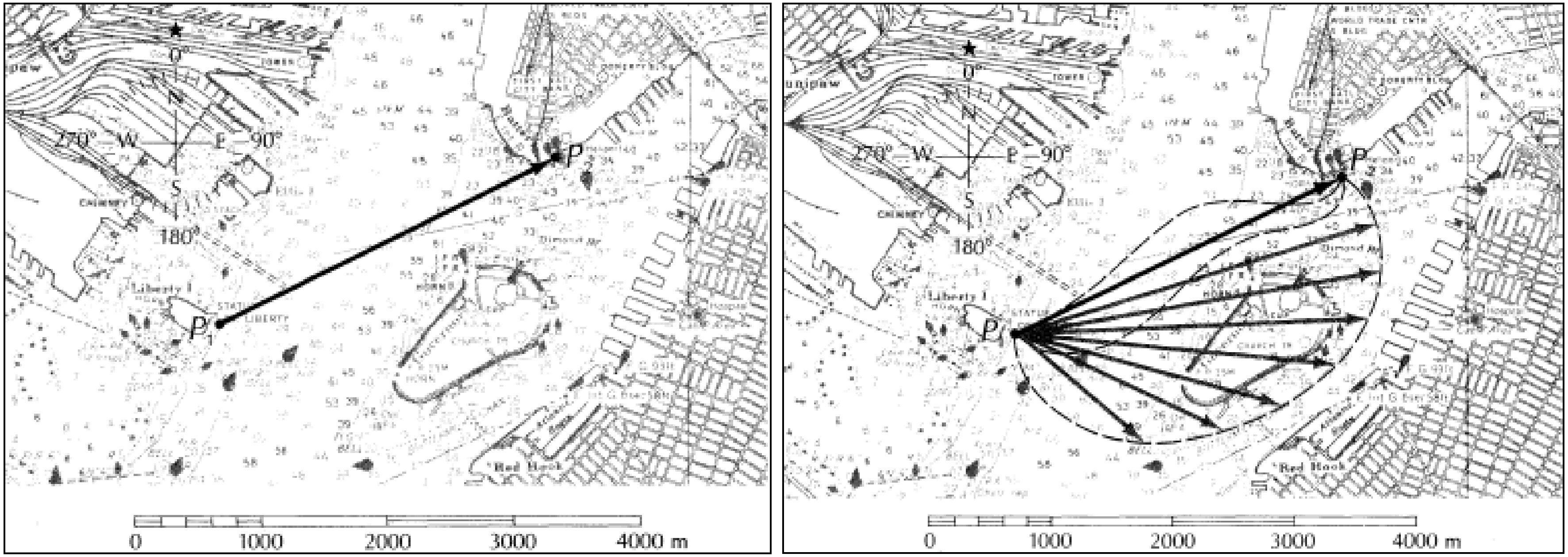


Διανύσματα

- **Διάνυσμα** είναι μια ποσότητα που εκφράζει τόσο το μέτρο όσο και την κατεύθυνση
  - Σε δύο διαστάσεις απαιτούνται δύο αριθμοί για να προσδιορίσουν ένα διάνυσμα
  - Σε τρεις διαστάσεις απαιτούνται τρεις αριθμοί
  - Ένα διάνυσμα μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα βέλος του οποίου το μήκος ανταποκρίνεται στο μέτρο του διανύσματος
- Η θέση είναι μια διανυσματική ποσότητα (διάνυσμα μετατόπισης)
  - Η θέση ενός σώματος προσδιορίζεται δίνοντας την απόστασή του από μια αρχή των αξόνων και την κατεύθυνσή του σε σχέση με κάθε άξονα
  - Εδώ το $\vec{r}_1$ περιγράφει ένα σημείο 2 m από την αρχή σε κατεύθυνση 30° προς τον οριζόντιο άξονα



Διάνυσμα μετατόπισης



Σχήμα. Διάνυσμα μετατόπισης (αριστερά), και τρεις εναλλακτικοί δρόμοι που έχουν την ίδια τελική μετατόπιση (δεξιά).

Διάνυσμα

Διάνυσμα: οποιαδήποτε ποσότητα που έχει μέτρο και φορά και συμπεριφέρεται μαθηματικά ως το διάνυσμα μετατόπισης

Παράδειγμα: ταχύτητα, επιτάχυνση, δύναμη

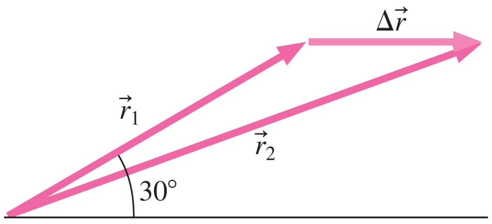
Μονόμετρη (βαθμωτή) ποσότητα: οποιαδήποτε ποσότητα που έχει μέτρο αλλά δεν έχει φορά (π.χ. μήκος, χρόνος, μάζα, εμβαδόν, κτλ.)

Πρόσθεση διανυσμάτων

- Για να προσθέσετε δύο διανύσματα, τοποθετείτε την αρχή του δεύτερου στο πέρας του πρώτου

  - Το άθροισμα είναι τότε το διάνυσμα που εκτείνεται από την αρχή του πρώτου διανύσματος στο πέρας του δεύτερου

  - Εδώ το $\vec{r}_2$ είναι το άθροισμα των $\vec{r}_1$ και $\Delta\vec{r}$



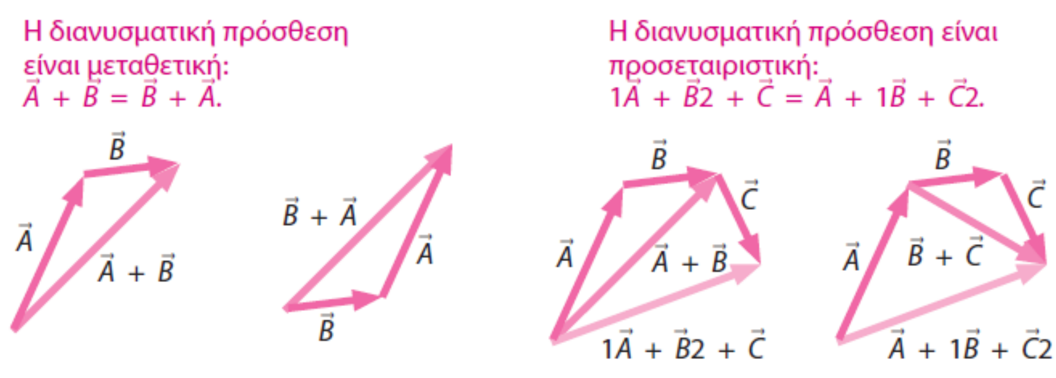
$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$$

Πράξεις διανυσμάτων

- Για να πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα με έναν αριθμό, απλώς αυξάνουμε το μέτρο του διανύσματος κατά αυτόν τον αριθμό
  - Αν ο αριθμός είναι θετικός, η κατεύθυνση του διανύσματος δεν αλλάζει
  - Αν ο αριθμός είναι αρνητικός, η κατεύθυνση του διανύσματος αντιστρέφεται
- Για να αφαιρέσουμε διανύσματα, προσθέτουμε τον αρνητικό του δεύτερου διανύσματος στο πρώτο:

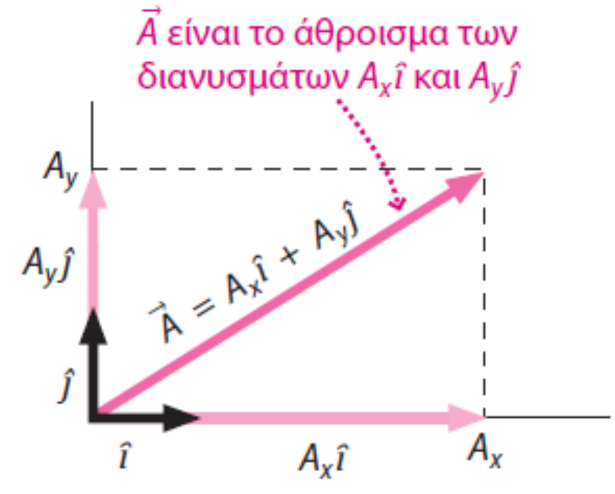
$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right)$$

- Η διανυσματική πρόσθεση είναι μεταθετική και προσεταιριστική:

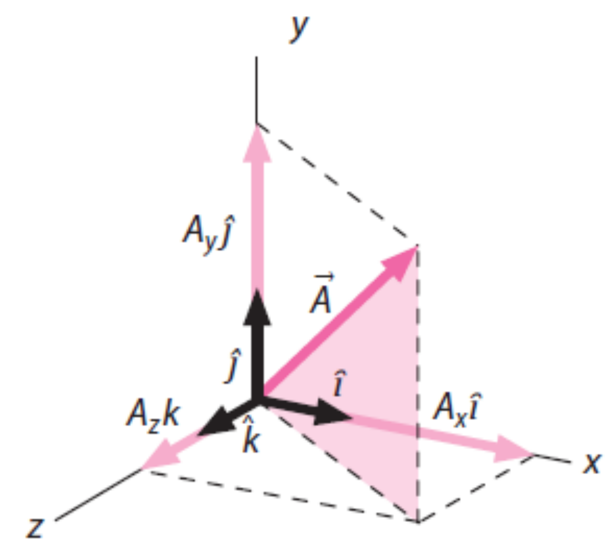


Μοναδιαία διανύσματα

- Τα μοναδιαία διανύσματα έχουν μέτρο 1 χωρίς μονάδες
  - Χρησιμοποιούνται για να προσδιορίσουν την κατεύθυνση σε ολοκληρωμένες μαθηματικές περιγραφές διανυσμάτων
  - Τα μοναδιαία διανύσματα στις κατευθύνσεις *x*, *y* και *z* γράφονται $\hat{i}, \hat{j}$ και $\hat{k}$
  - Κάθε διάνυσμα σε δύο διαστάσεις μπορεί να εκφραστεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός των $\hat{i}$ και $\hat{j}$
  - Κάθε διάνυσμα στις τρεις διαστάσεις μπορεί να εκφραστεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός των $\hat{i}, \hat{j}$ και $\hat{k}$



(α)



(β)

Πράξεις διανυσμάτων με μοναδιαία διανύσματα

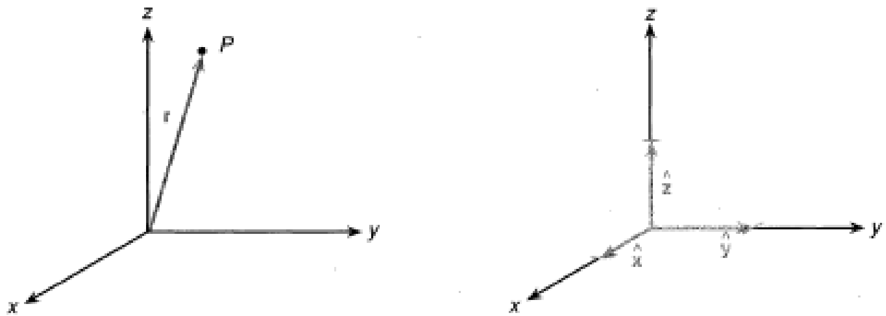
- Για να αθροίσουμε διανύσματα, απλώς αθροίζουμε τις επιμέρους συνιστώσες:
  - Εάν $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$ και $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$, τότε

$$\vec{A} + \vec{B} = \left(A_x + B_x\right)\hat{i} + \left(A_y + B_y\right)\hat{j}$$

  - Ανάλογα, $\vec{A} - \vec{B} = \left(A_x - B_x\right)\hat{i} + \left(A_y - B_y\right)\hat{j}$

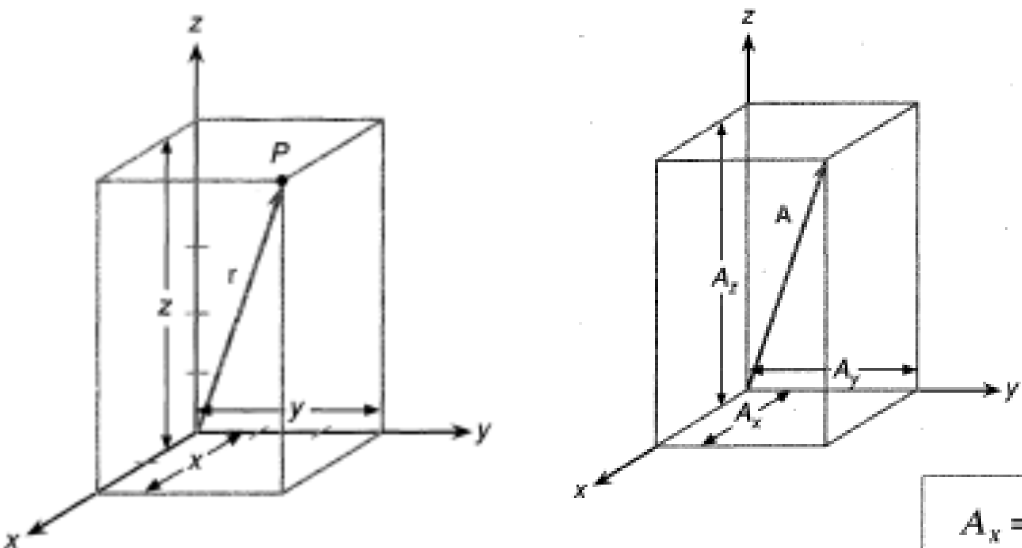
- Για να πολλαπλασιάσουμε με έναν αριθμό, πολλαπλασιάζουμε τις συνιστώσες με τον αριθμό:
  - Εάν $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$
  - τότε $c\vec{A} = cA_x\hat{i} + cA_y\hat{j}$

Επιβατική ακτίνα – Συνιστώσες διανυσμάτων



Σχήμα. Η επιβατική ακτίνα r του σημείου P.

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$$



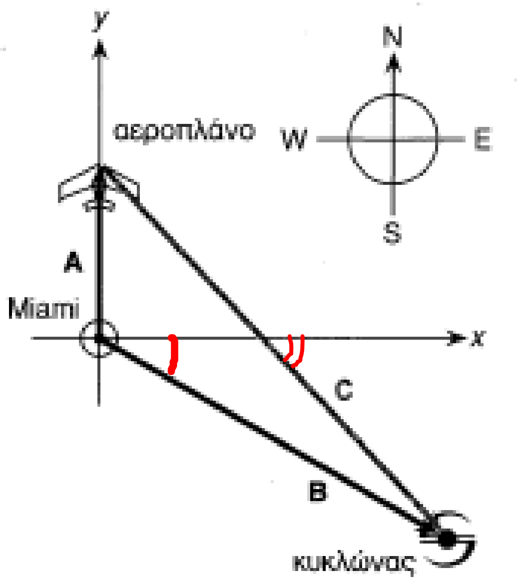
Σχήμα. Οι συνιστώσες χ, y, z της επιβατικής ακτίνας r, και A_x, A_y, A_z ενός τυχαίου διανύσματος A..

$$A_x = A\cos\theta_x \quad A_y = A\cos\theta_y \quad A_z = A\cos\theta_z$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Επιβατική ακτίνα – Συνιστώσες διανυσμάτων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Το μάτι του κυκλώνα βρίσκεται 200 km από το Miami και σχηματίζει γωνία 30° από Α προς Ν. Ενα αναγνωριστικό αεροπλάνο βρίσκεται 100 km βορείως του Miami. Ποιό διάνυσμα μετατόπισης θα φέρει το αεροπλάνο στο μάτι του κυκλώνα;



Το αεροπλάνο έχει επιβατική ακτίνα Α με συνιστώσες:

$$A_x = 0 \text{ km} \qquad A_y = 100 \text{ km}$$

Ο κυκλώνας έχει επιβατική ακτίνα **B** με συνιστώσες

$$B_x = 200 \text{ km} \times \cos 30^\circ = 173 \text{ km}$$

$$B_y = 200 \text{ km} \times \cos 120^\circ = -100 \text{ km}$$

Επειδή A+C=B → C=B-A, το διάνυσμα C έχει συνιστώσες:

$$C_x = B_x - A_x = 173 \text{ km} - 0 \text{ km} = 173 \text{ km}$$

$$C_y = B_y - A_y = -100 \text{ km} - 100 \text{ km} = -200 \text{ km}$$

Το μέτρο του είναι:

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{(173)^2 + (200)^2} \text{ km} = 264 \text{ km}$$

και η γωνία μεταξύ του C και του άξονα x: $\tan \theta_x = \frac{C_y}{C_x} = \frac{-200}{173}$

$$\theta_x = -49.1^\circ$$

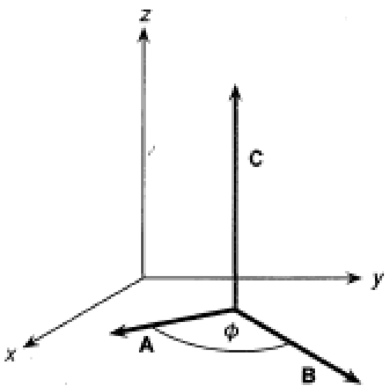
Πολλαπλασιασμός διανυσμάτων

Εσωτερικό Γινόμενο (δίνει αριθμό, όχι διάνυσμα)

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\phi \qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = AA\cos 0 = A^2$$

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}$$

Εξωτερικό Γινόμενο (δίνει διάνυσμα)

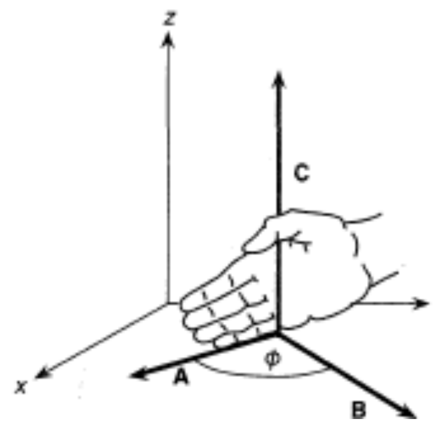


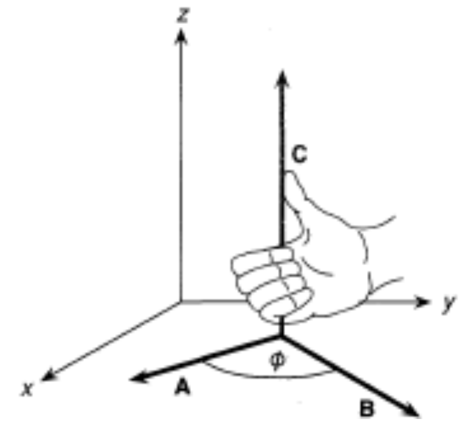
$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

$$C = AB\sin\phi$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\,\mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0$$

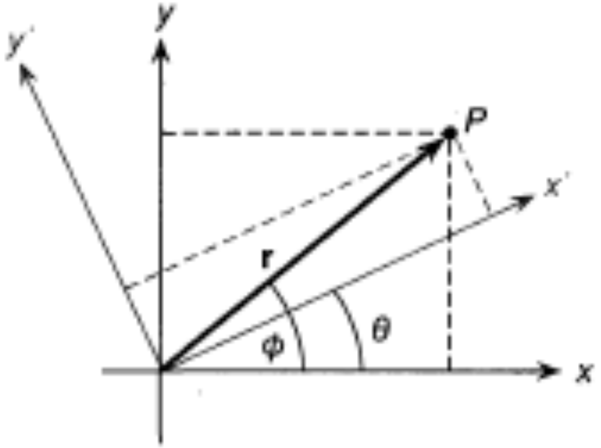




$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} = {} & (A_y B_z - A_z B_y)\,\widehat{\mathbf{x}} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\widehat{\mathbf{y}} \\ & + (A_x B_y - A_y B_x)\,\widehat{\mathbf{z}}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{x}} & \widehat{\mathbf{y}} & \widehat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}}$$

Διανύσματα και περιστροφή συντεταγμένων



Σχήμα. Δύο συστήματα αξόνων ορθογωνίων συντεταγμένων (x, y και x', y')

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{r} = x'\hat{\mathbf{x}}' + y'\hat{\mathbf{y}}'$$

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{A} = A'_x\hat{\mathbf{x}}' + A'_y\hat{\mathbf{y}}'$$

$$A'_x = A_x\cos\theta + A_y\sin\theta$$

$$A'_y = -A_x\sin\theta + A_y\cos\theta$$

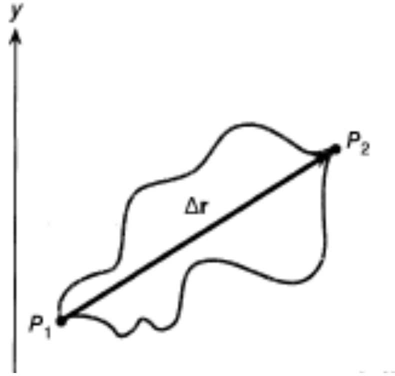
$$\sqrt{A'^2_x + A'^2_y} = \sqrt{A^2_x + A^2_y}$$

Το μέτρο οποιουδήποτε διανύσματος παραμένει αναλλοίωτο από μια περιστροφή συντεταγμένων

Διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης

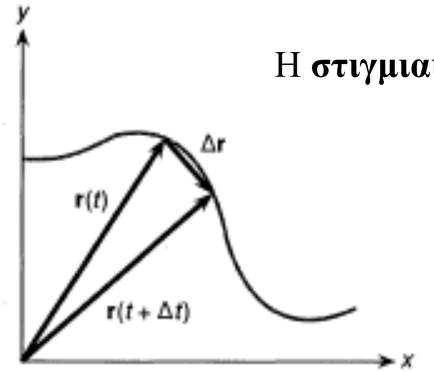
Η **μέση διανυσματική ταχύτητα** έχει τρεις συνιστώσες.

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \bar{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \bar{v}_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$



$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Ίδια μέση διανυσματική ταχύτητα έστω και αν το μήκος των δρόμων δεν είναι ίδιο.



Η **στιγμιαία ταχύτητα** λαμβάνεται από τη μέση διανυσματική ταχύτητα όταν το Δt τείνει στο 0.

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{dy}{dt}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{dz}{dt}\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\left(\hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y + \hat{\mathbf{z}}z\right)$$

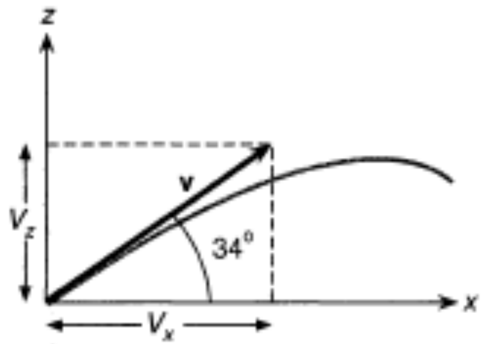
και έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης στο δρόμο που διαγράφει το σωματίδιο

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}}$$

επομένως, το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας είναι η χρονική παράγωγος της επιβατικής ακτίνας

Διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ενας παίκτης του γκολφ κτυπάει την μπάλα προς τ' ανατολικά με αρχική ταχύτητα 30,0 m/s, υπό γωνία 34° ως προς το οριζόντιο επίπεδο (βλ. Σχ. 4.3). Ποιές είναι οι συνιστώσες της στιγμιαίας ταχύτητας της μπάλας στο σύστημα αναφοράς του εδάφους; Οι άξονες x και y κατευθύνονται προς το νότο και προς την ανατολή, αντιστοίχως, και ο άξονας των z είναι κατακόρυφος προς τα πάνω.



ΛΥΣΗ: Σύμφωνα με το Σχ. 4.3 το διάνυσμα της ταχύτητας συμπίπτει με το επίπεδο $x-z$. Σχηματίζει γωνία 34° με τον άξονα των x, 56° με τον άξονα των z και γωνία 90° με τον άξονα των y. Συνεπώς,

$$v_x = v\cos 34° = 30{,}0\ \mathrm{m/s} \times \cos 34° = 24{,}9\ \mathrm{m/s}$$

$$v_y = v\cos 90° = 0\ \mathrm{m/s}$$

$$v_z = v\cos 56° = 30{,}0\ \mathrm{m/s} \times \cos 56° = 16{,}8\ \mathrm{m/s}$$

Διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης

Μέση επιτάχυνση

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad \bar{a}_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \qquad \bar{a}_z = \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$$

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

Στιγμιαία επιτάχυνση

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

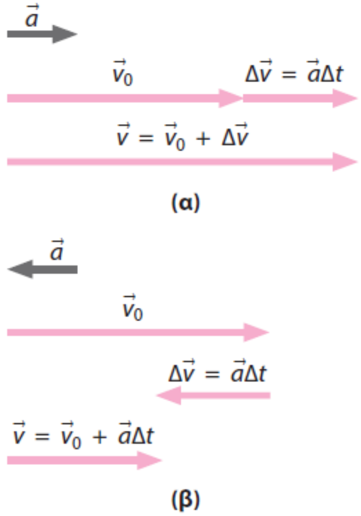
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

δηλαδή προκαλείται επιτάχυνση κάθε φορά που μεταβάλλεται η ταχύτητα είτε κατά μέτρο είτε κατά φορά.

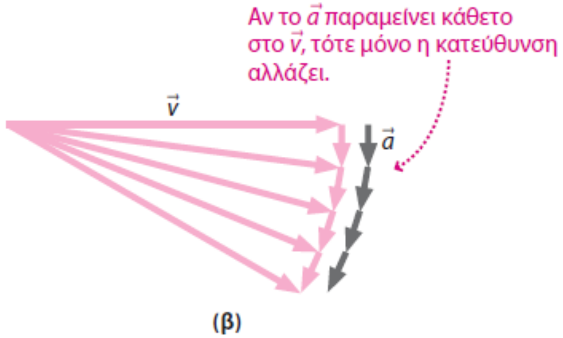
Ταχύτητα και επιτάχυνση σε δύο διαστάσεις

- Μια επιτάχυνση $\vec{a}$ σε χρόνο Δt παράγει μια μεταβολή της ταχύτητας $\Delta\vec{v} = \vec{a}\,\Delta t$
  - Η μεταβολή αθροίζεται *διανυσματικά* για να δώσει τη νέα ταχύτητα: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,\Delta t$
- Η νέα ταχύτητα εξαρτάται από το μέτρο, καθώς και την κατεύθυνση της επιτάχυνσης:

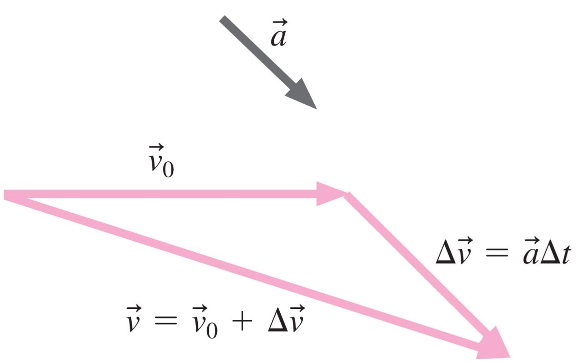
Τα $\vec{v}$ και $\vec{a}$ παράλληλα
Μόνο το μέτρο της ταχύτητας αλλάζει



Τα $\vec{v}$ και $\vec{a}$ κάθετα:
Μόνο η κατεύθυνση αλλάζει

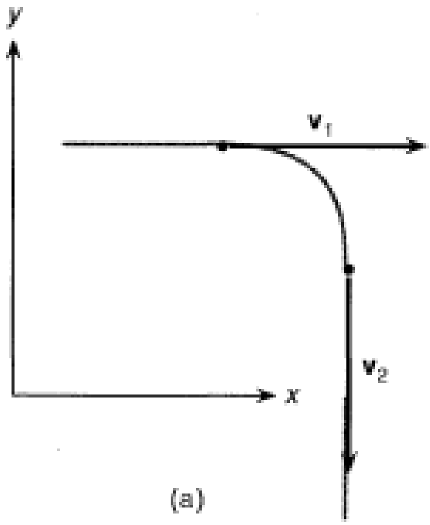


Γενικά:
Τόσο το μέτρο όσο και η κατεύθυνση αλλάζουν



Διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ενα αυτοκίνητο μπαίνει σε στροφή 90° με σταθερή ταχύτητα 25 m/s και βγαίνει από τη στροφή μετά από 6,0 s. Να υπολογιστεί η μέση επιτάχυνση σ' αυτό το χρονικό διάστημα.

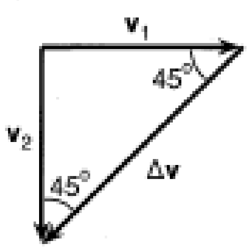


(a)

$$|\Delta \mathbf{v}| = |v_1|/\cos 45^\circ$$
$$= (25\ \mathrm{m/s})/\cos 45^\circ$$
$$= 35{,}4\ \mathrm{m/s}$$

Επομένως, η μέση επιτάχυνση έχει μέτρο

$$|\bar{\mathbf{a}}| = \left|\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}\right| = \frac{35{,}4\ \mathrm{m/s}}{6{,}0\ \mathrm{s}} = 5{,}9\ \mathrm{m/s^2}$$



Η φορά της επιτάχυνσης συμπίπτει με τη φορά του διανύσματος $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$.

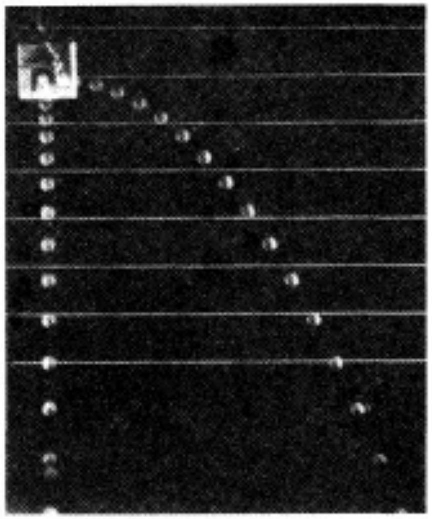
Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$
$$v_y = v_{0y} + a_y t$$
$$v_z = v_{0z} + a_z t$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

$$x - x_0 = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$
$$y - y_0 = v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$
$$z - z_0 = v_{0z}t + \tfrac{1}{2}a_z t^2$$



Σχήμα. Φωτογραφία δύο σφαιριδίων που αφέθησαν να πέσουν ταυτόχρονα από μια εξέδρα με το ένα σφαιρίδιο να έχει οριζόντια ταχύτητα και το άλλο όχι.

Κίνηση βλημάτων

Χαρακτηριστικά: Εκτόξευση από κάποια αρχική θέση με κάποια αρχική ταχύτητα και επίδραση της επιτάχυνσης της βαρύτητας.

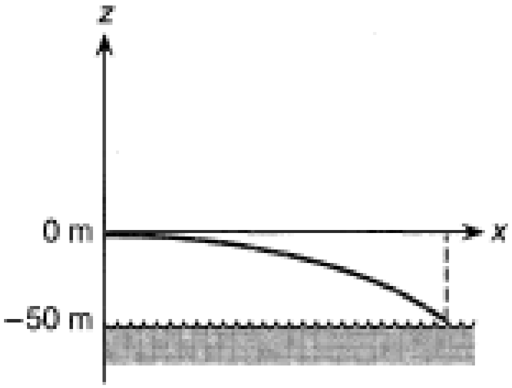
Η αρχική ταχύτητα ενός βλήματος θα έχει εν γένει τόσο οριζόντια όσο και κατακόρυφο συνιστώσα. Αν πάρουμε τον άξονα z κατακόρυφο προς τα πάνω και τον άξονα x προς τη φορά της αρχικής οριζόντιας ταχύτητας, έχουμε $a_x = 0$, $a_y = 0$, $a_z = -g = -9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ και $\upsilon_{0y} = 0$. (Σημειώστε ότι η συνιστώσα a_z είναι *αρνητική* επειδή ο άξονας z κατευθύνεται προς τα πάνω και η επιτάχυνση της βαρύτητας προς τα κάτω). Επιπλέον, χάριν απλότητος, ας υποθέσουμε ότι η αρχή των συντεταγμένων συμπίπτει με την αρχική θέση του βλήματος έτσι, ώστε $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ και $z_0 = 0$. Οι συνιστώσες, τότε, της ταχύτητας και της θέσης θα είναι σύμφωνα με τις Εξ. (18)–(23),

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\upsilon_x &= \upsilon_{0x} \\
\upsilon_y &= 0 \\
\upsilon_z &= \upsilon_{0z} - gt \\
x &= \upsilon_{0x} t \\
y &= 0 \\
z &= \upsilon_{0z} t - \tfrac{1}{2} g t^2
\end{aligned}
}
$$

Εξισώσεις κίνησης βλημάτων

Κίνηση βλημάτων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Κατά το βομβαρδισμό από χαμηλό ύψος (σε "ύψος καμινάδας") ένα βομβαρδιστικό του Β′ Παγκοσμίου Πολέμου αφήνει μια βόμβα σε ύψος 50 m από την επιφάνεια της θάλασσας, ενώ εκτελεί οριζόντια πτήση με ταχύτητα 320 km/h. Πόσο χρόνο θα κάνει η βόμβα να φτάσει στην επιφάνεια; Σε πόση απόσταση από το σημείο εκτόξευσης βρίσκεται το σημείο πρόσκρουσης;



ΛΥΣΗ: Μας διευκολύνει να τοποθετήσουμε την αρχή των αξόνων στο σημείο εκτόξευσης, δηλαδή 50 m πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας, με τον άξονα x παράλληλο προς την οριζόντια διεύθυνση του βομβαρδιστικού (Σχ. 4.6). Η αρχική ταχύτητα της βόμβας είναι ίση με την ταχύτητα του βομβαρδιστικού:

$$v_{0x} = 320 \text{ km/h} = 88{,}9 \text{ m/s}$$

$$v_{0z} = 0$$

Οταν η βόμβα φτάσει στην επιφάνεια της θάλασσας, η κατακόρυφη θέση της είναι $z = -50$ m (ως προς την αρχή των αξόνων!). Με αυτές τις γνωστές ποσότητες, η Εξ. (29) μας δίνει το χρόνο πρόσκρουσης από τη σχέση

$$-50 \text{ m} = -\tfrac{1}{2} g t^2$$

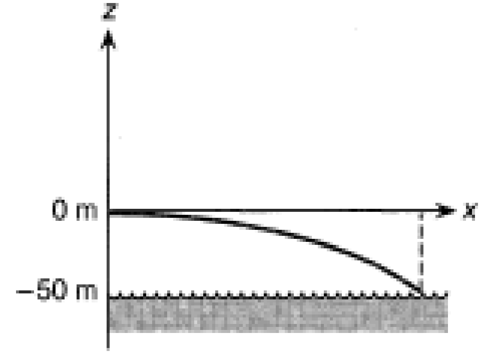
ή

$$t = \sqrt{2 \times 50 \text{ m}/g} = \sqrt{2 \times 50 \text{ m}/(9{,}81 \text{ m/s}^2)} = 3{,}19 \text{ s}$$

Στην ίδια χρονική στιγμή η οριζόντια θέση της βόμβας είναι

$$x = v_{0x} t = 88{,}9 \text{ m/s} \times 3{,}19 \text{ s} = 284 \text{ m}$$

Κίνηση βλημάτων

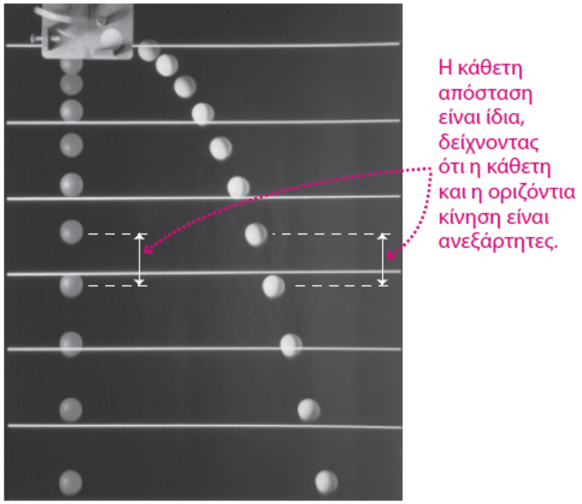


Σημειώστε ότι σ' αυτό το χρονικό διάστημα το βομβαρδιστικό κινείται κατά την ίδια ακριβώς *οριζόντια* απόσταση, δηλ. η βόμβα παραμένει, συνεχώς, ακριβώς κάτω από το βομβαρδιστικό, επειδή και τα δύο έχουν την ίδια οριζόντια ταχύτητα $v_{0x} = 88{,}9\ \mathrm{m/s}$. Στο Σχ. 4.7 φαίνεται η ρίψη βομβών από ένα βομβαρδιστικό σε διαδοχικές χρονικές στιγμές.

Στους υπολογισμούς μας αμελήσαμε και πάλι την αντίσταση του αέρα. Για βομβαρδισμό από χαμηλό ύψος αυτή είναι καλή προσέγγιση, αλλά για βομβαρδισμό από μεγάλο ύψος οι διορθώσεις λόγω αντιστάσεων είναι πολύ σημαντικές.

Ταυτόχρονα με την εκπυρσοκρότηση ενός όπλου που εκτοξεύει οριζόντια (παράλληλα με το έδαφος) μια σφαίρα, αφήνουμε από την παλάμη μας να πέσει ελεύθερα προς τα κάτω μια δεύτερη (όμοια με την πρώτη) σφαίρα. Ποια από τις σφαίρες θα φτάσει πρώτη στο έδαφος; a. Αυτή που αφήνεται ελεύθερη να πέσει b. Αυτή που εκτοξεύεται από το όπλο c. Και οι δυο θα φτάσουν ταυτόχρονα στο έδαφος	**1** 50% αρνητική βαθμολογία

Η οριζόντια και η κάθετη κίνηση είναι ανεξάρτητες



Κίνηση βλημάτων

Υποθέστε ότι ο χρόνος μετριέται από τη στιγμή κατά την οποία το βλήμα φτάνει το μέγιστο ύψος του, έτσι ώστε t < 0 πριν από τη στιγμή μέγιστου ύψους και t > 0 μετά.

Τότε $\upsilon_{0z} = 0$

Εξισώσεις κίνησης βλημάτων

$$v_x = v_{0x}$$
$$v_y = 0$$
$$v_z = v_{0z} - gt$$
$$x = v_{0x}t$$
$$y = 0$$
$$z = v_{0z}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$x = v_{0x}t \qquad z = -\tfrac{1}{2}gt^2$$

$$z = -\tfrac{1}{2}g(x/v_{0x})^2$$

z = (σταθ.) × x^2 που είναι εξίσωση παραβολής στο επίπεδο x-z

<u>Μέγιστο ύψος, χρόνος πτήσης, βεληνεκές</u>

Στο μέγιστο ύψος τη χρονική στιγμή t_{max}: $0 = v_{0z} - gt_{max}$ → $\boxed{t_{max} = v_{0z}/g}$

$$z_{max} = v_{0z}t_{max} - \tfrac{1}{2}gt_{max}^2 = v_{0z}(v_{0z}/g) - \tfrac{1}{2}g(v_{0z}/g)^2 \rightarrow z_{max} = \tfrac{1}{2}v_{0z}^2/g$$

Για να βρούμε το χρόνο πρόσκρουσης

$0 = v_{0z}t - \tfrac{1}{2}gt^2$ Αυτή η εξίσωση έχει δύο λύσεις: $t = 0$ και $t = 2v_{0z}/g$. Η δεύτερη λύση δίνει το χρόνο πτήσεως,

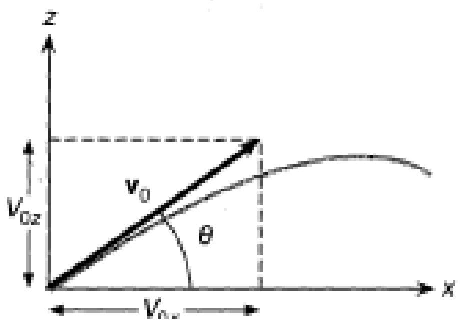
$$\boxed{t_{flight} = 2\upsilon_{0z}/g}$$

Το βεληνεκές είναι απλώς η οριζόντια απόσταση που διανύθηκε στο χρονικό διάστημα $t = t_{flight}$,

$$\boxed{x_{max} = v_{0x}t_{flight} = 2v_{0x}v_{0z}/g}$$

Κίνηση βλημάτων

Οι σχέσεις που δίνουν τα z_{max}, t_{flight}, x_{max} μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει του μέτρου της αρχικής ταχύτητας υ_0:



$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\theta$$

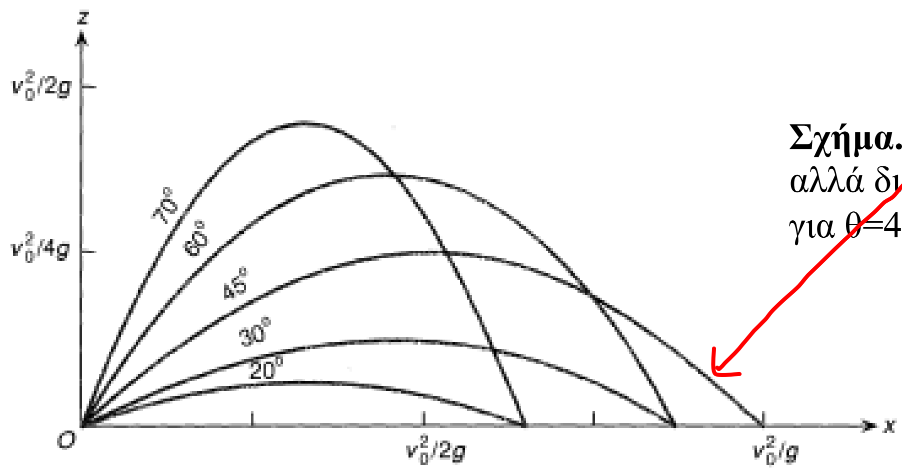
$$\upsilon_{0z} = \upsilon_0 \sin\theta$$

$$z_{max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$t_{flight} = \frac{2\upsilon_0 \sin\theta}{g}$$

$$x_{max} = \frac{2\upsilon_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} \longrightarrow x_{max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

Θυμηθείτε ότι τα παραπάνω ισχύουν όταν τα σημεία εκτόξευσης και πρόσκρουσης βρίσκονται στο ίδιο ύψος (z=0).

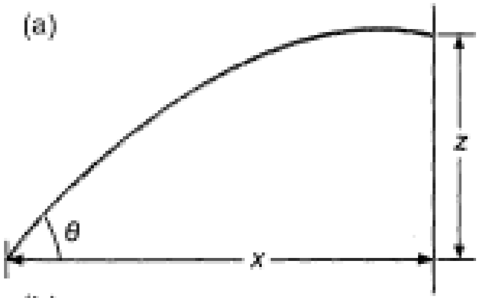


Σχήμα. Τροχιές βλημάτων με την ίδια ταχύτητα εκτόξευσης αλλά διαφορετικές γωνίες βολής. Το βεληνεκές είναι μέγιστο για $\theta = 45^o$ ($\sin 90^0 = 1$)

Κίνηση βλημάτων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Ενας πυροσβέστης στέκεται σε οριζόντια απόσταση x από φλεγόμενο κτίριο και εκτοξεύει μία στήλη νερού από ένα σωλήνα υπό γωνία θ (Σχ. 4.11). Το νερό εκτοξεύεται από το στόμιο του σωλήνα με ταχύτητα v_0. Σε ποιό ύψος z η στήλη νερού θα προσκρούσει στον τοίχο;

(a)



(b)

$$x = v_{0x} t$$

$$z = v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2$$

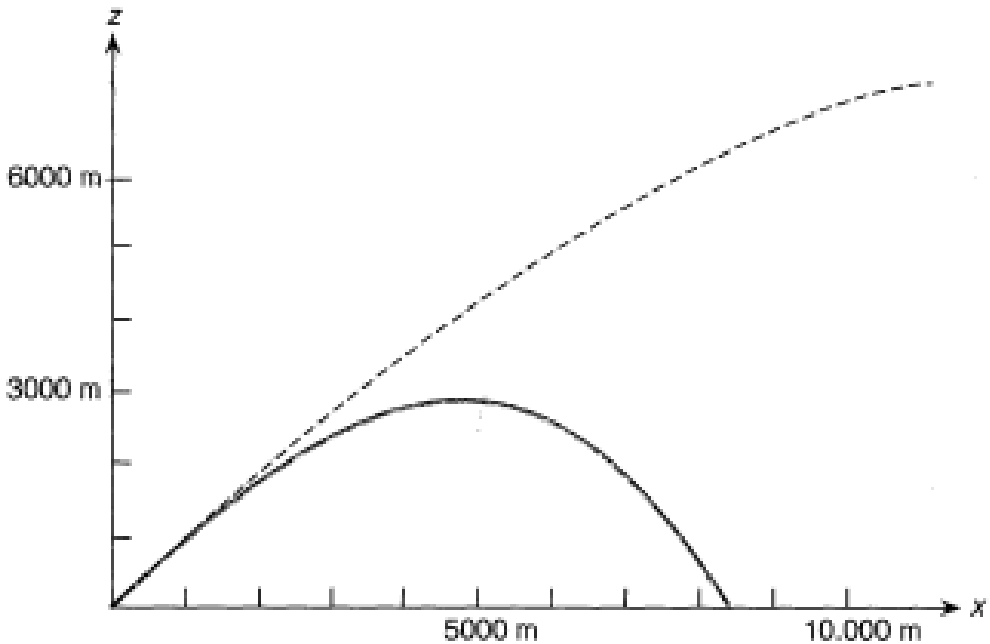
Από την πρώτη παίρνουμε $t = x/v_{0x}$, η οποία όταν αντικατασταθεί στη δεύτερη, μας δίνει το κατακόρυφο ύψος του σημείου πρόσκρουσης,

$$z = \frac{v_{0z}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_{0x}^2}$$

Με $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ και $v_{0z} = v_0 \sin\theta$ έχουμε

$$z = x \tan\theta - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$$

Κίνηση βλημάτων - Βαλλιστική καμπύλη

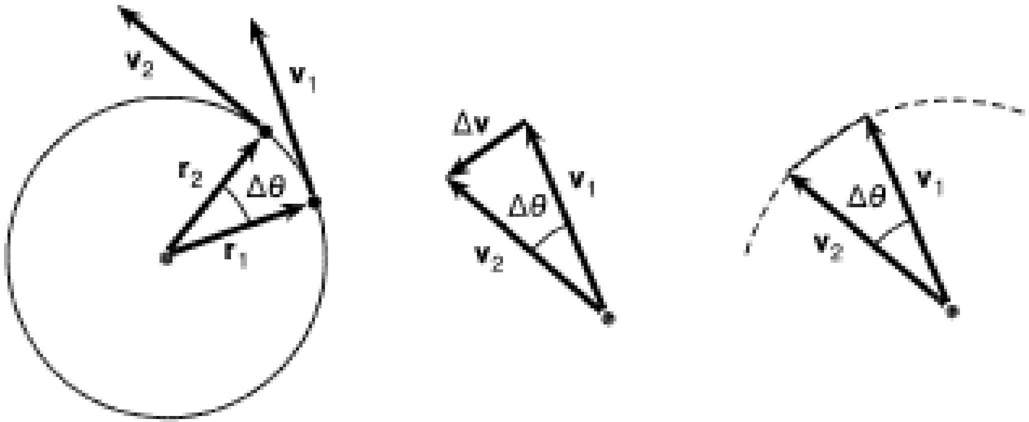


Σχ. 4.12 Τροχιά βλήματος με μεγάλη αντίσταση του αέρα. Το βλήμα είναι ένας οξύρυγχος κύλινδρος διαμέτρου 7,7 cm και μάζας 6,9 kg, ο οποίος εκτοξεύτηκε με $v_0 = 550$ m/s και $\theta = 45°$. Η διακεκομμένη γραμμή δείχνει τη θεωρητική τροχιά χωρίς αντίσταση αέρα. (Από το βιβλίο των C. Cranz και K. Becker, *Exterior Ballistics*.)

Η κίνηση ενός βαλλιστικού πυραύλου πάνω από την ατμόσφαιρα της Γης, είναι μια από τις περιπτώσεις της κίνησης βλήματος χωρίς αντίσταση του αέρα, πράγμα που θα μας παρότρυνε ίσως να εφαρμόσουμε τις απλές εξισώσεις αυτού του εδαφίου για να υπολογίσουμε την τροχιά αυτού του βλήματος. Ομως, για πυραύλους μεγάλου βεληνεκούς, όπως είναι οι διηπειρωτικοί βαλλιστικοί πύραυλοι (ICBM), η καμπυλότητα της επιφάνειας της Γης, η περιστροφή της Γης και η ελάττωση της βαρύτητας με το ύψος κάνουν την κίνηση περίπλοκη και οι απλές εξισώσεις μας δεν ισχύουν. Για μικρού βεληνεκούς βαλλιστικούς πυραύλους ή για βραχέα τμήματα της τροχιάς ενός μεγάλου βεληνεκούς πυραύλου, αυτές οι επί πλέον περιπλοκές είναι λιγότερο σημαντικές και οι εξισώσεις ισχύουν κατά προσέγγιση.

Ομαλή κυκλική κίνηση

(μέτρο ταχύτητας σταθερό, διανύσματα ταχύτητας με σταθερό μέτρο αλλά με διαφορετική διεύθυνση, άρα επιταχυνόμενη κίνηση)



(a) (b) (c)

(a) Οι επιβατικές ακτίνες στις χρονικές στιγμές t και t+Δt.

(b) Τα διανύσματα ταχύτητας στις χρονικές στιγμές t και t+Δt. Η διαφορά των διανυσμάτων ταχύτητας είναι Δv.

(c) Το κυκλικό τόξο σχεδόν συμπίπτει με ευθύγραμμο τμήμα που συνδέι τα άκρα των διανυσμάτων v_1 και v_2.

Όταν Δθ→0, το ευθύγραμμο τμήμα έχει μήκος |Δv| και το κυκλικό τόξο έχει μήκος [ακτίνα]×[γωνία σε ακτίνια] =υ×Δθ, άρα |Δv| ≈ υΔθ. Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι επομένως:

$$a = \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} \cong \upsilon \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{[\text{μήκος δρόμου}]}{[\text{ταχύτητα}]} = \frac{[\text{ακτίνα}] \times [\text{γωνία σε ακτίνια}]}{[\text{ταχύτητα}]} = r\,\Delta\theta / \upsilon \longrightarrow \boxed{a \cong \upsilon \frac{\Delta\theta}{r\,\Delta\theta/\upsilon} = \frac{\upsilon^2}{r}}$$

Ομαλή κυκλική κίνηση

Μέτρο της επιτάχυνσης στην ομαλή κυκλική κίνηση: $\alpha = \upsilon^2/r$

Φορά της επιτάχυνσης στην ομαλή κυκλική κίνηση:

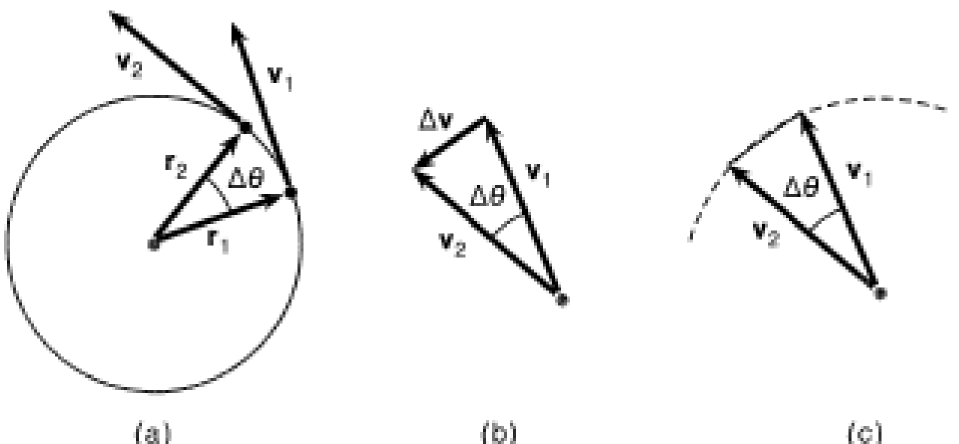
στο όριο $\Delta\theta \rightarrow 0$, η φορά θα είναι κάθετη στα διανύσματα ταχύτητας $\alpha = \upsilon^2/r$

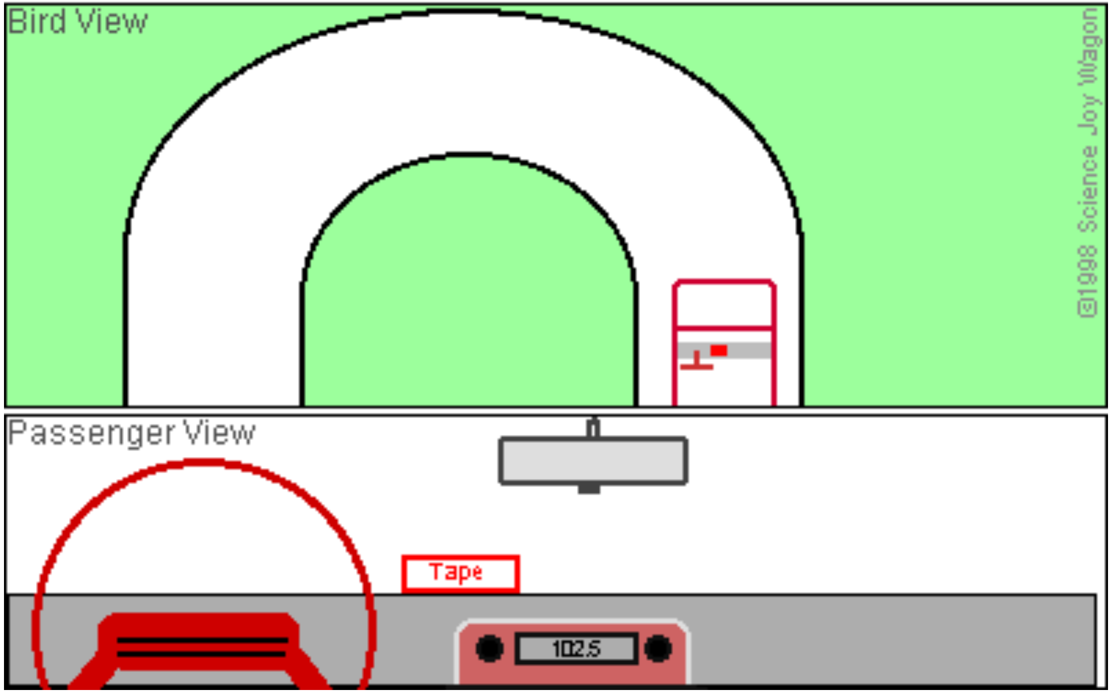
επειδή το διάνυσμα ταχύτητας εφάπτεται στον κύκλο,

η επιτάχυνση συμπίπτει με την ακτίνα του κύκλου με φορά προς το κέντρο του.

Κεντρομόλος επιτάχυνση

(centripetal acceleration) not centrifuge





- Τα ελαστικά του αυτοκινήτου έχουν αρκετή τριβή για να λειτουργήσουν ως κεντρομόλος δύναμη που αναγκάζει το αυτοκίνητο να βρίσκεται σε μια καμπύλη. Η ταινία στο ολισθηρό ταμπλό δεν έχει αρκετή τριβή για να λειτουργήσει ως κεντρομόλος δύναμη, οπότε ελλείψει κεντρομόλου δύναμης η ταινία ακολουθεί ευθεία κίνηση.
- Από την οπτική γωνία του συνοδηγού φαίνεται ότι κάτι (μια δύναμη φάντασμα;) μετακινεί την ταινία πάνω στο ταμπλό.
- Εάν το αυτοκίνητο έχει τα παράθυρα κατεβασμένα, τότε η ταινία θα φύγει από το αυτοκίνητο (ή το αυτοκίνητο αφήνει την ταινία;) καθώς ακολουθεί την ευθεία γραμμή. Εάν τα παράθυρα είναι κλειστά τότε το παράθυρο θα δώσει μια κεντρομόλο δύναμη στην ταινία και θα τη διατηρήσει σε κυκλική διαδρομή.

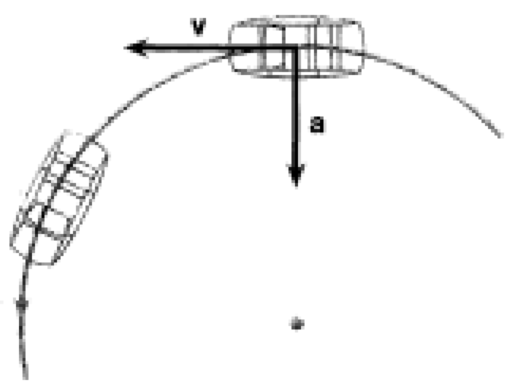
- **Κάθε φορά που χρησιμοποιείται η λέξη Φυγόκεντρη Δύναμη, αυτό που πραγματικά περιγράφεται είναι η έλλειψη κεντρομόλου.**

Ομαλή κυκλική κίνηση

Ένας αστροναύτης στα πλαίσια της εκπαίδευσής του, περιστρέφεται με ειδική διάταξη σε κύκλο ακτίνας 15 m. Αν η διάταξη εκτελεί 24 rpm, σε πόσα g αντιστοιχεί η επιτάχυνση που δέχεται ο αστροναύτης;

$$\upsilon = \frac{2\pi \times 15\ \mathrm{m}}{60/24\ \mathrm{s}} = 38\ \mathrm{m/s} \longrightarrow a = \frac{\upsilon^2}{r} = \frac{(38\ \mathrm{m/s})^2}{15\ \mathrm{m}} = 95\ \mathrm{m/s^2} \longrightarrow \alpha = 95/9{,}8 = 9{,}7g$$

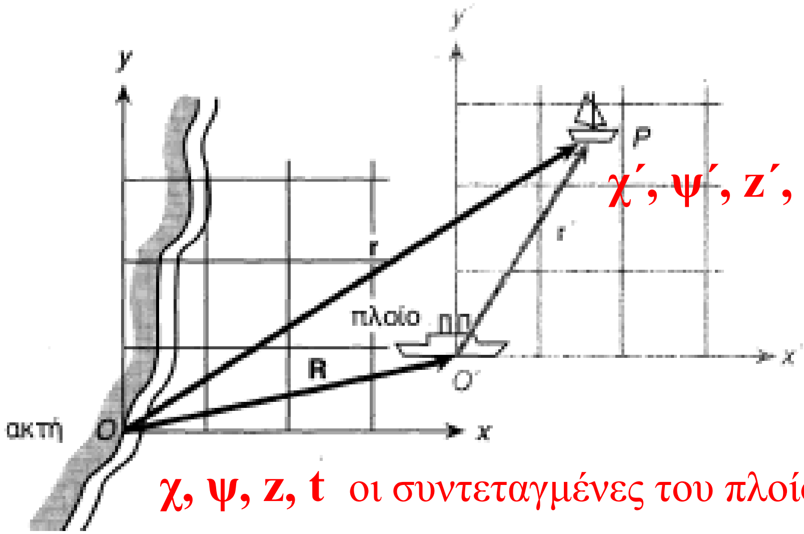
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Ενα αυτοκίνητο εισέρχεται σε κυκλική στροφή ακτίνας 30 m (Σχ. 4.17). Αν οι τροχοί μπορούν ν' αντισταθούν σε μέγιστη εγκάρσια επιτάχυνση $8{,}0\ \mathrm{m/s^2}$ χωρίς να ολισθήσουν, ποιά είναι η μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα;



$$\upsilon^2 = ra = 30\ \mathrm{m} \times 8{,}0\ \mathrm{m/s^2} = 2{,}4 \times 10^2\ \mathrm{m^2/s^2}$$

$$\upsilon = 15\ \mathrm{m/s} = 56\ \mathrm{km/h}$$

Η σχετικότητα της κίνησης και οι μετασχηματισμοί του Galileo



χ΄, ψ΄, z΄, t΄ οι συντεταγμένες του πλοίου P ως προς το άλλο πλοίο

Σχήμα. Το πλέγμα συντεταγμένων x΄-y΄ του πλοίου που κινείται ανατολικά με 10 m/s ως προς το πλέγμα συντεταγμένων x-y της ακτής.

χ, ψ, z, t οι συντεταγμένες του πλοίου P ως προς την ακτή

<u>Μετασχηματισμοί Galileo</u>

$t' = t$

$R = V_0 t \rightarrow$ (επειδή $r = r' + R$) $r = r' + V_0 t \rightarrow r' = r - V_0 t$

(V_0 η ταχύτητα του 2ου συστήματος συντεταγμένων ως προς το 1ο)

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} - \mathbf{V}_O t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{V}_O \longrightarrow \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}_O$$

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} - \mathbf{V}_O) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - 0 \longrightarrow \mathbf{a}' = \mathbf{a}$$

Επομένως οι επιταχύνσεις του ιστιοφόρου που μετριούνται στα δύο συστήματα αναφοράς είναι ίδιες.

Αυτό σημαίνει ότι η επιτάχυνση είναι **<u>απόλυτη</u>**, δηλ. δεν εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς.

Σύνοψη

Μέση (διανυσματική) ταχύτητα: $\overline{\mathbf{v}} = \dfrac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$

Στιγμιαία (διανυσματική) ταχύτητα: $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$

Μέση επιτάχυνση: $\overline{\mathbf{a}} = \dfrac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$

Στιγμιαία επιτάχυνση: $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$

Κίνηση με σταθερή επιτάχυνση: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

Κίνηση βλημάτων: $\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\theta$

$$\upsilon_z = \upsilon_{0z} - gt = \upsilon_0 \sin\theta - gt$$

$$x = \upsilon_{0x} t$$

$$z = \upsilon_{0z} t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

Βεληνεκές, μέγιστο ύψος, και χρόνος πτήσεως (υπεράνω επιπέδου εδάφους):

$$x_{\max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$z_{\max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$t_{\text{flight}} = \frac{2\upsilon_0 \sin\theta}{g}$$

Κεντρομόλος Επιτάχυνση (μέτρο) σε ομαλή κυκλική κίνηση: $a = \upsilon^2 / r$

Μετασχηματισμοί Γαλιλαίου: $t' = t$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}_O t$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}_O$$