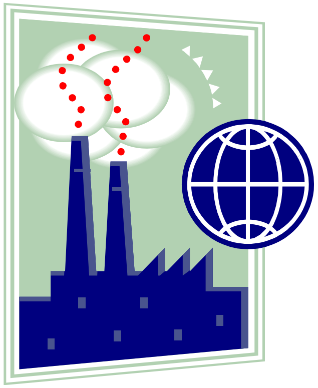
Φυσική



Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

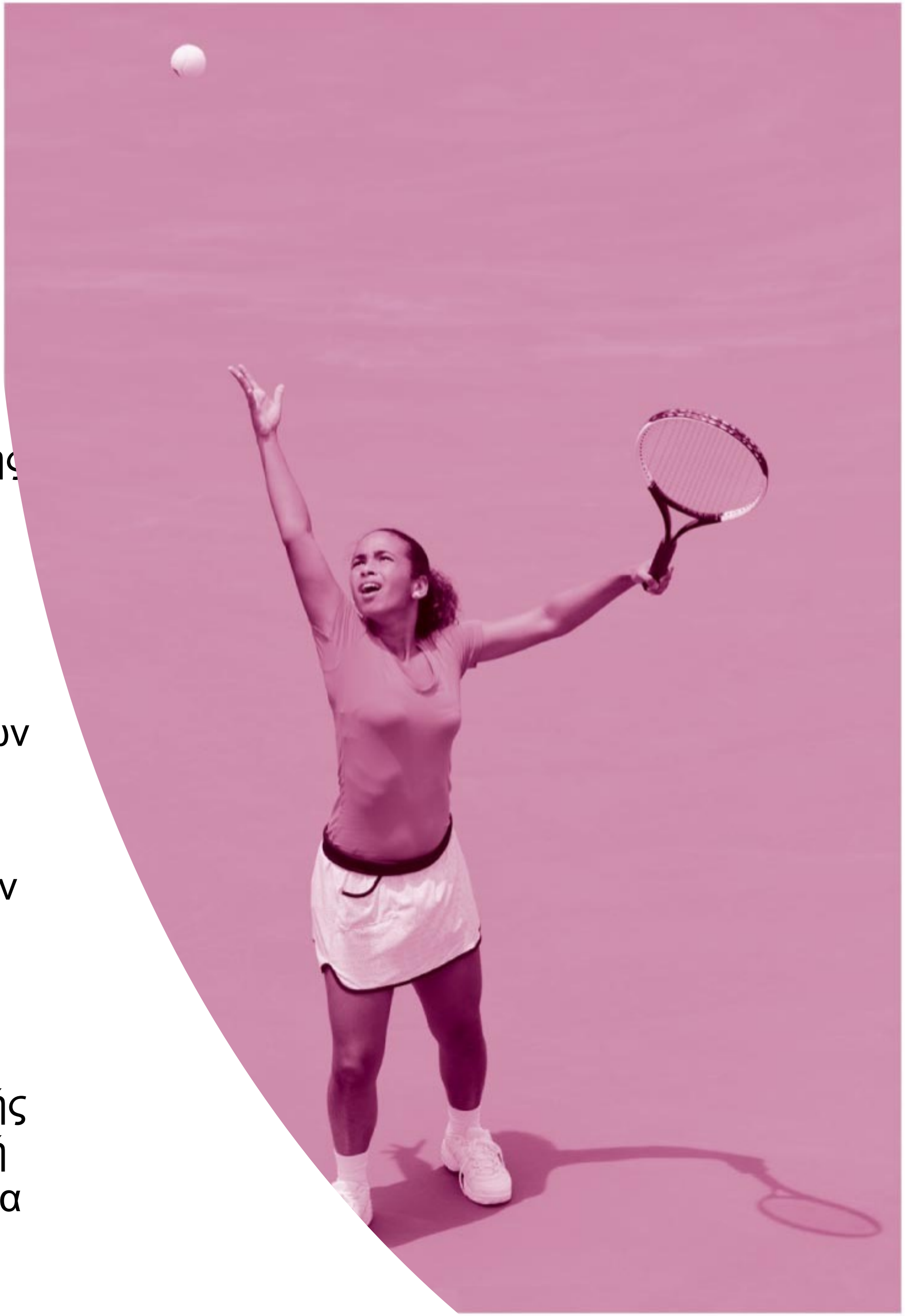
2ο μάθημα

Πρόγραμμα διαλέξεων

Εβδομάδα	Θεματική Ενότητα Διάλεξης
1	Κάνοντας Φυσική, Μετρήσεις χώρου, χρόνου, και μάζας
2	Ευθύγραμμη κίνηση
3	Κίνηση σε δύο και τρεις διαστάσεις
5	Δύναμη και κίνηση
6	Χρήση των νόμων του Νεύτωνα
7	Ενέργεια, έργο και ισχύς
8	Διατήρηση ενέργειας
9	Βαρύτητα
10	Συστήματα Σωματιδίων
11	Περιστροφική κίνηση, διανύσματα περιστροφής και στροφορμή
12	Στατική ισορροπία
13	Θερμότητα και θερμότητα, θερμική συμπεριφορά της ύλης

Τι μαθαίνετε

- Τις θεμελιώδεις έννοιες που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της κίνησης
  - Ταχύτητα
  - Επιτάχυνση
- Τη διαφορά μεταξύ μέσων και στιγμιαίων τιμών
  - Τη χρήση διαφορικού λογισμού για τον καθορισμό των στιγμιαίων τιμών
- Πώς να περιγράφετε την κίνηση με σταθερή επιτάχυνση σε μία διάσταση
  - Συμπεριλαμβανομένης της σταθερής επιτάχυνσης κάτω από την επιρροή της βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια της Γης

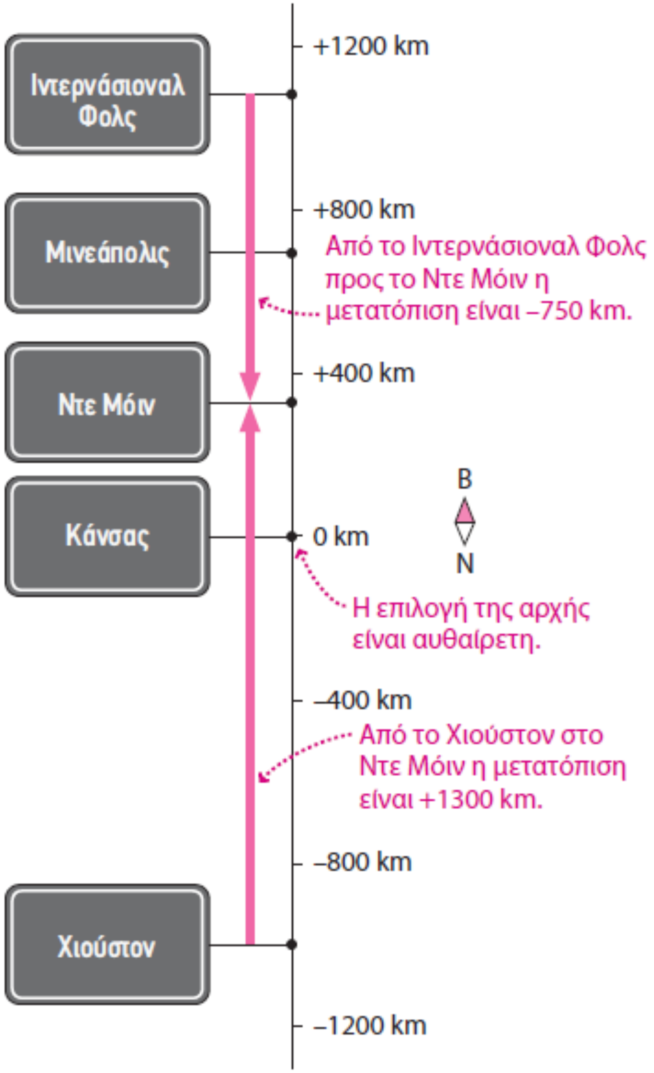


Θέση και μετατόπιση

- Σε μία διάσταση, η θέση μπορεί να περιγραφεί από έναν θετικό ή αρνητικό αριθμό σε μια αριθμητική σειρά, που ονομάζεται επίσης σύστημα συντεταγμένων
    - Η θέση μηδέν, η αφετηρία του συστήματος συντεταγμένων, μπορεί να τοποθετηθεί σε οποιαδήποτε τοποθεσία εξυπηρετεί
- **Μετατόπιση** είναι η συνολική μεταβολή της θέσης
    - Για κίνηση κατά μήκος της x κατεύθυνσης, η μετατόπιση συμβολίζεται ως Δx:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

όπου x_1 και x_2 η αρχική και η τελική θέση αντίστοιχα



Μέση ταχύτητα

$$[\text{μέση ταχύτητα}] = \frac{[\text{διανυθέν διάστημα}]}{[\text{χρονικό διάστημα}]}$$

Φως	$3{,}0 \times 10^8$ m/s
Απομάκρυνση του ταχύτερου γνωστού quasar	$2{,}7 \times 10^8$ m/s
Ηλεκτρόνιο γύρω από πυρήνα (υδρογόνο)	$2{,}2 \times 10^6$ m/s
Γη γύρω από τον Ηλιο	$3{,}0 \times 10^4$ m/s
Υπερηχητικό επιβατικό αεροπλάνο (Tu-144) (μέγιστη ταχύτητα)	$7{,}1 \times 10^2$ m/s
Σφαίρα όπλου (στην έξοδο της κάννης)	$\sim 7 \times 10^2$ m/s
Περιστροφή της Γης (στον Ισημερινό)	$4{,}6 \times 10^2$ m/s
Τυχαία κίνηση μορίων στον αέρα (μέση)	$4{,}5 \times 10^2$ m/s
Ηχος	$3{,}3 \times 10^2$ m/s
Αεριωθούμενο (Boeing 747, μέγιστη ταχύτητα)	$2{,}7 \times 10^2$ m/s
Cheetah (μέγιστη)	28 m/s
Μέγιστη ταχύτητα σε εθνική οδό	25 m/s
Ανθρωπος (μέγιστη)	12 m/s
Ανθρωπος (ταχύ βάδισμα)	1,3 m/s
Σαλιγκάρι	$\sim 10^{-3}$ m/s
Παγετώνας	$\sim 10^{-6}$ m/s
Ρυθμός αύξησης μήκους τρίχας (ανθρώπου)	3×10^{-9} m/s
Μετατόπιση ηπείρων	$\sim 10^{-9}$ m/s
Ρυθμός καταβύθισης Νότιας Αγγλίας	$\sim 10^{-10}$ m/s

Μέση ταχύτητα (πάντα θετική)

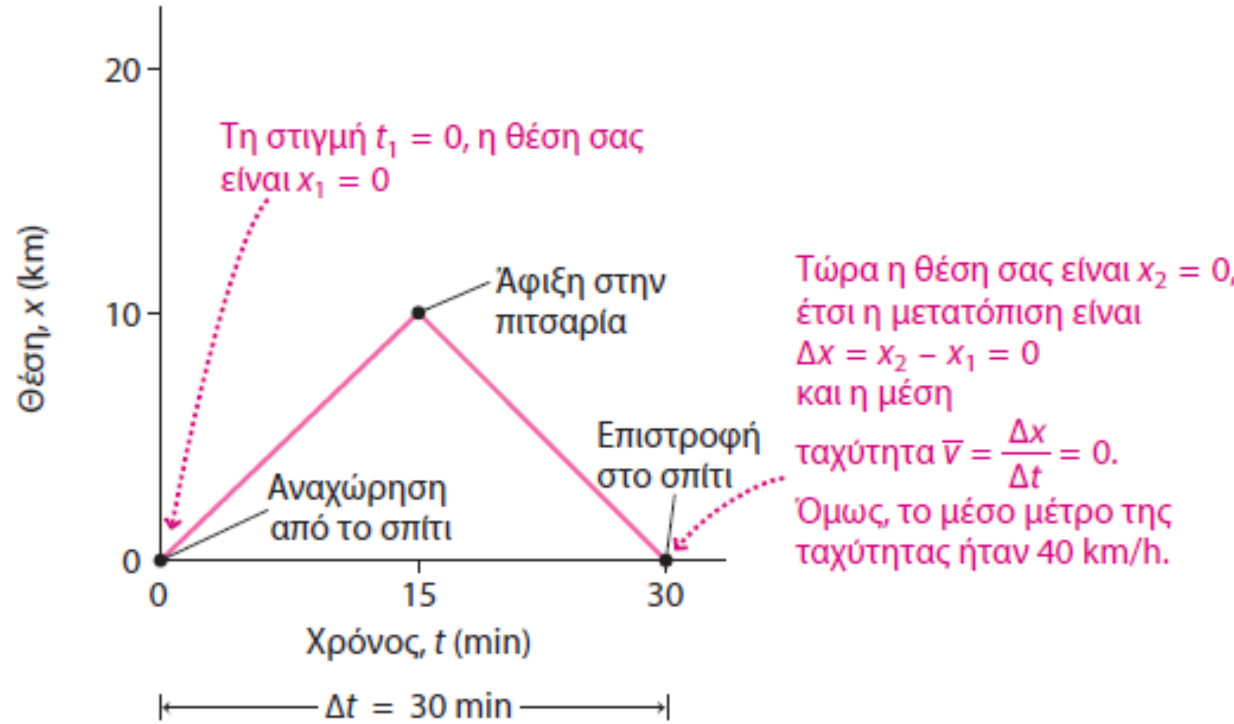
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Η Γη κινείται γύρω από τον Ήλιο σε κυκλική τροχιά ακτίνας $1{,}5 \times 10^8$ km. Ποιά είναι η μέση ταχύτητα της Γης ως προς τον Ήλιο;

ΛΥΣΗ: Η Γη εκτελεί μία περιστροφή σε 1 έτος δηλ. σε $3{,}16 \times 10^7$ s. Η απόσταση που καλύφθηκε σ' αυτό το χρόνο είναι $2\pi \times 1{,}5 \times 10^8$ km. Επομένως,

$$[\text{μέση ταχύτητα}] = \frac{2\pi \times 1{,}5 \times 10^8\,\text{km}}{3{,}16 \times 10^7\,\text{s}} = 29{,}8\ \text{km/s}$$

Κίνηση και ταχύτητα έννοιες σχετικές: εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς.

Μέση κίνηση

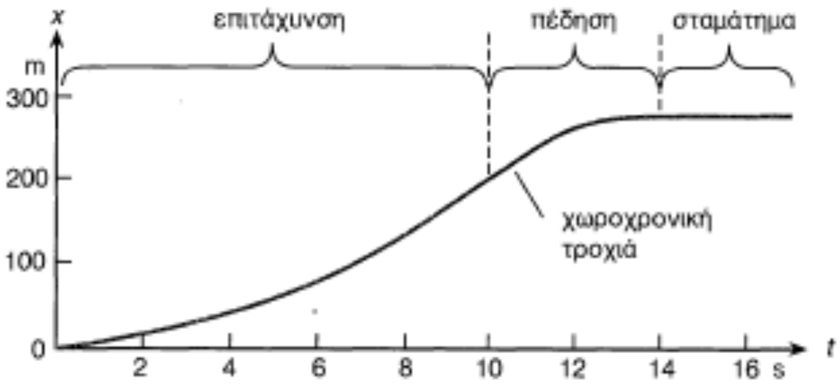


- **Μέσο μέτρο ταχύτητας** (average speed) είναι η απόσταση διαιρεμένη με τον χρόνο
- Η **μέση ταχύτητα** (average velocity) σε ένα χρονικό διάστημα Δt ορίζεται ως η μετατόπιση διαιρεμένη με τον χρόνο:

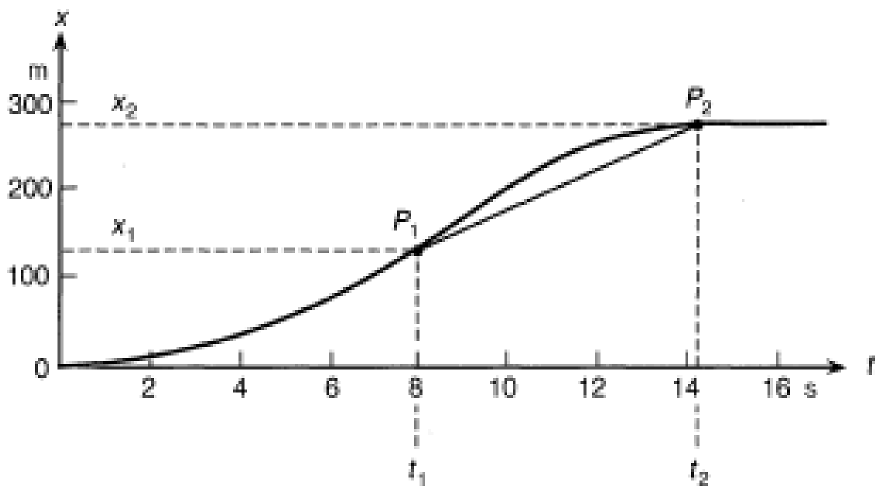
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- Για μια διαδρομή μετ' επιστροφής, η μέση ταχύτητα είναι μηδέν, παρόλο που το μέτρο της ταχύτητας δεν είναι μηδέν!

Μέση διανυσματική ταχύτητα σε μια διάσταση (είτε θετική, είτε αρνητική)



Σχήμα. Η χωροχρονική τροχιά ενός αυτοκινήτου που επιταχύνεται, φρενάρει και σταματάει.



Σχήμα. Η ευθεία γραμμή που συνδέει τα σημεία P_1 και P_2 έχει κλίση $(x_2-x_1)/(t_2-t_1)$. Αυτή η κλίση είναι η μέση διανυσματική ταχύτητα.

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \qquad \boxed{\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

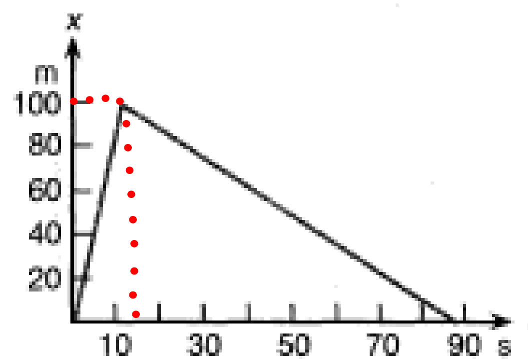
$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{270\,\mathrm{m} - 130\,\mathrm{m}}{14{,}0\,\mathrm{s} - 8{,}0\,\mathrm{s}} = \frac{140\,\mathrm{m}}{6{,}0\,\mathrm{s}} = 23\,\mathrm{m/s}$$

Μέση διανυσματική ταχύτητα σε μια διάσταση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Ενας δρομέας, εκτελώντας ευθύγραμμη κίνηση, διανύει 100 m σε 11 s, και μετά γυρίζει πίσω, σε 80 s, περπατώντας. Ποιά είναι η μέση διανυσματική και ποιά η μέση βαθμωτή ταχύτητα για κάθε τμήμα της κίνησης, και για ολόκληρη την κίνηση;

ΛΥΣΗ: Η χωροχρονική τροχιά του δρομέα φαίνεται στο Σχ. 2.3. Η κίνηση έχει δύο τμήματα: τροχάδην ($0\,s \le t \le 11\,s$) και βάδην ($11\,s \le t \le 91\,s$). Η μέση διανυσματική ταχύτητα για το τμήμα τροχάδην είναι

$$\bar{\upsilon} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{+100\ \mathrm{m}}{11\ s} = +9{,}1\ \mathrm{m/s}$$



Η μέση διανυσματική ταχύτητα για το βάδην είναι

$$\bar{\upsilon} = \frac{-100\ \mathrm{m}}{80\ s} = -1{,}2\ \mathrm{m/s}$$

Η μέση διανυσματική ταχύτητα για ολόκληρη την κίνηση είναι

$$\bar{\upsilon} = \frac{0\ \mathrm{m}}{91\ s} = 0\ \mathrm{m/s}$$

Είναι μηδέν επειδή η καθαρή μεταβολή δρόμου είναι μηδέν.

Η μέση βαθμωτή ταχύτητα για το τροχάδην και για το βάδην είναι αντιστοίχως, 9,1 m/s και 1,2 m/s. Η μέση ταχύτητα για ολόκληρη την κίνηση είναι

$$\frac{200\ \mathrm{m}}{91\ s} = 2{,}2\ \mathrm{m/s}$$

Στιγμιαία ταχύτητα

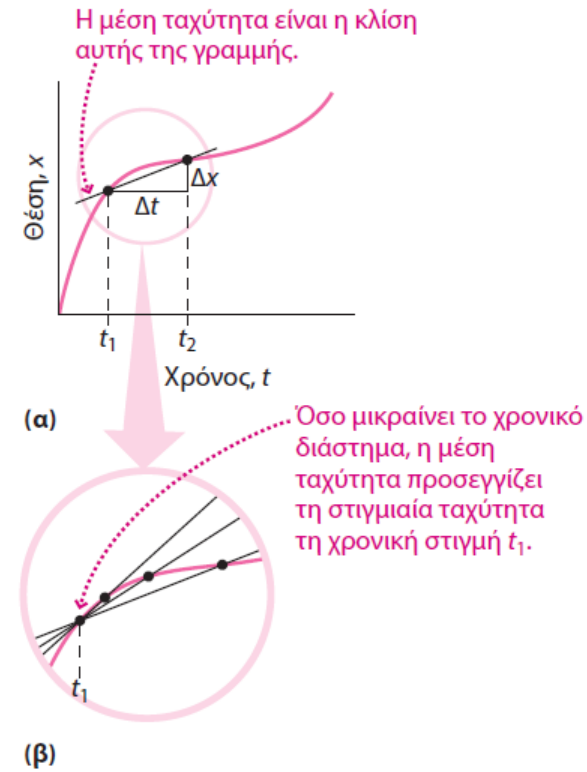
- **Στιγμιαία ταχύτητα** είναι το όριο της μέσης ταχύτητας καθώς το χρονικό διάστημα γίνεται πολύ μικρό:

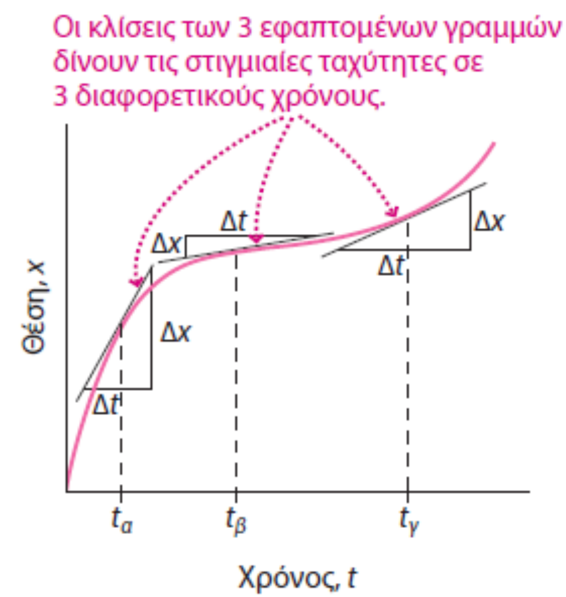
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- Αυτή η οριακή διαδικασία ορίζει την **παράγωγο**

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

  - Στιγμιαία ταχύτητα είναι η κλίση της καμπύλης της θέσης ως προς τον χρόνο
- **Στιγμιαίο μέτρο ταχύτητας** είναι το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας





Χρήση διαφορικού λογισμού για την εύρεση παραγώγων

- Στον διαφορικό λογισμό, η παράγωγος δίνει το αποτέλεσμα της οριακής διαδικασίας
  - Οι παράγωγοι των δυνάμεων είναι απλές:

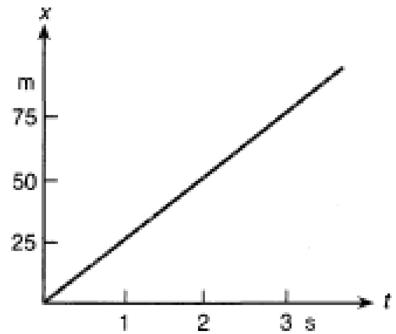
$$\frac{d\left(bt^n\right)}{dt} = bnt^{n-1}$$

Άλλες συνήθεις παράγωγοι προϋποθέτουν χρήση τριγωνομετρικών εξισώσεων:

$$\frac{d\left(\sin bt\right)}{dt} = b\cos bt$$

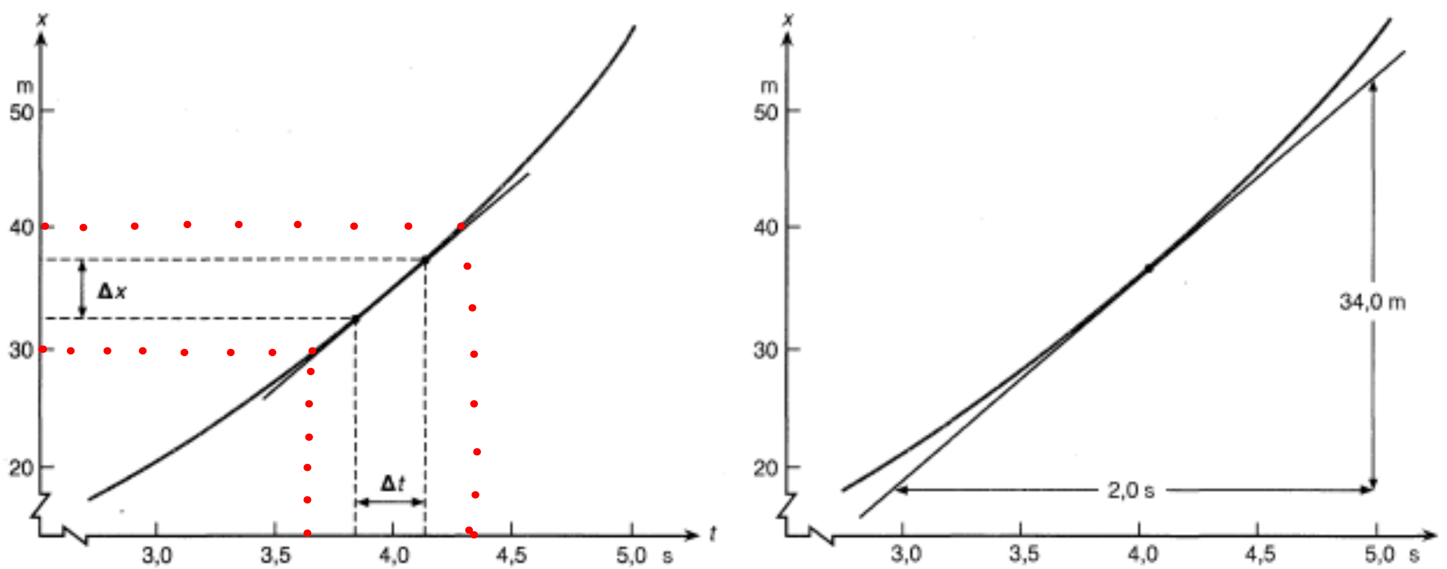
$$\frac{d\left(\cos bt\right)}{dt} = -b\sin bt$$

Στιγμιαία διανυσματική ταχύτητα



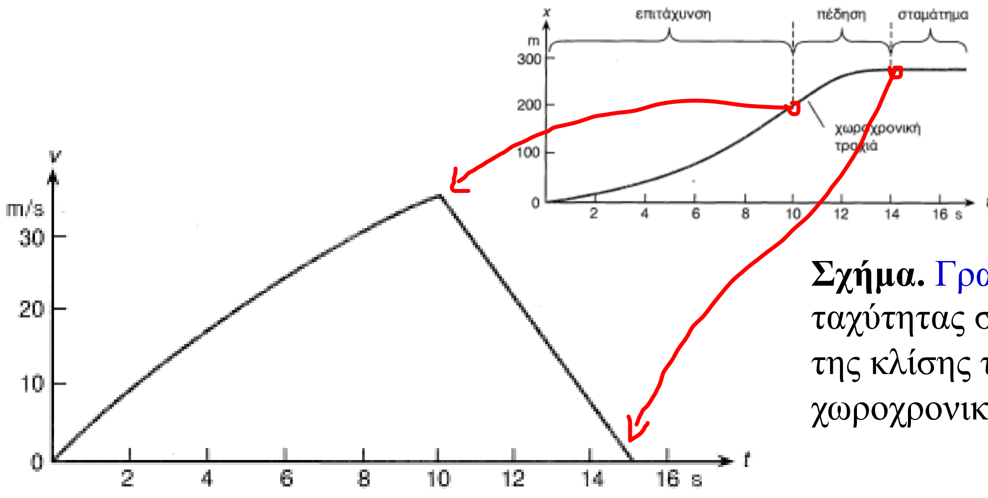
Σχήμα. Η χωροχρονική τροχιά αυτοκινήτου που κινείται με σταθερή ταχύτητα 25 m/s.

Η μέση διανυσματική ταχύτητα είναι 25 m/s, ομοίως και η στιγμιαία ταχύτητα για τη συγκεκριμένη κίνηση.



Σχήμα. Στο μικρό χρονικό διάστημα Δt μπορούμε να προσεγγίσουμε τη χωροχρονική τροχιά με ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα άκρα του διαστήματος. Με την ακρίβεια που δίνει το σχήμα αυτό το ευθύγραμμο τμήμα συμπίπτει με εφαπτομένη στο σημείο t=4s. Η εφαπτομένη της χωροχρονικής τροχιάς στο σημείο t=4s έχει κλίση 34/2=17m/s.

Στιγμιαία διανυσματική ταχύτητα



Σχήμα. Γραφική μέθοδος υπολογισμού της στιγμιαίας ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου (προέκυψε από τη μέτρηση της κλίσης των εφαπτομένων σε όλα τα σημεία της χωροχρονικής τροχιάς).

Αν όμως τα δεδομένα δίνονται αναλυτικά, π.χ. η θέση του αυτοκινήτου περιγράφεται από τους τύπους:

$$x = 2{,}376\ t^2 - 0{,}042\ t^3 \quad \text{για} \quad 0\ \text{s} \leq t \leq 10\ \text{s}$$

$$x = -555{,}8 + 115{,}4\ t - 4{,}022\ t^2 \quad \text{για} \quad 10\ \text{s} \leq t \leq 14{,}3\ \text{s}$$

τότε:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \longrightarrow v = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\Delta x}{\Delta t} \longrightarrow \boxed{v = \frac{dx}{dt}} \longrightarrow$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 4{,}752\ t - 0{,}126\ t^2 \quad \text{για} \quad 0\ \text{s} \leq t \leq 10\ \text{s}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 115{,}4 - 8{,}044\ t \quad \text{για} \quad 10\ \text{s} \leq t \leq 14{,}3\ \text{s}$$

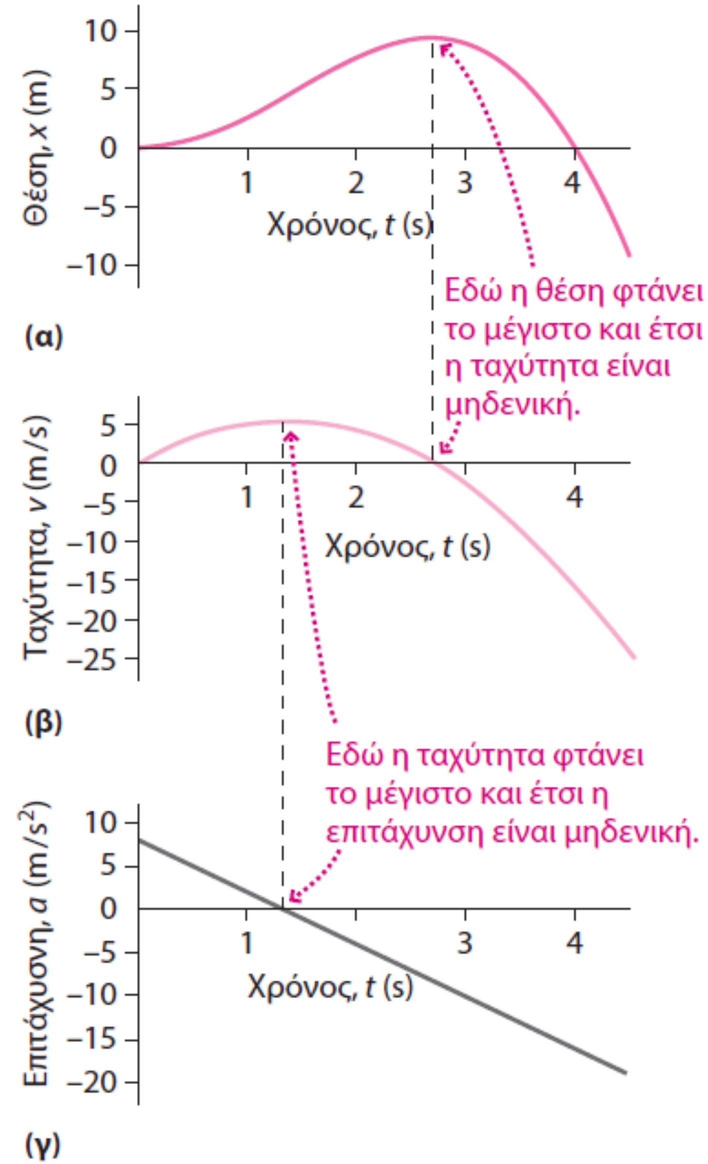
Επιτάχυνση

- **Επιτάχυνση** είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας
  - Η **μέση επιτάχυνση** σε ένα χρονικό διάστημα Δt ορίζεται ως η μεταβολή της ταχύτητας διαιρεμένη με τον χρόνο:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

  - **Στιγμιαία επιτάχυνση** είναι το όριο της μέσης επιτάχυνσης καθώς το χρονικό διάστημα γίνεται πολύ μικρό:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

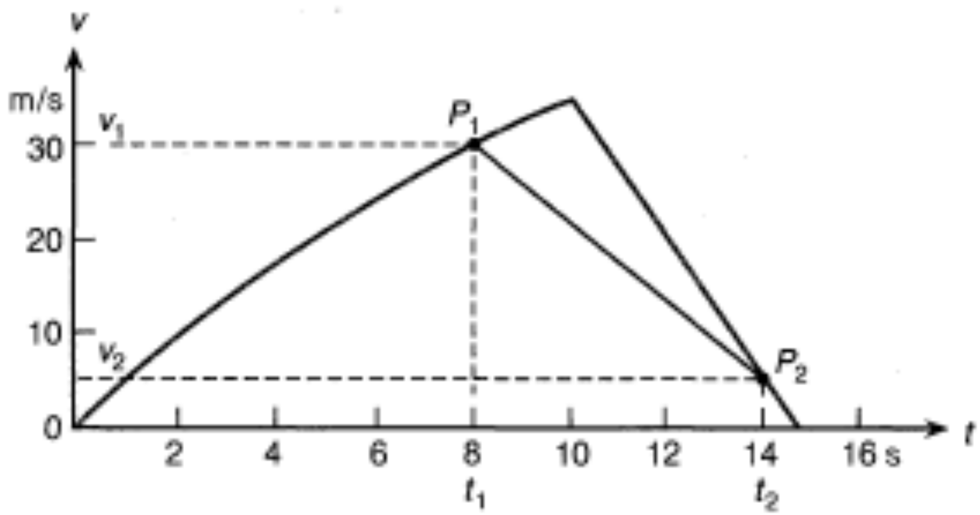


- Επιτάχυνση είναι η κλίση της καμπύλης ταχύτητας ως προς τον χρόνο

Επιτάχυνση

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Μέση επιτάχυνση

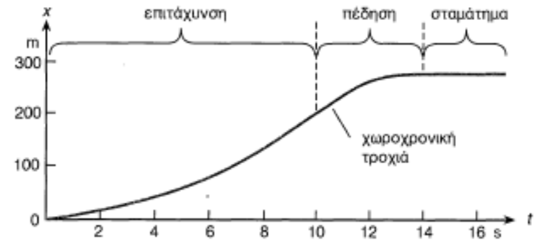


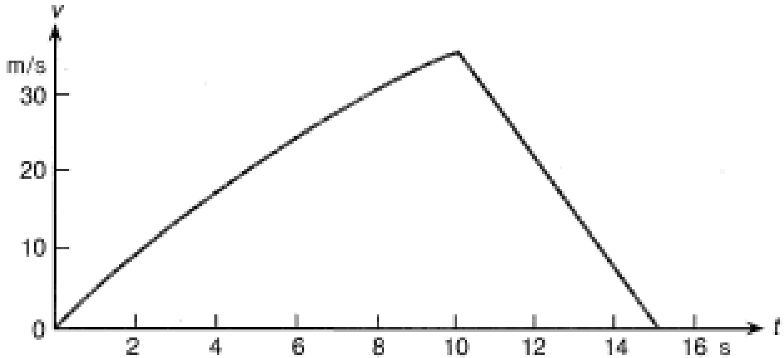
Στη γραφική παράσταση της ταχύτητας ως προς το χρόνο, η μέση επιτάχυνση ισούται προς την κλίση της ευθείας που συνδέει τα σημεία P_1 και P_2 που αντιστοιχούν στα σημεία $t = t_1$ και $t = t_2$ της καμπύλης της ταχύτητας

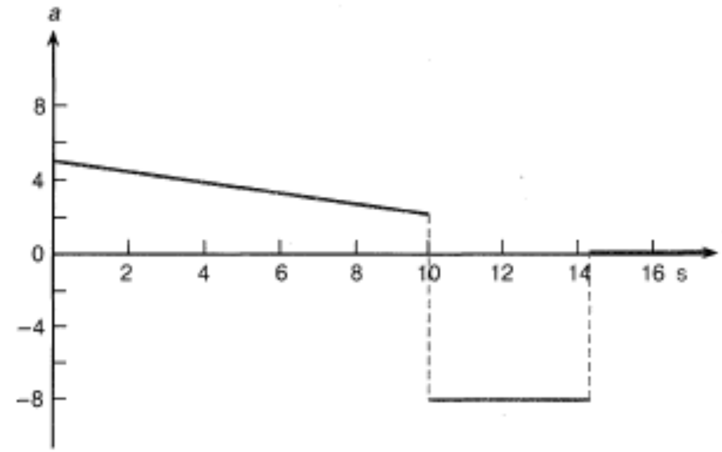
Μερικές τιμές επιταχύνσεων

Πρωτόνια στον επιταχυντή Fermilab	9×10^{13} m/s^2
Υπερκεντρόφυγος	3×10^{6} m/s^2
Μπέηζμπολ την ώρα που χτυπιέται με το ρόπαλο	3×10^{4} m/s^2
Μπάλα ποδοσφαίρου που χτυπιέται με το πόδι	3×10^{3} m/s^2
Αυτοκίνητο που συγκρούεται (πέφτει σε εμπόδιο με ταχύτητα 100 km/h)	1×10^{3} m/s^2
Αλεξιπτωτιστής τη στιγμή που ανοίγει το αλεξίπτωτο (ακραία περίπτωση)	$3{,}2 \times 10^{2}$ m/s^2
Βαρύτητα στην επιφάνεια του Ηλιου	$2{,}7 \times 10^{2}$ m/s^2
Εκτόξευση (με εκρηκτικά) καθίσματος πιλότου (ακραία περίπτωση)	$1{,}5 \times 10^{2}$ m/s^2
Αεροπλάνο F16 που ανασηκώνεται μετά από καταβύθιση	80 m/s^2
Απώλεια αισθήσεων ανθρώπου ("σκοτοδίνη")	70 m/s^2
Βαρύτητα στην επιφάνεια της Γης	9,8 m/s^2
Πέδηση αυτοκινήτου	~ 8 m/s^2
Βαρύτητα στην επιφάνεια της Σελήνης	1,7 m/s^2
Περιστροφή της Γης (στον Ισημερινό)	$3{,}4 \times 10^{-2}$ m/s^2

Στιγμιαία επιτάχυνση







Σχήμα. Στιγμιαία επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου (προέκυψε από τη μέτρηση της κλίσης των εφαπτομένων στην καμπύλη της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου).

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \longrightarrow a = \frac{dv}{dt} \longrightarrow a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) \quad \text{ή} \quad a = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$x = 2{,}376\, t^2 - 0{,}042\, t^3 \quad \text{για} \quad 0\,\text{s} \le t \le 10\,\text{s}$$

$$x = -555{,}8 + 115{,}4\, t - 4{,}022\, t^2 \quad \text{για} \quad 10\,\text{s} \le t \le 14{,}3\,\text{s}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 4{,}752\, t - 0{,}126\, t^2 \quad \text{για} \quad 0\,\text{s} \le t \le 10\,\text{s}$$

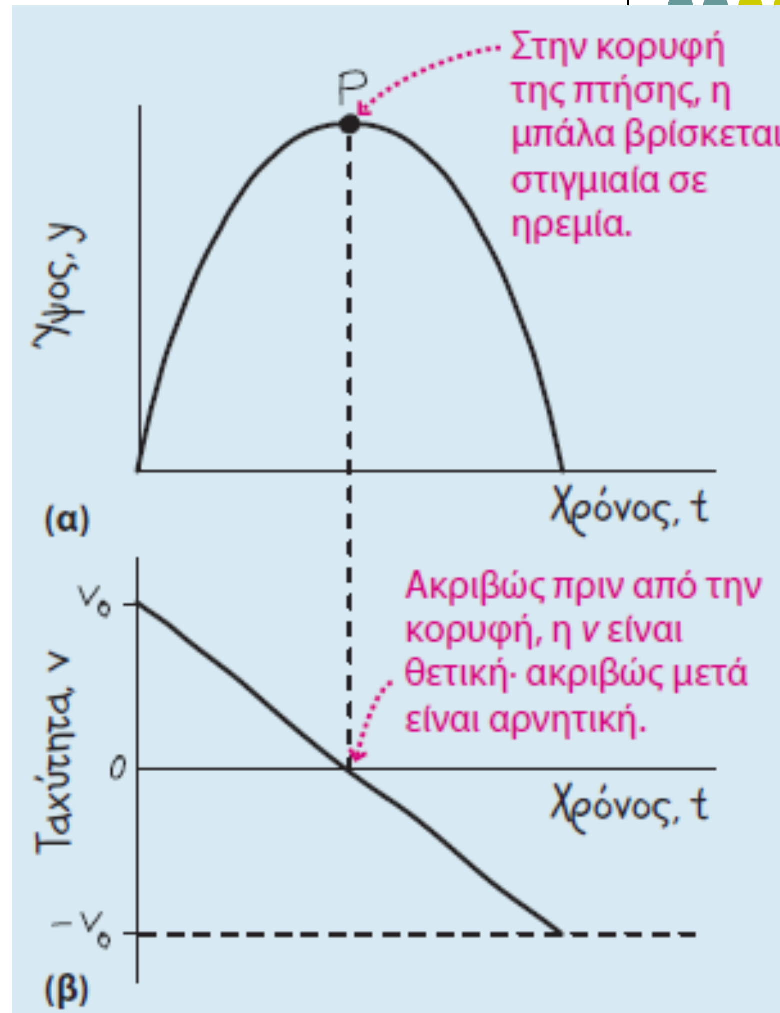
$$v = \frac{dx}{dt} = 115{,}4 - 8{,}044\, t \quad \text{για} \quad 10\,\text{s} \le t \le 14{,}3\,\text{s}$$

$$a = 4{,}752 - 0{,}252\,\text{t} \quad \text{για} \quad 0\,\text{s} \le t \le 10\,\text{s}$$

$$a = -8{,}044 \quad \text{για} \quad 10\,\text{s} \le t \le 14{,}3\,\text{s}$$

Θέση, ταχύτητα και επιτάχυνση

- Οι επιμέρους τιμές της θέσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης δεν σχετίζονται με κάποιον εγγενή τρόπο
  - Αντίθετα, η ταχύτητα εξαρτάται από τον *ρυθμό μεταβολής* της θέσης
  - Η επιτάχυνση εξαρτάται από τον *ρυθμό μεταβολής* της ταχύτητας
  - Ένα σώμα μπορεί να βρίσκεται στη θέση x = 0 και, ωστόσο, *να κινείται*
  - Ένα σώμα μπορεί να έχει μηδενική ταχύτητα και, ωστόσο, *να επιταχύνεται*



Στην κορυφή της πτήσης της, μια μπάλα έχει μηδενική ταχύτητα, αλλά εξακολουθεί να επιταχύνει

Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση

Στην περίπτωση σταθερής επιτάχυνσης, έχουμε μερικές απλές σχέσεις μεταξύ επιτάχυνσης, ταχύτητας, θέσης και χρόνου. Ας υποθέσουμε ότι η αρχική ταχύτητα (τη στιγμή $t=0$) είναι υ_0 και ότι η ταχύτητα αυξάνει με σταθερό ρυθμό που δίνεται από τη σταθερή επιτάχυνση a. Μετά από χρόνο t, η ταχύτητα θα έχει αυξηθεί από την αρχική ταχύτητα υ_0 στην τιμή

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_0 + at}$$

Ας υποθέσουμε ότι η αρχική θέση είναι x_0. Μετά από χρόνο t, η θέση θα έχει μεταβληθεί κατά μια ποσότητα ίση με το γινόμενο της μέσης ταχύτητας επί το χρόνο, δηλ., η θέση θ' αλλάξει από την αρχική τιμή x_0 στην

$$x = x_0 + \overline{\upsilon}\, t$$

Αφού η ταχύτητα αυξάνει ομαλά με το χρόνο, η μέση τιμή της ταχύτητας είναι απλώς το ημιάθροισμα της αρχικής και της τελικής τιμής,

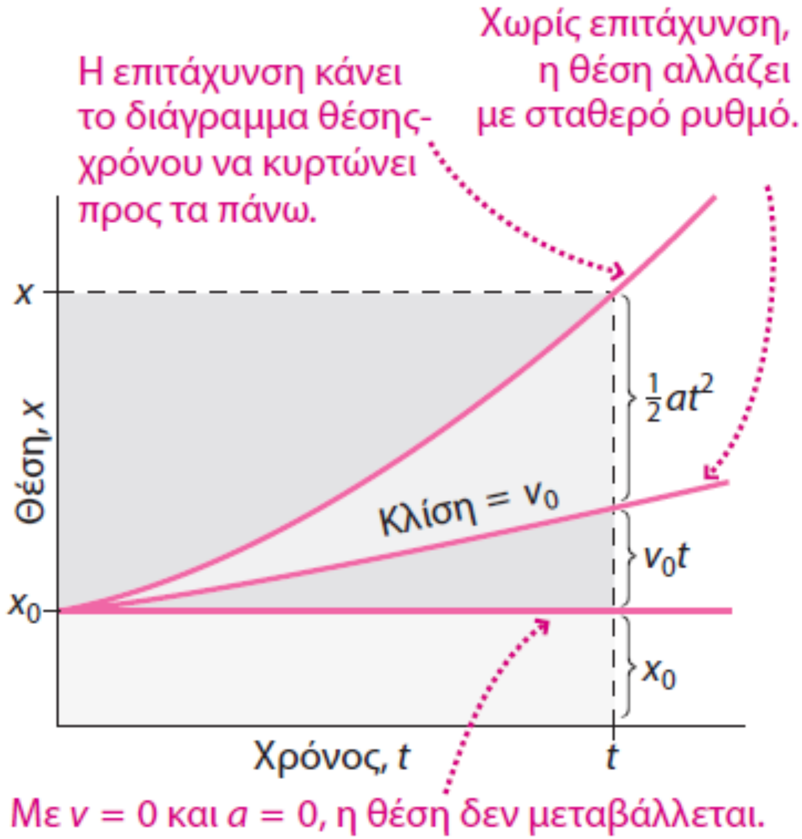
$$\overline{\upsilon} = \tfrac{1}{2}(\upsilon_0 + \upsilon) = \tfrac{1}{2}(\upsilon_0 + \upsilon_0 + at) = \upsilon_0 + \tfrac{1}{2}at \longrightarrow x = x_0 + (\upsilon_0 + \tfrac{1}{2}at)\,t \longrightarrow$$

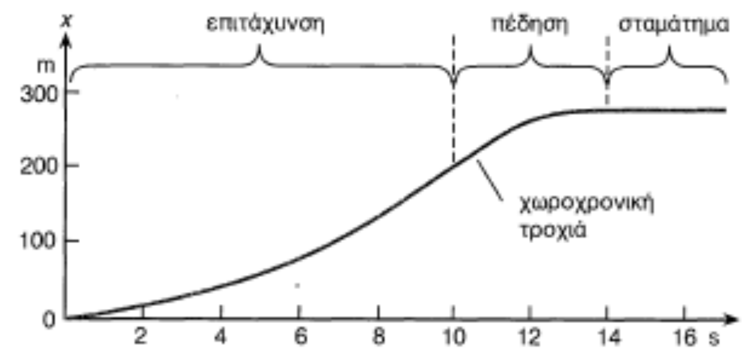
$$\boxed{x - x_0 = \upsilon_0 t + \tfrac{1}{2}at^2}$$

Ο όρος $\upsilon_0 t$ αντιπροσωπεύει τη μεταβολή της θέσης του σωματιδίου αν κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Ο όρος $\frac{1}{2}at^2$ αντιπροσωπεύει την επίδραση της επιτάχυνσης.

Σταθερή επιτάχυνση





- Με την επιτάχυνση σταθερή
  - Η ταχύτητα είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου
  - Η θέση είναι τετραγωνική συνάρτηση του χρόνου

Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Να χρησιμοποιηθούν οι κανόνες της μαθηματικής ανάλυσης για να υπολογιστεί η δεύτερη παράγωγος του x από την Εξ. (22) και να επιβεβαιωθεί ότι η δεύτερη παράγωγος ισούται με την επιτάχυνση a.

ΛΥΣΗ: Από την Εξ. (22),

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

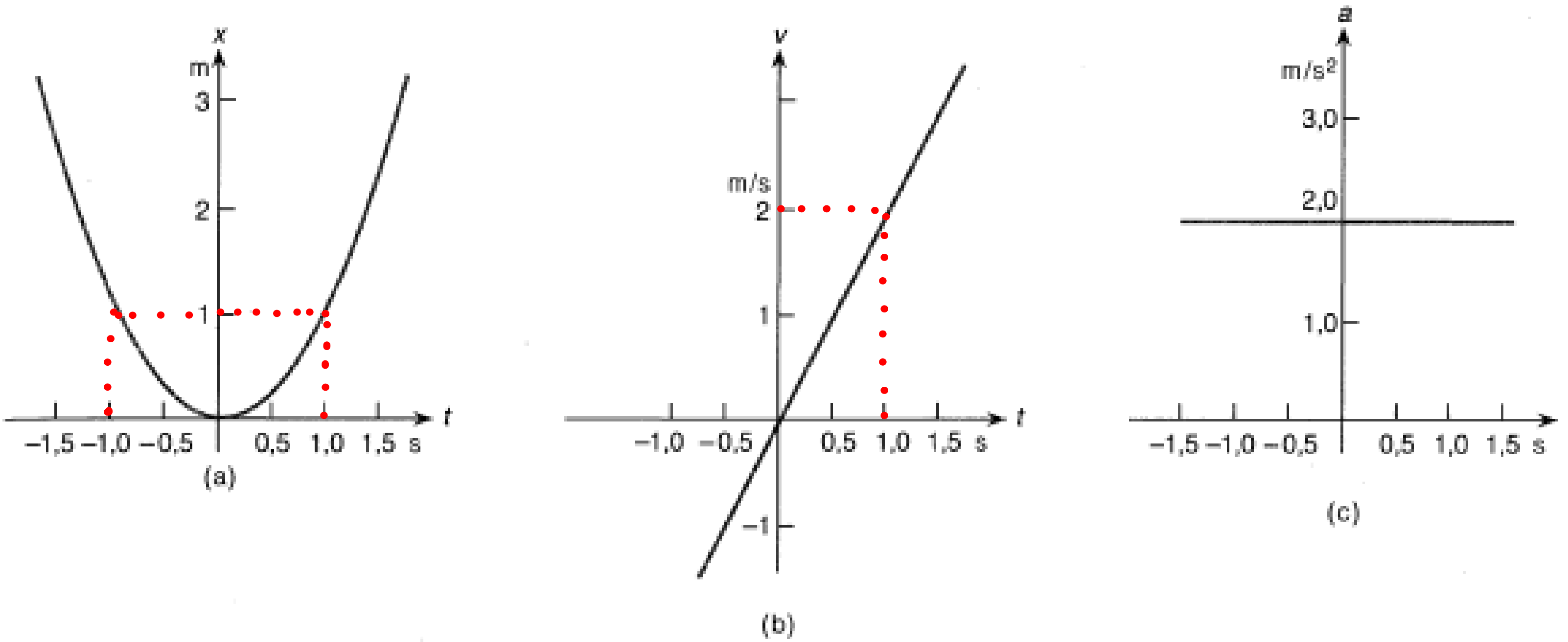
Τα x_0, v_0 και a είναι σταθερές ως προς τη διαφόριση, οπότε

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 \right) = v_0 + \tfrac{1}{2} a \times 2t = v_0 + at$$

και

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\,(v_0 + at) = a$$

Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση



Σχήμα. (a) θέση, (b) ταχύτητα και (c) επιτάχυνση σε ένα παράδειγμα κίνησης υπό σταθερή επιτάχυνση, α=2,0 m/s^2

Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Ένα αυτοκίνητο που αρχικά κινείται με ταχύτητα 50 km/h προσκρούει σ' ένα σταθερό, ακλόνητο εμπόδιο. Το αυτοκίνητο σταματάει αφού η μάσκα του έχει μπει μέσα κατά 0,40 m. Αν υποθέσουμε ότι ο χώρος των επιβατών υπόκειται σε σταθερή επιβράδυνση, να υπολογιστεί η τιμή της επιβράδυνσης. Πόσος χρόνος απαιτείται για να σταματήσει να κινείται ο χώρος των επιβατών;

$$\boxed{v = v_0 + at} \longrightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

$$\longrightarrow a(x - x_0) = \tfrac{1}{2}(v^2 - v_0^2) \longrightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)}$$

Η αρχική ταχύτητα είναι $v_0 = 50\ \mathrm{km/h} = 50 \times 10^3\ \mathrm{m}/3600\ \mathrm{s} = 13{,}9\ \mathrm{m/s}$. Η τελική ταχύτητα είναι $v = 0$. Η μεταβολή της θέσης που αντιστοιχεί σ' αυτή τη μεταβολή ταχύτητας είναι $x - x_0 = 0{,}40\ \mathrm{m}$. Συνεπώς,

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{-(13{,}9\ \mathrm{m/s})^2}{2 \times 0{,}40\ \mathrm{m}} = -2{,}4 \times 10^2\ \mathrm{m/s^2}$$

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{-13{,}9\ \mathrm{m/s}}{-2{,}4 \times 10^2\ \mathrm{m/s^2}} = 5{,}8 \times 10^{-2}\ \mathrm{s}$$

Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Ενα αυτοκίνητο που αρχικά κινείται με ταχύτητα 50 km/h προσκρούει σ' ένα σταθερό, ακλόνητο εμπόδιο. Το αυτοκίνητο σταματάει αφού η μάσκα του έχει μπει μέσα κατά 0,40 m. Αν υποθέσουμε ότι ο χώρος των επιβατών υπόκειται σε σταθερή επιβράδυνση, να υπολογιστεί η τιμή της επιβράδυνσης. Πόσος χρόνος απαιτείται για να σταματήσει να κινείται ο χώρος των επιβατών;

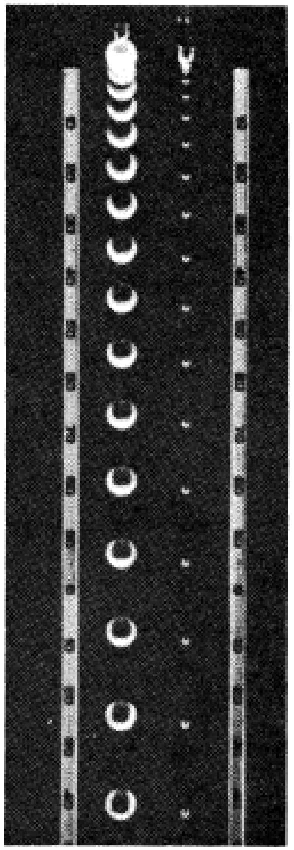
$$\boxed{v = v_0 + at}$$

$$x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

$\rightarrow$ 2 εξισώσεις, 2 άγνωστοι (α, t)

(λίγο δυσκολότερη η επίλυση)

Η επιτάχυνση της βαρύτητας



Σχήμα. Απλή πειραματική επίδειξη της ισότητας των επιταχύνσεων δύο σωμάτων σε ελεύθερη πτώση

$$\boxed{g \cong 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cong 32{,}2\ \mathrm{ft/s^2}}$$

$$\boxed{v = v_0 + at} \longrightarrow \boxed{v = v_0 - gt}$$

$$x = x_0 + (v_0 + \tfrac{1}{2}at)t \longrightarrow \boxed{x = x_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2}$$

$$a(x - x_0) = \tfrac{1}{2}(v^2 - v_0^2) \longrightarrow \boxed{-g(x - x_0) = \tfrac{1}{2}(v^2 - v_0^2)}$$

Η επιτάχυνση της βαρύτητας

Πίνακας. Μεταβολή του g με το γεωγραφικό πλάτος.

Σταθμός	Γεωγραφικό Πλάτος	g
Quito, Ecuador	0° Β	9,780 m/s^2
Madras, Ινδία	13° Β	9,783
Hong Kong	22° Β	9,788
Κάϊρο, Αίγυπτος	30° Β	9,793
Νέα Υόρκη, ΗΠΑ	41° Β	9,803
Λονδίνο, Αγγλία	51° Β	9,811
Οσλο, Νορβηγια	60° Β	9,819
Murmansk, Ρωσία	69° Β	9,825
Spitsbergen	80° Β	9,831
Βόρειος Πόλος	90° Β	9,832

Η επιτάχυνση της βαρύτητας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Στο Acapulco, επαγγελματίες καταδύτες διασκεδάζουν τους τουρίστες πηδώντας στη θάλασσα από μια προεξοχή λόφου ύψους 36 m. Επί πόσο χρόνο πέφτουν; Πόση είναι η ταχύτητα πρόσκρουσης;

$$x = x_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \longrightarrow -36\ \mathrm{m} = -\tfrac{1}{2}(9{,}8\ \mathrm{m/s^2})\, t^2 \longrightarrow t = \sqrt{\frac{2\times 36}{9{,}8}\ s^2} = 2{,}7\ \mathrm{s}$$

Η ταχύτητα πρόσκρουσης είναι τότε,

$$v = -gt = -9{,}8\ \mathrm{m/s^2} \times 2{,}7\ \mathrm{s}$$

$$= -26\ \mathrm{m/s}$$

Αυτή η τιμή ισούται κατά προσέγγιση με 94 km/h!

Η επιτάχυνση της βαρύτητας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Ενα ισχυρό τόξο, όπως αυτά που χρησιμοποιούνται για να εδραιώνουν διεθνή ρεκόρ, μπορεί να εκτοξεύσει ένα βέλος με ταχύτητα 90 m/s. Πόσο ψηλά θα φτάσει το βέλος αν ριφθεί κατακόρυφα προς τα πάνω; Με ποιά ταχύτητα θα κτυπήσει το έδαφος; Αμελήστε τις τριβές.

ΛΥΣΗ: Στο υψηλότερο σημείο της κίνησης η στιγμιαία ταχύτητα είναι $v = 0$ (η κίνηση αντιστρέφεται σ' αυτό το σημείο και σταματάει προς στιγμήν). Επομένως, για την προς τα πάνω κίνηση μπορούμε να θεωρήσουμε γνωστές την αρχική και την τελική ταχύτητα. Αγνωστα είναι το μέγιστο ύψος και ο χρόνος. Η Εξ. (29) δίνει το ύψος συναρτήσει των γνωστών ποσοτήτων,

$$-g(x - x_0) = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) \longrightarrow x - x_0 = \frac{-(v^2 - v_0^2)}{2g} = \frac{-0 + (90\ \mathrm{m/s})^2}{2 \times 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}} = 4{,}1 \times 10^2\ \mathrm{m}$$

Η Εξ. (27) δίνει το χρόνο της προς τα πάνω κίνησης:

$$v = v_0 - gt \longrightarrow t = \frac{v_0 - v}{g} = \frac{90\ \mathrm{m/s} - 0}{9{,}8\ \mathrm{m/s^2}} = 9{,}2\ \mathrm{s}$$

Η προς τα κάτω κίνηση διαρκεί τον ίδιο χρόνο με την προς τα πάνω κίνηση. Επομένως, ο χρόνος που θα χρειαστεί το βέλος να φτάσει στο σημείο εκκίνησης είναι $2 \times 9{,}2\ \mathrm{s} = 18{,}4\ \mathrm{s}$.

Αφού αμελούμε τις τριβές, η προς τα κάτω κίνηση είναι απλώς η αντίστροφη της προς τα πάνω. Η ταχύτητα του βέλους πρέπει, ως εκ τούτου, να είναι η ίδια με την αρχική ταχύτητα, εκτός από το πρόσημο· θα ισούται, δηλ., με $-90\ \mathrm{m/s}$.

Παράδειγμα

Πετάτε μια μπάλα προς τα πάνω με 7,3 m/s. Η μπάλα αφήνεται από το χέρι σας σε απόσταση 1,5 m πάνω από το έδαφος. Βρείτε το μέγιστο ύψος της και πότε πέφτει στο έδαφος

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

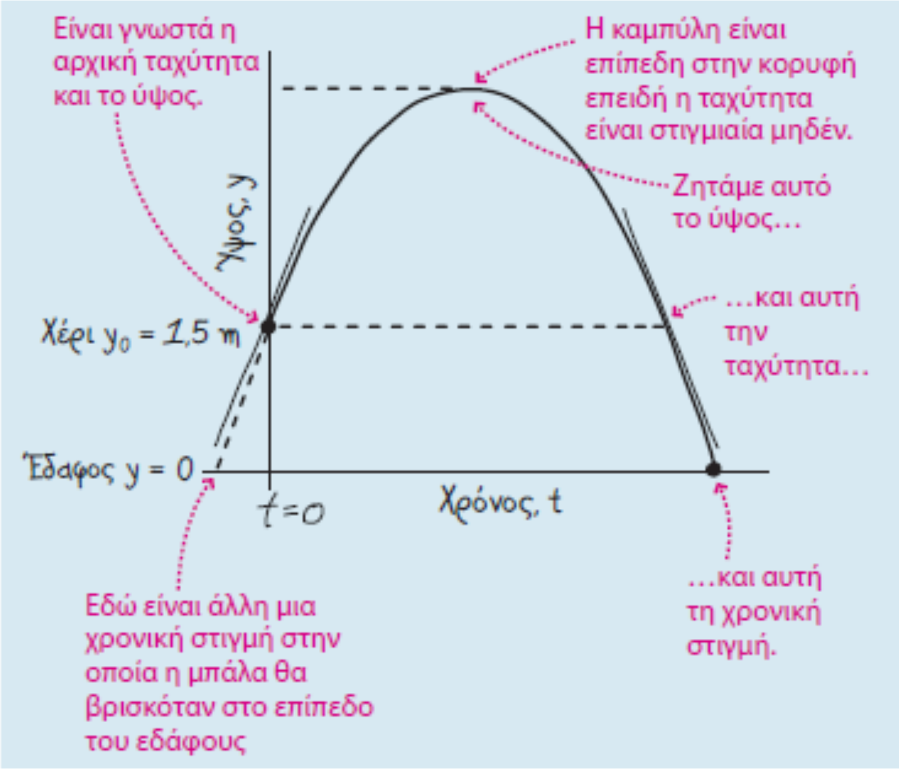
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

- Στο μέγιστο ύψος η μπάλα βρίσκεται σε στιγμιαία ηρεμία (παρότι εξακολουθεί να *επιταχύνεται*). Επιλύοντας την τέταρτη εξίσωση της κίνησης με v = 0, παίρνουμε το μέγιστο ύψος:

$$0 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$$

ή

$$y = y_0 + \frac{v_0^2}{2g} = 1{,}5\ \text{m} + \frac{(7{,}3\ \text{m/s})^2}{(2)(9{,}8\ \text{m/s}^2)} = 4{,}2\ \text{m}$$



- Θέτοντας y = 0 στην τρίτη εξίσωση, παίρνουμε μια τετραγωνική συνάρτηση του χρόνου. Το αποτέλεσμα είναι δύο τιμές για τον χρόνο όταν η μπάλα βρίσκεται στο δάπεδο:

t = –0,18 s και t = 1,7 s

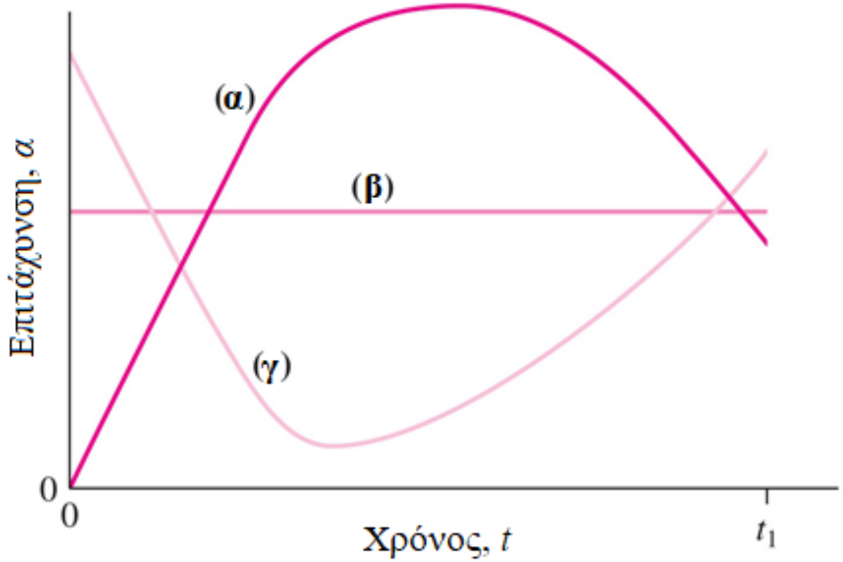
- Η πρώτη απάντηση μας λέει πότε η μπάλα *θα ήταν στο δάπεδο* αν εκτελούσε πάντα ελεύθερη πτώση. Η δεύτερη είναι η απάντηση που θέλουμε

Ορική ταχύτητα

Σε όλους τους παραπάνω υπολογισμούς αμελήσαμε την επίδραση της αντίστασης τριβής του αέρα στα σώματα που πέφτουν. Αν κρατήσετε το χέρι σας έξω απ' το παράθυρο ενός κινούμενου αυτοκινήτου θ' αντιληφθείτε αμέσως ότι ο αέρας προβάλλει σημαντική αντίσταση στην κίνηση με ταχύτητες μερικών δεκάδων χιλιομέτρων την ώρα· αυτή η αντίσταση τριβής αυξάνει με την ταχύτητα (χονδρικά με το τετράγωνο της ταχύτητας). Επομένως, σ' ένα σώμα που πέφτει επιταχυνόμενο θα εξασκηθεί ολοένα και μεγαλύτερη αντίσταση τριβής καθώς η ταχύτητα του αυξάνει. Τελικά, αυτή η αντίσταση γίνεται τόσο μεγάλη, ώστε αντισταθμίζει την έλξη της βαρύτητας – το σώμα παύει να επιταχύνεται και αποκτάει σταθερή ταχύτητα. Αυτή η τελική ταχύτητα ονομάζεται **ορική ταχύτητα**. Η ακριβής τιμή της ορικής ταχύτητας εξαρτάται από τη μάζα του σώματος, το μέγεθος και το σχήμα· λόγου χάρη, ένας αλεξιπτωτιστής με κλειστό αλεξίπτωτο αποκτάει ορική ταχύτητα 200 km/h περίπου, ενώ με ανοιχτό αλεξίπτωτο αποκτάει ορική ταχύτητα μόνο 18 km/h περίπου.

Σύνοψη

- Η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι οι ποσότητες που χαρακτηρίζουν την κίνηση
  - Ταχύτητα είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσης
  - Επιτάχυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας
- Όταν η επιτάχυνση είναι σταθερή, απλές εξισώσεις συνδέουν τη θέση, την ταχύτητα, την επιτάχυνση και τον χρόνο
  - Ένα σημαντικό παράδειγμα είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας κοντά στην επιφάνειας της Γης
  - Το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι g = 9,8 m/s^2.



$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + \tfrac{1}{2}\left(v_0 + v\right)t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)$$

Σύνοψη

Μέση ταχύτητα (μέτρο): $\dfrac{[\text{διανυθείσα απόσταση}]}{[\text{απαιτηθείς χρόνος}]}$

Μέση ταχύτητα (διανυσματική): $\bar{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

Στιγμιαία ταχύτητα: $v = \dfrac{dx}{dt}$

Μέση επιτάχυνση: $\bar{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$

Στιγμιαία επιτάχυνση: $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 x}{dt^2}$

Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση:

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} at^2$$

$$a(x - x_0) = \tfrac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

Επιτάχυνση βαρύτητας: $g \cong 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$

$$\cong 32{,}2\ \mathrm{ft/s^2}$$