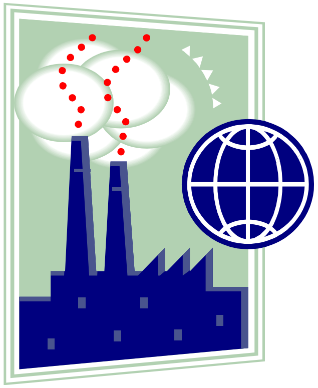


# Κεφάλαιο 12

## Στατική Ισορροπία & ελαστικότητα

# Στατική Ισορροπία

### Τι γνωρίζετε:

- Κατανοείτε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και το περιστροφικό του ανάλογο.
- Μπορείτε να επιλύσετε προβλήματα που αφορούν πολλαπλά διανύσματα δυνάμεων σε δύο διαστάσεις.
- Είστε εξοικειωμένοι με την έννοια του κέντρου μάζας.
- Μπορείτε να υπολογίσετε τη ροπή ως ένα εξωτερικό γινόμενο.

### Τι μαθαίνετε:

- Εδώ θα μάθετε να περιγράφετε καταστάσεις που περιλαμβάνουν *στατική ισορροπία*, στην οποία ένα σώμα παραμένει σε κατάσταση ηρεμίας επειδή δέχεται μηδενική ολική δύναμη και μηδενική ολική ροπή.
- Θα μάθετε για το *κέντρο βάρους*, το οποίο, σε σώματα συνηθισμένου μεγέθους, είναι το ίδιο σημείο με το κέντρο μάζας.
- Θα μάθετε να διακρίνετε την *ευσταθή ισορροπία* από την *ασταθή ισορροπία* και να αναγνωρίζετε την ενδιάμεση περίπτωση της *μετασταθούς ισορροπίας*.

### Πώς θα τα χρησιμοποιήσετε:

- Η στατική ισορροπία είναι ιδιαίτερα σημαντική για τους αρχιτέκτονες και τους μηχανικούς που ενδιαφέρονται για την ευστάθεια των δομών που σχεδιάζουν.
- Η στατική ισορροπία είναι επίσης σημαντική στη φυσιολογία, επειδή οι συνθήκες στατικής ισορροπίας καθορίζουν συχνά τις δυνάμεις που ενεργούν εντός του ανθρώπινου σώματος.
- Καταστάσεις ισορροπίας παρουσιάζονται σε όλο το σύμπαν και το αν είναι ευσταθείς ή ασταθείς είναι καθοριστικός παράγοντας για τη συμπεριφορά ενός συστήματος.

# Στατική & Ελαστικότητα

Ο υπολογισμός των δυνάμεων που κρατούν ένα σώμα σε ισορροπία.

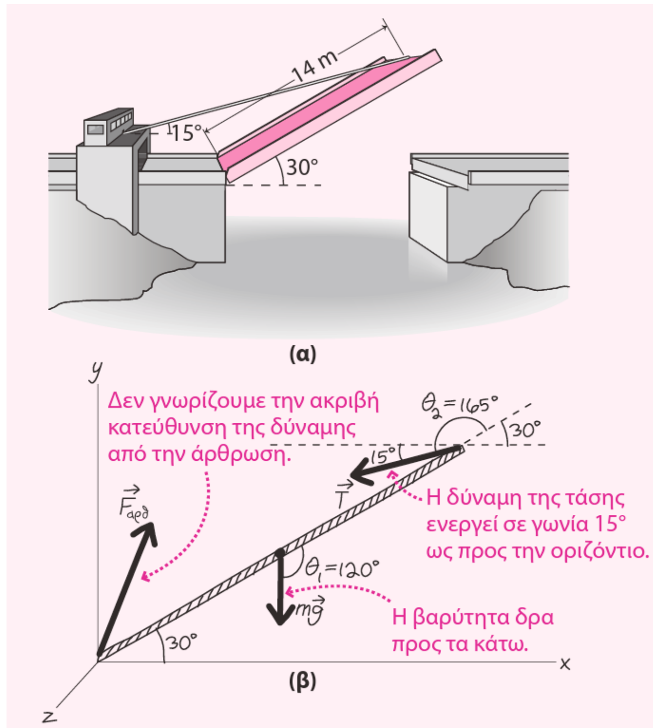
Εφαρμογή για Πολιτικούς μηχανικούς / αρχιτέκτονες για τον υπολογισμό των δυνάμεων που δρουν στα δομικά στοιχεία κατασκευών

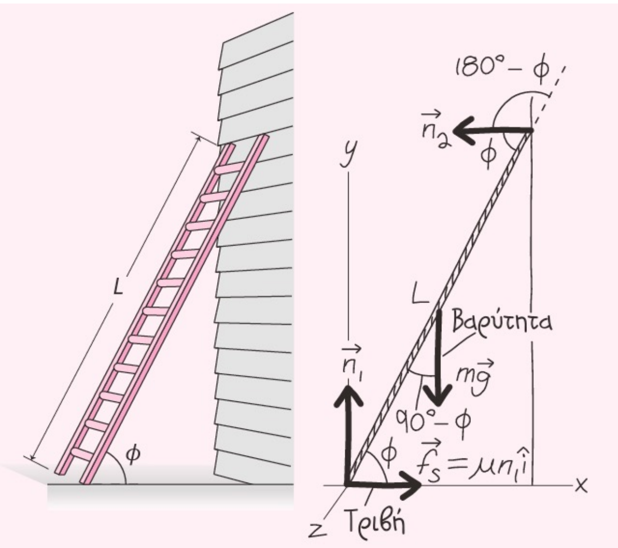
<u>**Θα εξεταστούν**</u>:

- Άκαμπτα δομικά στοιχεία χωρίς παραμόρφωση
- Παραμόρφωση υπό την επίδραση πολύ μεγάλων δυνάμεων

# Στατική Ισορροπία

Η γέφυρα Alamillo στη Σεβίλη της Ισπανίας είναι έργο του αρχιτέκτονα Santiago Calatrava. Ποιες συνθήκες πρέπει να πληρούνται για να εξασφαλιστεί η ευστάθεια αυτής της μεγαλειώδους δομής;



# Στατική στερεών σωμάτων

**Συνθήκη στατικής ισορροπίας**

Αν στερεό σώμα σε ηρεμία, τότε

οι επιταχύνσεις μεταφοράς και περιστροφής = 0

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0}$$

και άρα η συνισταμένη εξωτερικών δυνάμεων = 0

και άρα η συνισταμένη εξωτερικών ροπών = 0

$$\sum \vec{\tau}_i = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \vec{0}$$

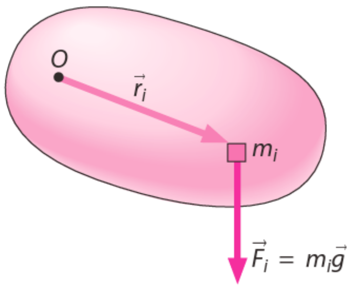
**Επίδραση της βαρύτητας σε στερεό σώμα**

Ολόκληρη η βαρυτική δύναμη θεωρείται ότι ενεργεί στο κέντρο μάζας του σώματος

# Στατική στερεών σωμάτων

## 12.2 Κέντρο βάρους

Στο Σχήμα 12.1β σχεδιάσαμε τη βαρυτική δύναμη να δρα στο κέντρο μάζας της γέφυρας. Αυτό φαίνεται λογικό, αλλά είναι σωστό; Εξάλλου, η βαρύτητα ασκείται σε όλα τα μέρη ενός σώματος. Πώς γνωρίζουμε ότι η προκύπτουσα ροπή είναι ισοδύναμη με τη ροπή λόγω μιας ενιαίας δύναμης που ενεργεί στο κέντρο μάζας; Για να διαπιστώσετε ότι είναι σωστό, εξετάστε τις βαρυτικές δυνάμεις σε όλα τα μέρη ενός σώματος μάζας $M$. Το διανυσματικό άθροισμα αυτών των δυνάμεων είναι $M\vec{g}$, αλλά τι συμβαίνει με τις ροπές; Το Σχήμα 12.2 δείχνει τα απαιτούμενα συστατικά για τον υπολογισμό της ροπής $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ που σχετίζεται με ένα στοιχείο μάζας. Αθροίζοντας, παίρνουμε τη συνολική ροπή:




**ΣΧΗΜΑ 12.2** Η βαρυτική δύναμη $\vec{F}_i$ στη σημειακή μάζα $m_i$ παράγει μια ροπή ως προς το σημείο $O$.

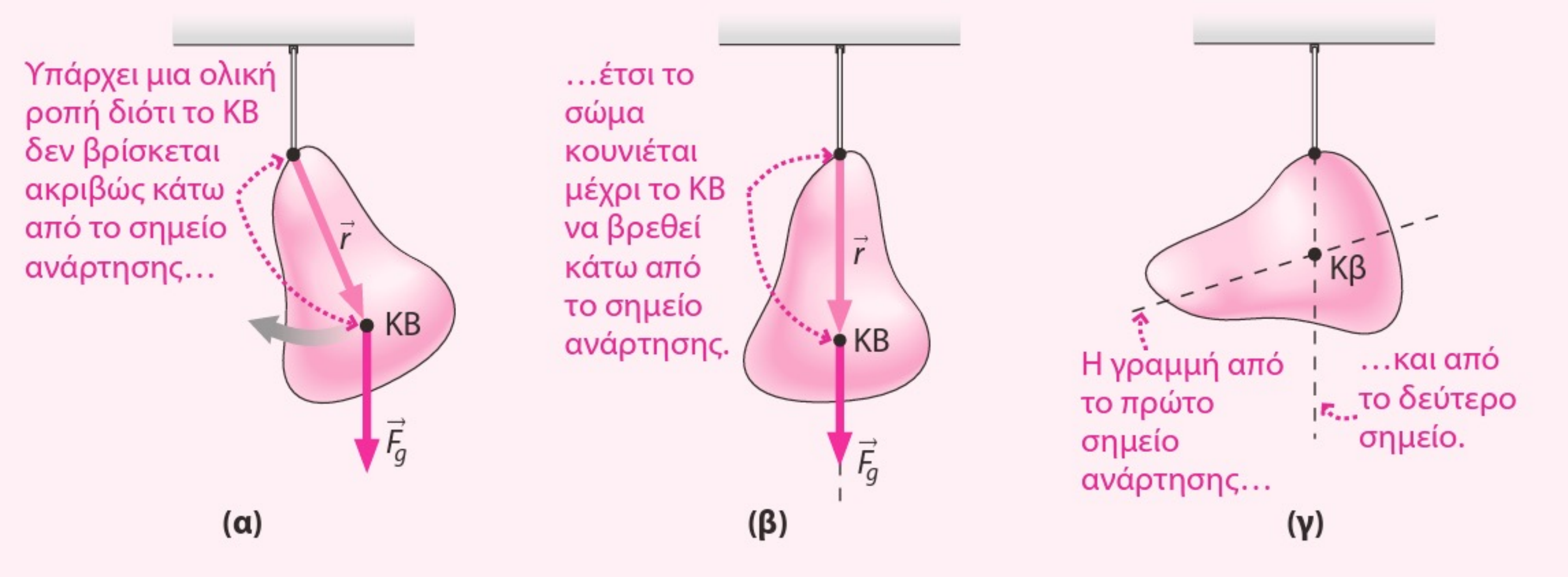
$$\vec{\tau} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i\vec{g} = \left(\sum m_i\vec{r}_i\right) \times \vec{g}$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε αυτή την εξίσωση πολλαπλασιάζοντας τη δεξιά πλευρά με $M/M$, όπου $M$ είναι η συνολική μάζα:

$$\vec{\tau} = \left(\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{M}\right) \times M\vec{g}$$

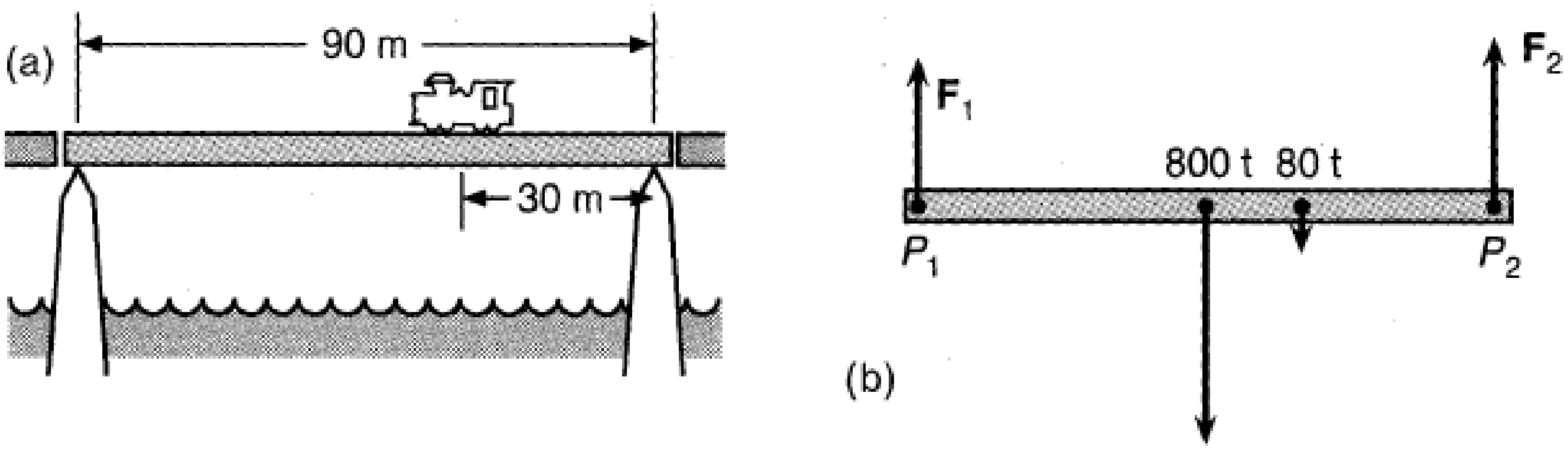
Ο όρος στην παρένθεση είναι η θέση του κέντρου μάζας (Ενότητα 9.1) και ο όρος δεξιά είναι το συνολικό βάρος. Ως εκ τούτου, η ολική ροπή στο σώμα λόγω της βαρύτητας είναι αυτή της βαρυτικής δύναμης $M\vec{g}$ που ενεργεί στο κέντρο μάζας. Γενικά, το σημείο στο οποίο φαίνεται να δρα η βαρυτική δύναμη ονομάζεται **κέντρο βάρους**. Μόλις αποδείξαμε κάτι σημαντικό: **Το κέντρο βάρους συμπίπτει με το κέντρο μάζας όταν το πεδίο βαρύτητας είναι ομοιογενές**.

# Εύρεση του κέντρου βάρους



# Παραδείγματα στατικής ισορροπίας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Η μηχανή τρένου 80 μετρικών τόννων βρίσκεται στο ένα τρίτο του μήκους της, πάνω σε γέφυρα μήκους 90 m. Η γέφυρα αποτελείται από μία ομογενή σιδηρά δοκό 800 μετρικών τόννων, η οποία εδράζεται πάνω σε δύο υποστηλώματα (Σχ. 14.1a). Πόσο είναι το φορτίο σε κάθε υποστήλωμα;



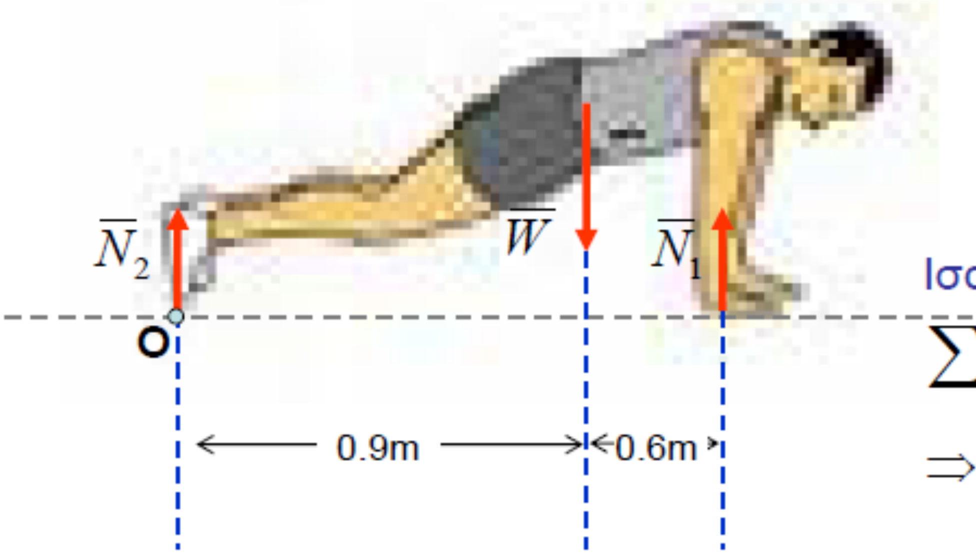

**Η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών = 0, άρα**

**$P_2$:** $(45m\times800tons\times g) + (30m\times80tons\times g) – (90m\times F_1) = 0 \rightarrow F_1=427tons\times g = 4,2\times10^6$ N

**$P_1$:** $(-45m\times800tons\times g) - (60m\times80tons\times g) + (90m\times F_2) = 0 \rightarrow F_2=4,4\times10^6$ N

# Άσκηση

Ένας αθλητής βάρους 900Ν έχει τη στάση του σχήματος. Αν η προβολή του κέντρου μάζας του σώματός του στο έδαφος απέχει 60cm από τα χέρια και 90cm από το σημείο στήριξης να υπολογιστεί η δύναμη που εξασκείται στα πόδια και τα χέρια του.




Ισορροπία δυνάμεων:

$$\sum \overline{F}_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = W \quad (1)$$

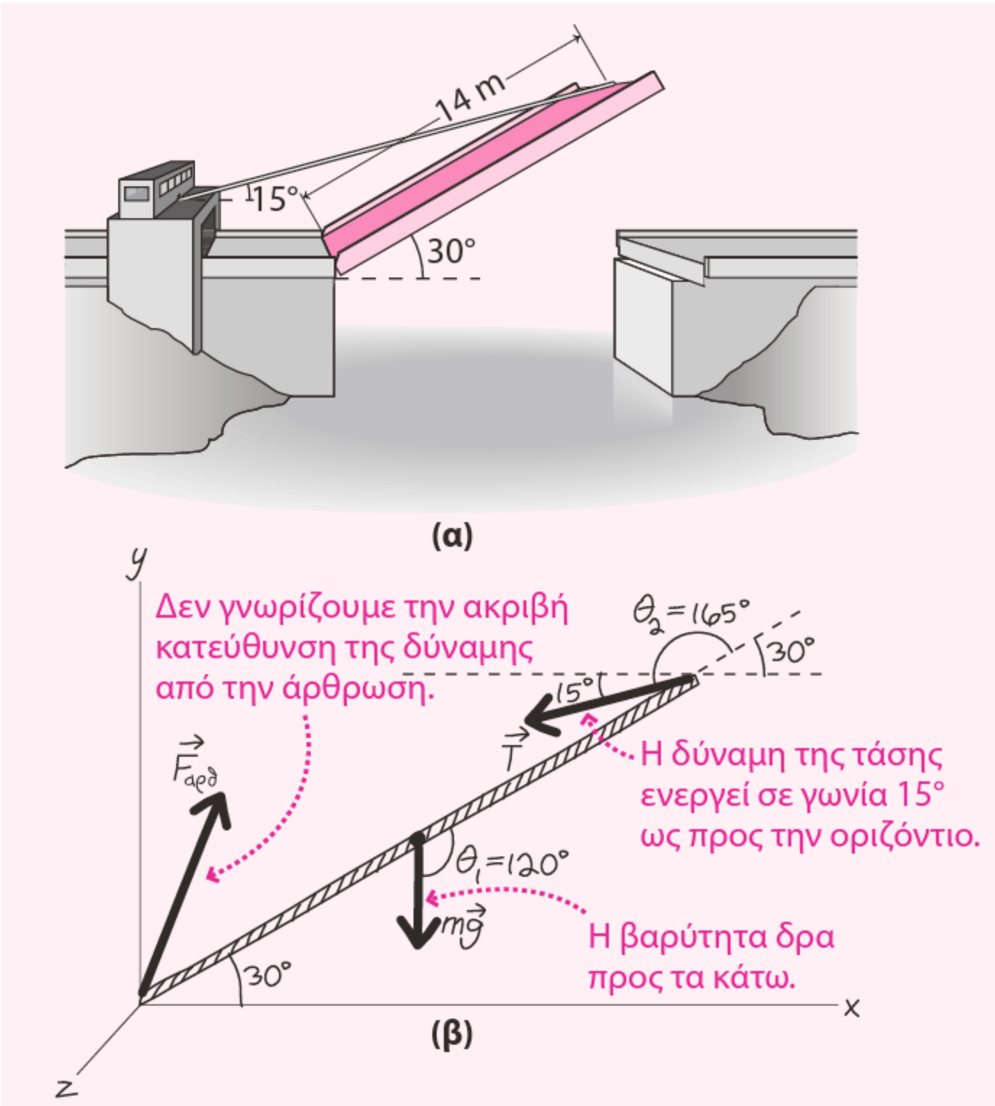
Ισορροπία ροπών γύρω από το Ο:

$$\sum \overline{M} = 0 \Rightarrow W \cdot 0.9 = N_1 \cdot (0.9 + 0.6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_1 = 900 \frac{0.9}{1.5} \Rightarrow N_1 = 540N \quad (2)$$

$$(1),(2) \quad N_2 = W - N_1 = 900 - 540 \Rightarrow N_2 = 360N$$

# Άσκηση

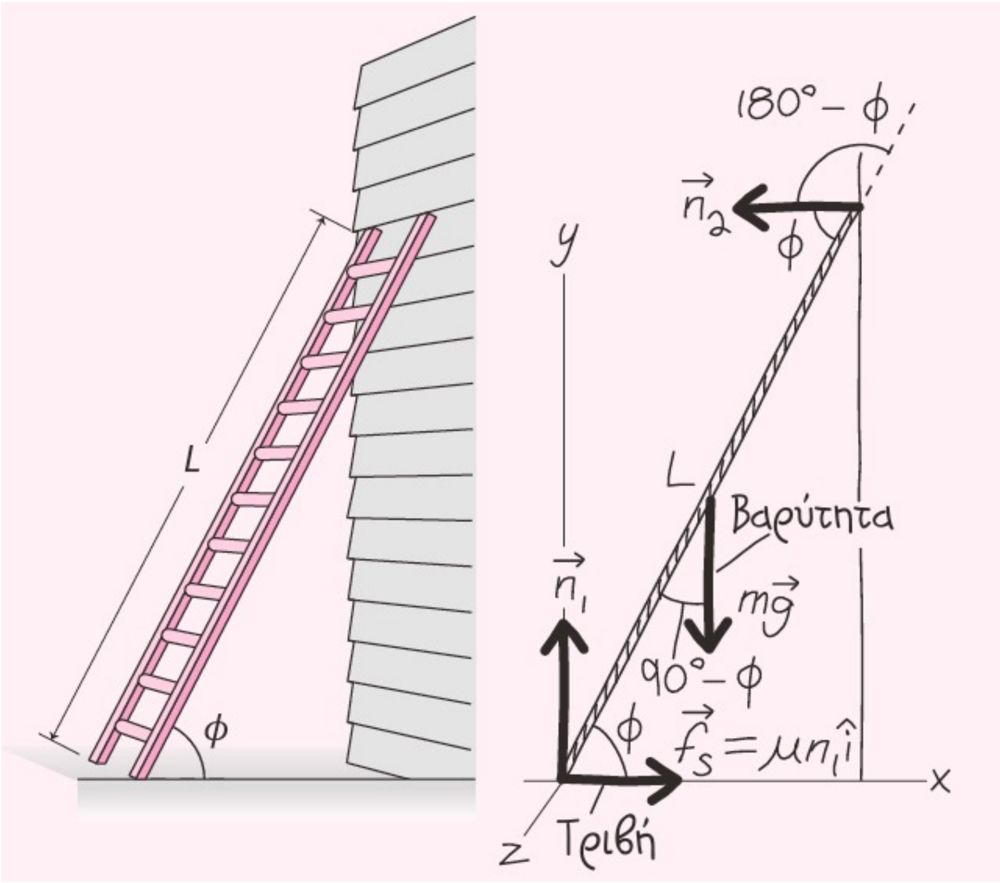



$$-\frac{L}{2}mg\sin\theta_1 + LT\sin\theta_2 = 0$$

$$T = \frac{mg\sin\theta_1}{2\sin\theta_2} = \frac{(11.000\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(\sin 120^{\circ})}{(2)(\sin 165^{\circ})} = 180\ \text{kN}$$

# Άσκηση

**Σε ποια γωνία θα ολισθήσει η σκάλα?**




Δύναμη, $x$: $\mu n_1 - n_2 = 0$

Δύναμη, $y$: $n_1 - mg = 0$

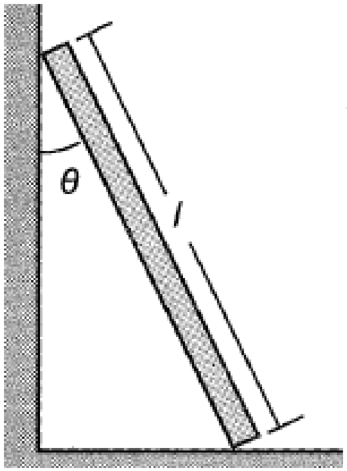
Ροπή: $Ln_2 \sin\varphi - \frac{L}{2} mg\cos\varphi = 0$

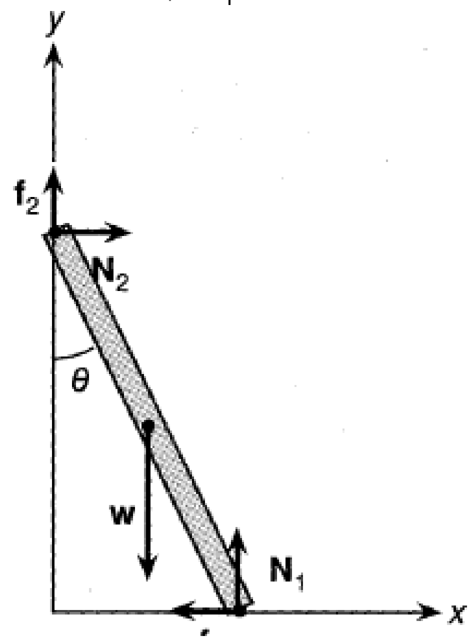
$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{2\mu}$$

**ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΤΕ** Είναι λογικό; Όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής τριβής, τόσο μεγαλύτερη είναι η οριζόντια δύναμη που κρατά τη σκάλα στη θέση της και τόσο μικρότερη η γωνία στην οποία μπορεί να ακουμπήσει με ασφάλεια. Από την άλλη πλευρά, ένας πολύ μικρός συντελεστής τριβής οδηγεί σε πολύ μεγάλη εφαπτομένη – που σημαίνει γωνία 90°. Χωρίς τριβή, η σκάλα θα μπορούσε να σταθεί μόνο αν ήταν εντελώς κάθετη. Μια παρατήρηση: επεξεργαστήκαμε αυτό το παράδειγμα χωρίς κανέναν στη σκάλα. Με το επιπλέον βάρος ενός ατόμου, ειδικά κοντά στην κορυφή, η ελάχιστη ασφαλής γωνία θα είναι πολύ μεγαλύτερη. Το Πρόβλημα 29 εξετάζει αυτή την κατάσταση.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.** Το κάτω άκρο μιας πήχης 1 m ηρεμεί στο πάτωμα και το πάνω άκρο ακουμπάει στον τοίχο (Σχ. 14.3a). Εάν ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στην πήχη και στο πάτωμα είναι $\mu_s = 0{,}4$, πόση είναι η μέγιστη γωνία που μπορεί να σχηματίσει η πήχη με τον τοίχο χωρίς να γλιστρήσει;

Εάν η πήχη είναι έτοιμη να γλυστρίσει οι δυνάμεις τριβής έχουν τη μέγιστη τιμή τους. Τα αθροίσματα των οριζοντίων και των κατακόρυφων συνιστωσών των δυνάμεων πρέπει να είναι = 0




$$-\mu_s N_1 + N_2 = 0$$

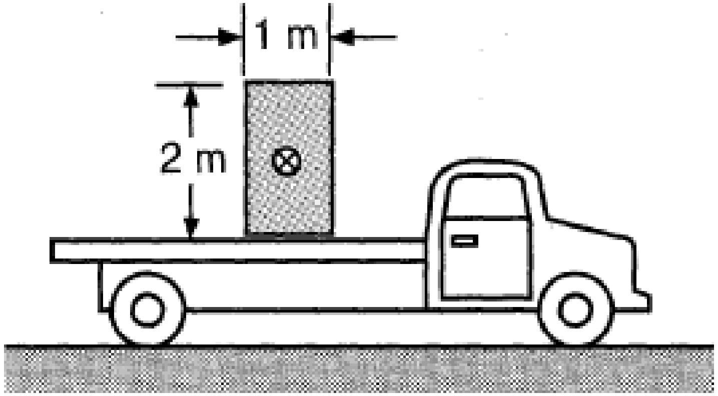
$$\mu_s N_2 + N_1 - Mg = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{Mg}{\mu_s^2+1}, N_2 = \frac{\mu_s Mg}{\mu_s^2+1}$$

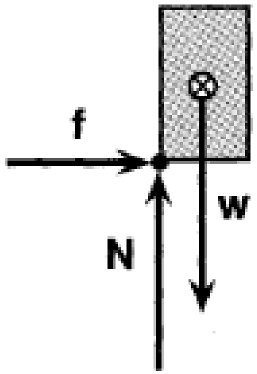
Το άθροισμα των ροπών ως προς το σημείο επαφής με το πάτωμα πρέπει να είναι = 0

$$l\cos\theta N_2 + l\sin\theta f_2 - \frac{l}{2}Mg\sin\theta = 0 \Rightarrow l\cos\theta N_2 + l\sin\theta \mu_s N_2 - \frac{l}{2}Mg\sin\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\mu_s Mgl}{\mu_s^2+1}\cos\theta + \frac{\mu_s^2 Mgl}{\mu_s^2+1}\sin\theta - \frac{Mgl}{2}\sin\theta = 0 \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{2\mu_s}{1-\mu_s^2} = 0{,}95 \Rightarrow \theta = 44^0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Ενα ορθογώνιο κιβώτιο ύψους 2 m, εύρους 1 m και πλάτους 1 m στέκεται στην πλατφόρμα ενός φορτηγού (Σχ. 14.4a). Πόση είναι η μέγιστη επιτάχυνση του φορτηγού στην οποία μπορεί ν' αντισταθεί το κιβώτιο χωρίς ν' αναποδογυρίσει; Υποθέστε ότι το κιβώτιο είναι γεμάτο με υλικό που έχει την ίδια πυκνότητα παντού και ότι δεν ολισθαίνει.



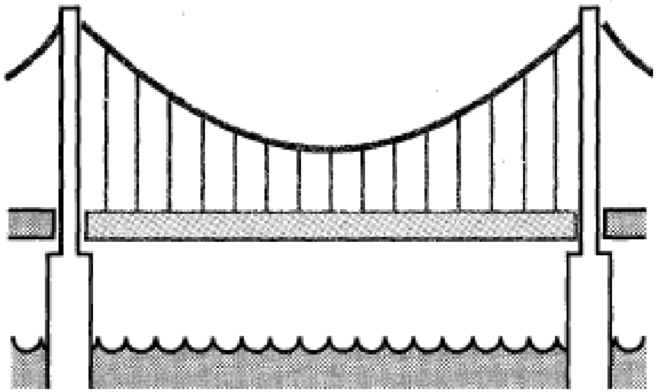



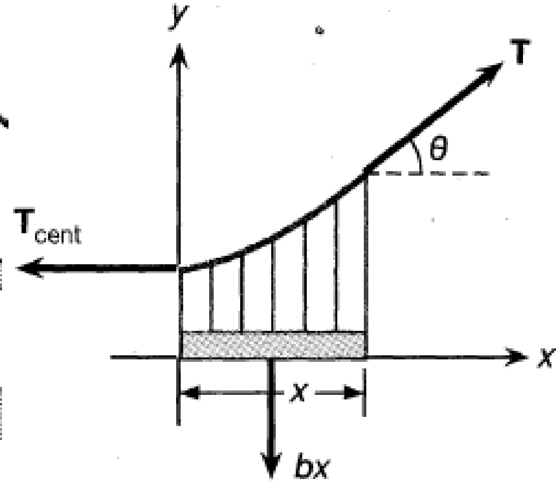

Μόλις αρχίζει να αναποδογυρίζει, η μόνη επαφή κιβωτίου-πλατφόρμας είναι στην πίσω γωνία.

Για να κρατηθεί όρθιο το κιβώτιο, η συνισταμένη ροπή ως προς το κέντρο μάζας πρέπει να ισούται με μηδέν:

$$1{,}0 \times \mathrm{f} - 0{,}5 \times N = 0 \Rightarrow 1{,}0 \times Ma - 0{,}5 \times Mg = 0 \Rightarrow a = 0{,}5g = 4{,}9m/s^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Οι **κρεμαστές γέφυρες** αποτελούνται από ζεύγος συρματόσκοινων που κρέμονται ανάμεσα σε δύο πύργους· το οδόστρωμα αναρτάται από αυτά τα συρματόσκοινα με τη βοήθεια πυκνοτοποθετημένων καθέτων συρμάτων (Σχ. 14.8a). Υποθέστε το βάρος του οδοστρώματος είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σ' όλο το μήκος του και αμελήστε το βάρος των συρματόσκοινων. Ποιό είναι το σχήμα των συρματόσκοινων;

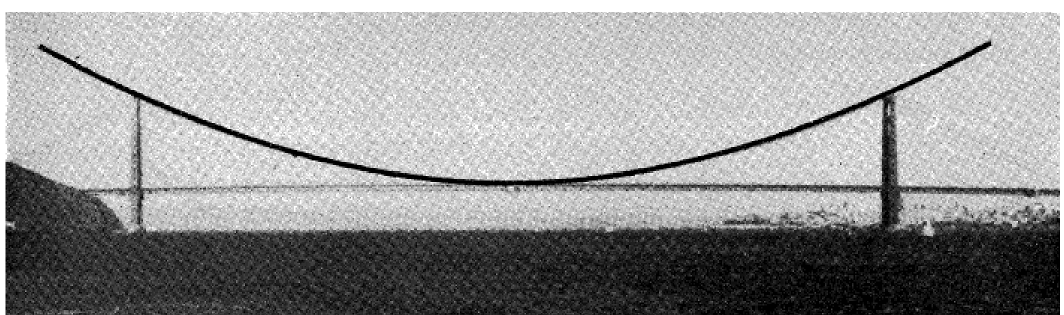





b: βάρος ανά μονάδα μήκους

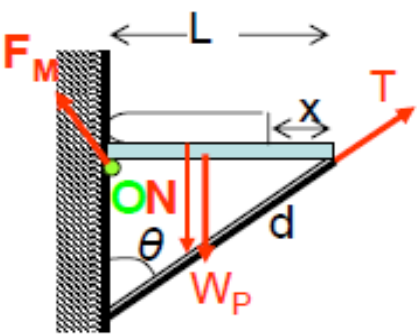
$$\left.\begin{aligned} \mathrm{T}\cos\theta &= \mathrm{T}_{cent} \\ \mathrm{T}\sin\theta &= bx \end{aligned}\right| \Rightarrow \tan\theta = \frac{bx}{T_{cent}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{bx}{T_{cent}} \Rightarrow dy = \frac{b}{T_{cent}}xdx \Rightarrow y = \frac{b}{T_{cent}}\int xdx \Rightarrow y = \frac{b}{2T_{cent}}x^2 + \sigma\tau\alpha\theta.$$

Δηλαδή εξίσωση παραβολής με κορυφή στο x = 0



# Άσκηση

Ένα ράφι πλάτους 0.4m στηρίζεται στον τοίχο με ένα μεντεσέ και κρατιέται στην οριζόντια θέση με τη βοήθεια μιας ράβδου μήκους 0.5m. Το βάρος του ραφιού είναι 10N. Ένα βιβλίο βάρους 50N είναι τοποθετημένο στο ράφι έτσι ώστε να αφήνει 0.1m καθαρή απόσταση από το άκρο του ραφιού. Να υπολογιστεί η τάση στη ράβδο (*η ράβδος ασκεί δύναμη κατά μήκος της*).




$$\sin\theta = \frac{L}{d} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8 \Rightarrow \theta = 53.1^\circ$$

Δυνάμεις που ασκούνται στο ράφι

Βάρος του ραφιού — Αντίδραση του βιβλίου

Τάση της ράβδου — Αντίδραση στο μεντεσέ

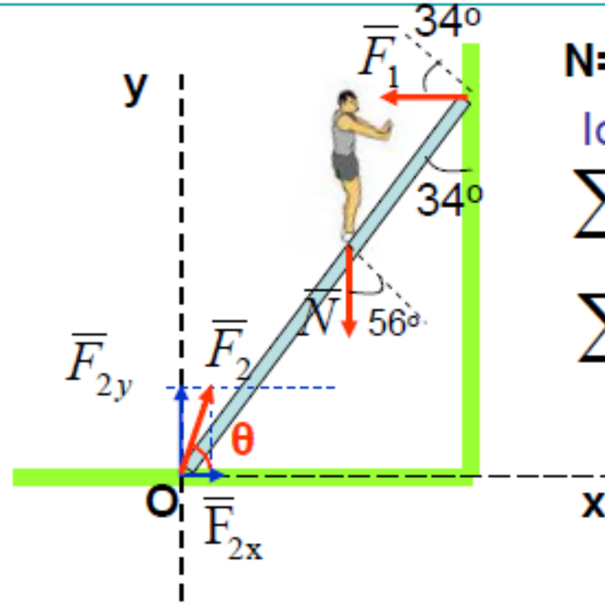
*Ισορροπία ροπών γύρω από το O*

$$\sum \overline{M}_0 = 0 \Rightarrow W_P \frac{L}{2} + N\frac{L-x}{2} = T\cos\theta \cdot L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot 0.2 + 50 \cdot 0.15 = T \cdot 0.6 \cdot 0.4 \Rightarrow T = 39.6N$$

# Άσκηση

Ένας εργάτης βάρους 1000N βρίσκεται πάνω σε μία σκάλα μήκους 3.6m, η οποία στηρίζεται σε τοίχο με τον οποίο σχηματίζει γωνία 34°. Ο εργάτης απέχει 0.9m από την κορυφή της σκάλας. Το βάρος της σκάλας και η τριβή με τον τοίχο είναι αμελητέα. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στη σκάλα από το έδαφος και τον τοίχο.




**N=W**

Ισορροπία δυνάμεων:

$$\sum \overline{F}_y = 0 \Rightarrow N = F_2 \sin\theta \quad (1)$$

$$\sum \overline{F}_x = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 \cos\theta \quad (2)$$

Ισορροπία ροπών γύρω από το O:

$$\sum \overline{M} = 0 \Rightarrow N\cos 56 \cdot (3.6 - 0.9) = F_1 \cos 34 \cdot 3.6$$

$$\Rightarrow F_1 = 506N \quad (3)$$

(1) & (2) $$\frac{N}{F_1} = \tan\theta \Rightarrow \tan\theta = 1.98 \Rightarrow \theta = 63.2^\circ$$

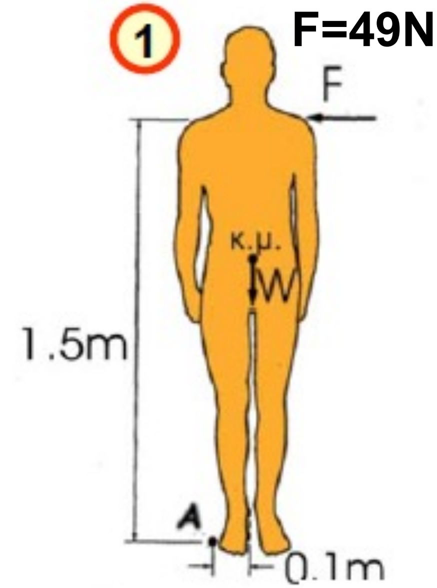
(2) $$F_2 = \frac{F_1}{\cos\theta} = \frac{506}{0.45} = 1122N$$ **(κάθετη αντίδραση εδάφους & τριβή)**

# Ισορροπία του ανθρώπινου σώματος

1 Πόση είναι η δύναμη F που πρέπει να ασκηθεί για να πέσει άνθρωπος μάζας 75kg;

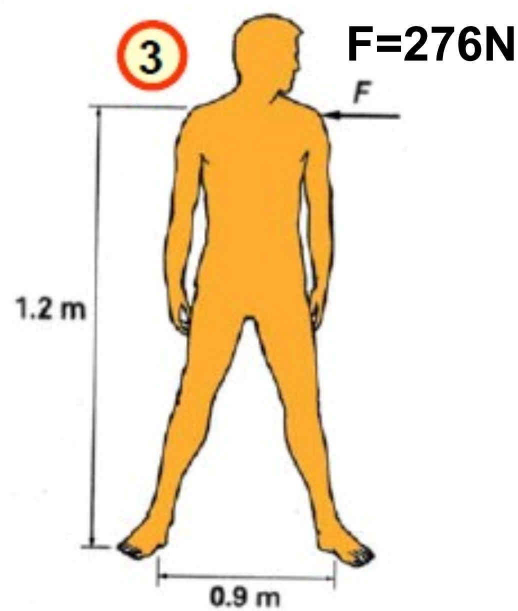
$$F \cdot 1.5 = W \cdot 0.1 = 0.1 \cdot m \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{0.1 \cdot m \cdot g}{1.5} = \frac{0.1 \cdot 75 \cdot 9.81}{1.5} = 49N$$





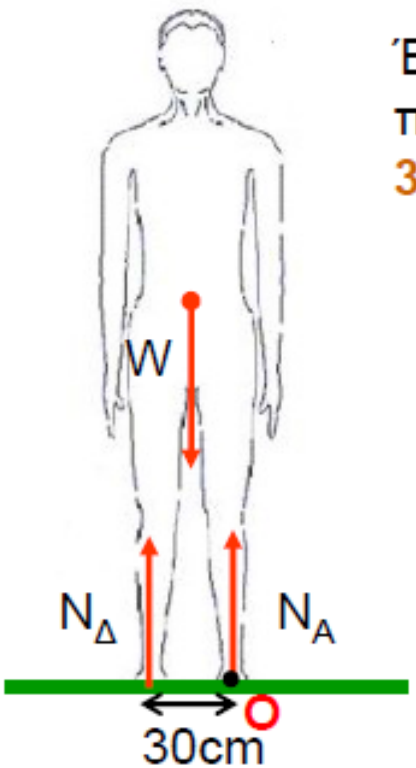
2 Ο άνθρωπος γέρνει προς τη μεριά άσκησης της δύναμης → το κ.μ. απομακρύνεται από το σημείο A → είναι πιο δύσκολο να αναποδογυρίσει το σώμα




3 Ο άνθρωπος ανοίγει τα πόδια → το κ.μ. μετατοπίζεται προς τα κάτω + μεγαλώνει η βάση στήριξης

*Η ροπή της τριβής και της κάθετης δύναμης στο σημείο A ισούται με μηδέν για άξονα περιστροφής που περνά από το A*

# Ισορροπία του ανθρώπινου σώματος



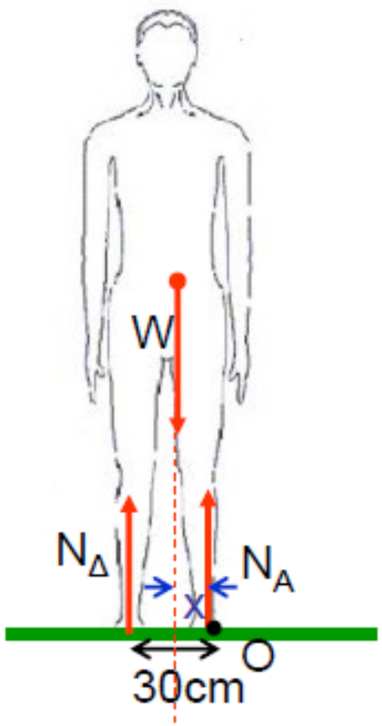

Έστω άνθρωπος βάρους **900N** που στηρίζεται στα δύο πόδια του με την απόσταση μεταξύ των πελμάτων να είναι **30cm**.

**Ισορροπία δυνάμεων:** $W = N_A + N_\Delta$

**Ισορροπία ροπών γύρω από το σημείο O:**

$$W\frac{d}{2} = N_\Delta d \Rightarrow N_\Delta = \frac{W}{2} = 450\text{N}$$

# Ισορροπία του ανθρώπινου σώματος




Αν λόγω τραυματισμού στο δεξί πόδι η $N_Δ$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από 250N πόσο πρέπει να μετατοπιστεί το κέντρο βάρους του σώματος;

**Ισορροπία δυνάμεων:** $W = N_A + N_\Delta$

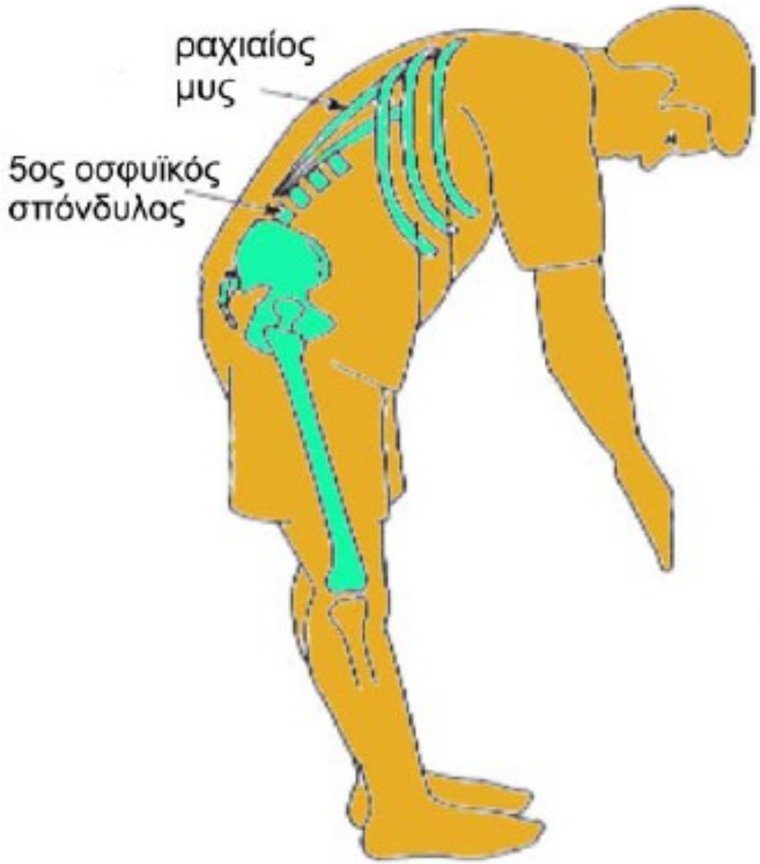
**Ισορροπία ροπών γύρω από το σημείο Ο:**

$$Wx = N_\Delta d \Rightarrow Wx = N_\Delta d \Rightarrow$$

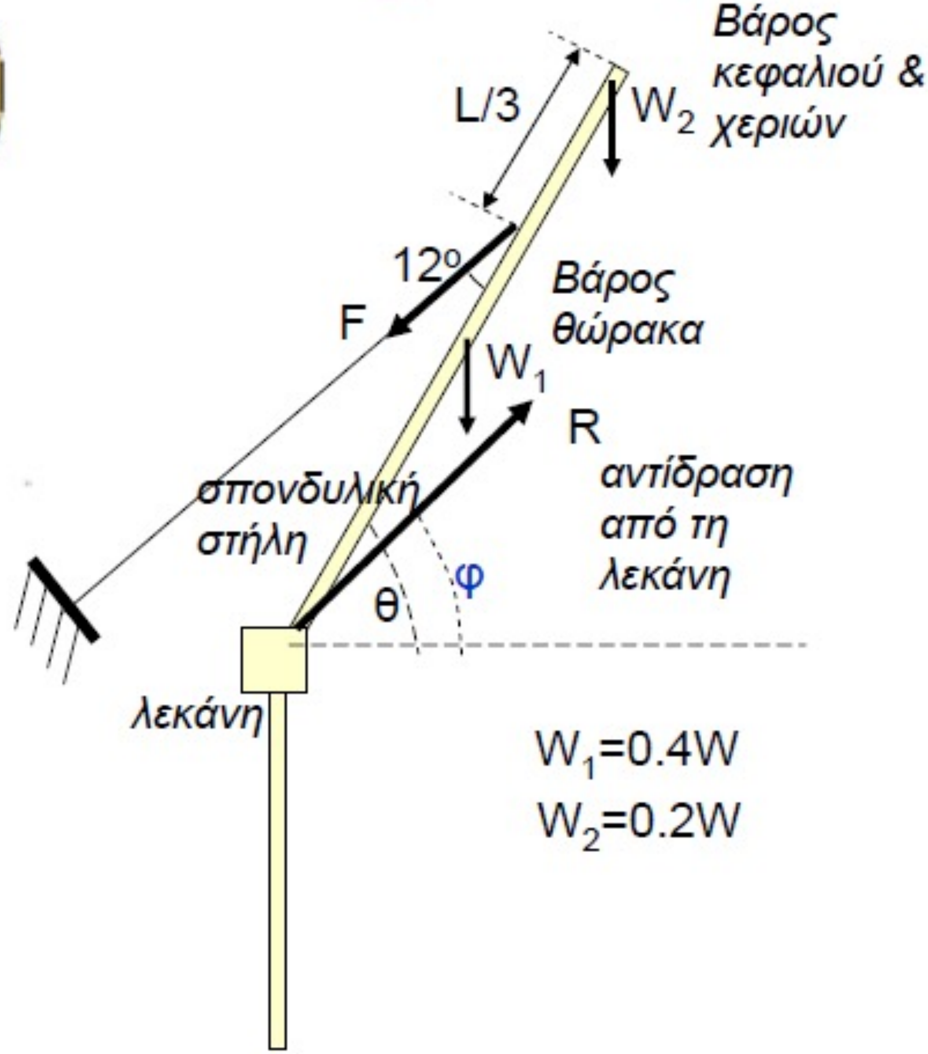
$$\Rightarrow x = \frac{N_\Delta}{W} d = \frac{250}{900} 30 = 8.3cm$$

Το Κ.Μ. μετατοπίστηκε κατά: 15-8.3=6.7cm

# Δυνάμεις στη σπονδυλική στήλη



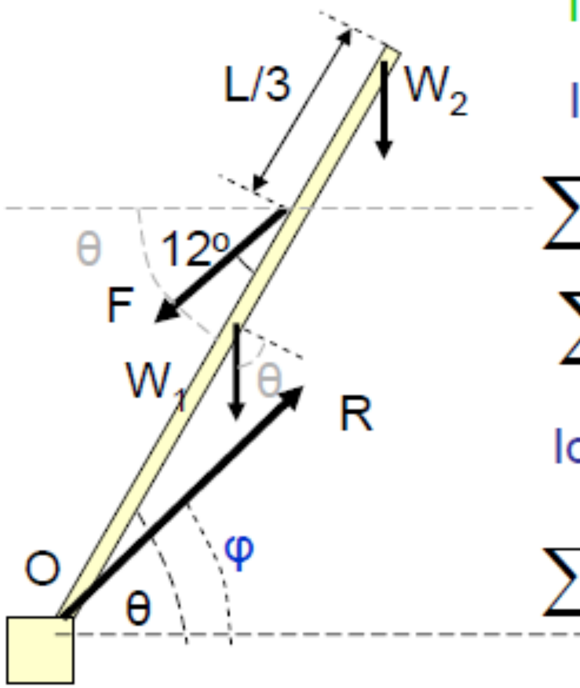

Μηχανικό ανάλογο:




$W_1=0.4W$

$W_2=0.2W$

# Δυνάμεις στη σπονδυλική στήλη




$W_1=0.4W$

$W_2=0.2W$

Πόση είναι η R και η F για θ=30$^o$ ;

Ισορροπία δυνάμεων:

$$\sum \overline{F}_x = 0 \Rightarrow F\cos(\theta - 12) = R\cos\varphi \quad (1)$$

$$\sum \overline{F}_y = 0 \Rightarrow F\sin(\theta - 12) + W_1 + W_2 = R\sin\varphi \quad (2)$$

Ισορροπία ροπών γύρω από το O:

$$\sum \overline{M} = 0 \Rightarrow W_1\frac{L}{2}\cos\theta + W_2 L\cos\theta = F\sin 12\cdot\frac{2L}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(0.4W\frac{1}{2} + 0.2W\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}F0.21 \Rightarrow \boxed{F = 2.47W} \quad (3)$$

# Δυνάμεις στη σπονδυλική στήλη

1 $$2.47W\cos(30-12) = R\cos\varphi \Rightarrow 2.35W = R\cos\varphi$$

2 $$2.47W\sin(30-12) + 0.4W + 0.2W = R\sin\varphi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1.36W = R\sin\varphi$$

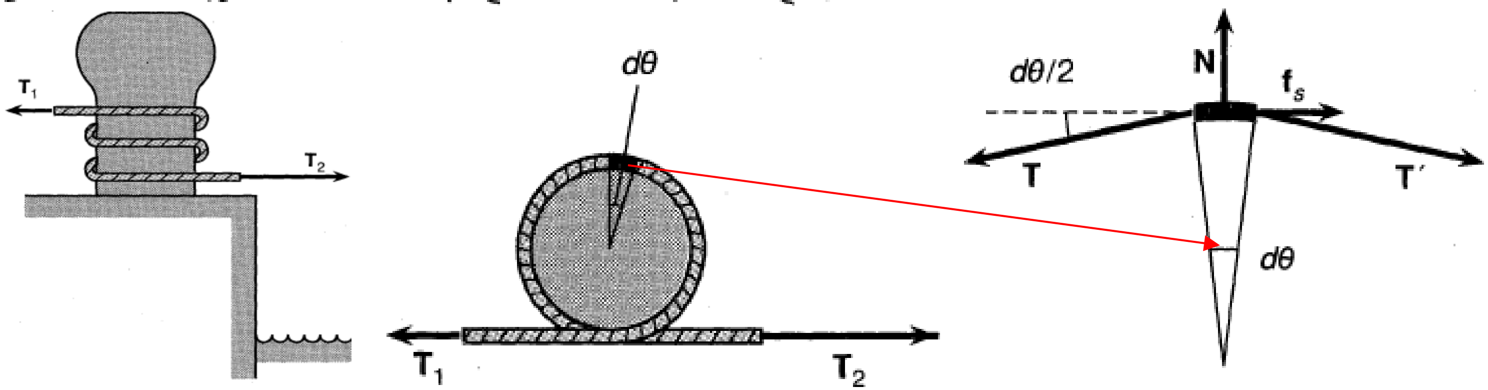
$2^2 + 1^2$ $$R^2 = 2.35^2W^2 + 1.36^2W^2 = 7.37W^2 \Rightarrow \boxed{R = 2.71W}$$

$2 \div 1$ $$\tan\varphi = \frac{1.36}{2.35} = 0.58 \Rightarrow \boxed{\varphi = 30^\circ}$$

Για θ=60ο:
$$\boxed{\begin{aligned} F &= 1.42W \\ \varphi &= 60.15^\circ \\ R &= 1.91W \end{aligned}}$$

δοκιμάστε λύσεις για διαφορετικές γωνίες θ και για την περίπτωση που ο άνθρωπος σηκώνει βάρος π.χ. 0.2W, 0.5W

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Για να συγκρατήσει τα σκοινιά πρόσδεσης (πρυμάτσες) από την ισχυρή έλξη του πλοίου, ένας ναύτης τυλίγει το σκοινί πολλές φορές γύρω από μία δέστρα (Σχ. 14.10). Παρατηρεί τότε ότι έλκοντας την άκρη του σκοινιού με πολύ μικρή τείνουσα δύναμη $\mathbf{T}_1$, μπορεί να κρατήσει το σκοινί σταθερό έναντι της πολύ μεγαλύτερης τάσης $\mathbf{T}_2$ του άλλου άκρου. Υποθέστε ότι ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στο σκοινί και στη δέστρα είναι $\mu_s = 0{,}5$, ότι $T_2 = 3{,}0 \times 10^4$ N και ότι ο ναύτης μπορεί να ασκήσει μέγιστη έλξη $T_1 = 500$ N. Πόσες στροφές πρέπει να τυλίξει ο ναύτης το σκοινί γύρω από τη δέστρα;




$$N - T\sin(\frac{d\theta}{2}) - T\sin(\frac{d\theta}{2}) = 0 \Rightarrow N - T(\frac{d\theta}{2}) - T(\frac{d\theta}{2}) = 0 \Rightarrow N = Td\theta \Rightarrow$$

$$f_s = \mu_s N = \mu_s T d\theta$$

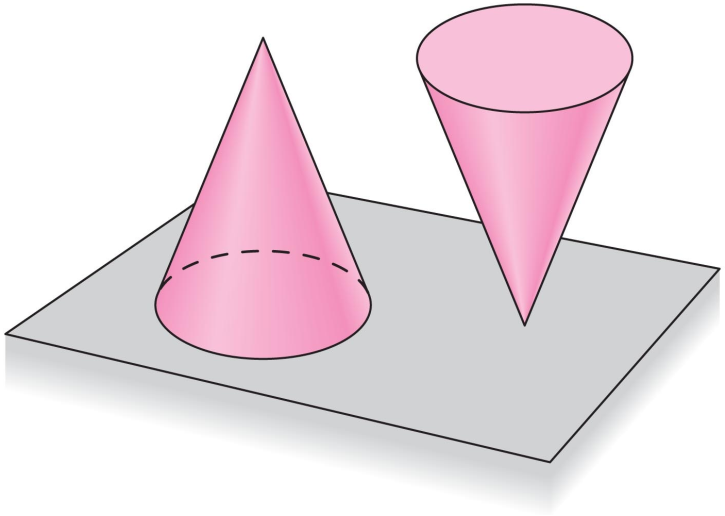
Η ισορροπία των εφαπτομενικών δυνάμεων απαιτεί η τάση στο δεξιό άκρο του τμήματος να είναι λίγο μεγαλύτερη από την τάση στο αριστερό άκρο έτσι ώστε η αύξηση dT να αντισταθμίζει τη δύναμη τριβής

$$dT = f_s = \mu_s T d\theta \Rightarrow \frac{dT}{T} = \mu_s d\theta \Rightarrow \int_{T1}^{T2} \frac{dT}{T} = \mu_s \int_{\theta 1}^{\theta 2} d\theta \Rightarrow \ln T_2 - \ln T_1 = \mu_s(\theta_2 - \theta_1) \Rightarrow$$

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{1}{\mu_s}\ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{0{,}5}\ln(\frac{3{,}0\times 10^4}{500}) = 8{,}2 rad \Rightarrow \theta_2 - \theta_1 = \frac{8{,}2 rad}{2\pi} = 1{,}3 \sigma\tau\rho o\varphi\acute{\varepsilon}\varsigma$$

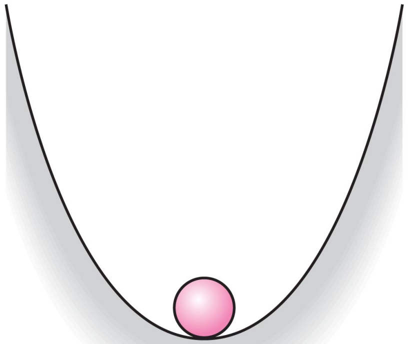
# Ευστάθεια

- Μια ισορροπία είναι ευσταθής αν μια μικρή διαταραχή από την ισορροπία παράγει δυνάμεις και/ή ροπές που τείνουν να επαναφέρουν την ισορροπία
- Μια ισορροπία είναι ασταθής αν η παραμικρή διαταραχή θέσει το σύστημα σε κίνηση, απομακρύνοντάς το από την αρχική ισορροπία

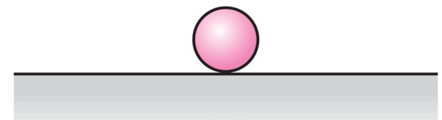


Ευσταθής (*αριστερά*) και ασταθής (*δεξιά*) ισορροπία

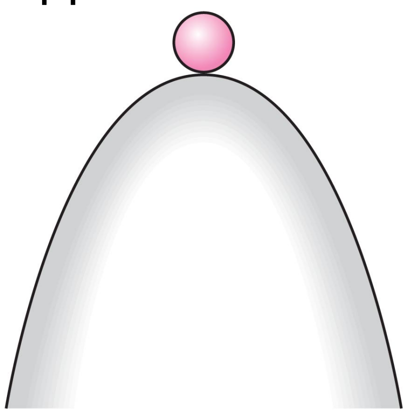
# Είδη ευστάθειας



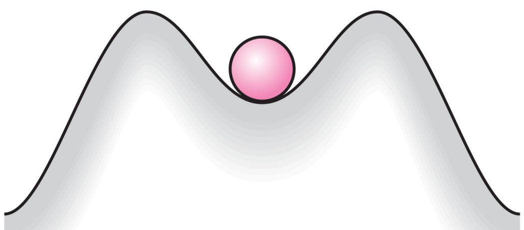
**Ευσταθής ισορροπία**: μετά τη διαταραχή η μπάλα θα επιστρέψει στην ισορροπία



**Ουδέτερα ευσταθής ισορροπία**



**Ασταθής ισορροπία**: μετά τη διαταραχή η μπάλα θα εγκαταλείψει την αρχική ισορροπία



**Μετασταθής** ή **υπό συνθήκη ευσταθής ισορροπία**: η μπάλα επιστρέφει για μικρές διαταραχές, αλλά όχι για μεγάλες

# Συνθήκες για ισορροπία και ευστάθεια

- Για να βρίσκεται ένα σώμα σε ισορροπία, πρέπει να ασκείται σε αυτό μηδενική ολική δύναμη
  - Επομένως, το σώμα πρέπει να βρίσκεται σε ένα μέγιστο ή ελάχιστο της καμπύλης της δυναμικής του ενέργειας:

$$\frac{dU}{dx} = 0 \quad \text{(συνθήκη ισορροπίας)}$$

- Για την ευσταθή ισορροπία, το σώμα πρέπει ν βρίσκεται σε ένα τοπικό ελάχιστο:

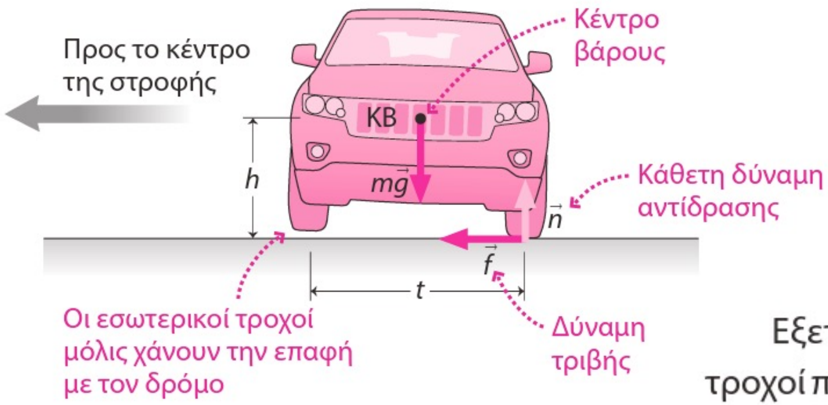
$$\frac{d^2U}{dx^2} > 0 \quad \text{(ευσταθής ισορροπία)}$$

- Η συνθήκη για την ασταθή ισορροπία είναι:

$$\frac{d^2U}{dx^2} < 0 \quad \text{(ασταθής ισορροπία)}$$


- Σε δύο και τρεις διαστάσεις, ένα σώμα μπορεί να είναι ευσταθές στη μία κατεύθυνση, αλλά όχι στην άλλη

# Έλεγχος ευστάθειας αυτοκινήτου




Εξετάστε την περίπτωση ενός οχήματος του οποίου οι εσωτερικοί τροχοί πρόκειται να χάσουν την επαφή με τον δρόμο, οπότε δεν υπάρχει ούτε κάθετη δύναμη ούτε δύναμη τριβής σε αυτούς στο εσωτερικό της στροφής. Η εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα στις υπόλοιπες δυνάμεις (βλ. σχέδιο) δίνει $f = mv^2/r$ στην οριζόντια κατεύθυνση και $n = mg$ στην κατακόρυφη κατεύθυνση. Στο μεταξύ, οι ροπές που σχετίζονται με αυτές τις δύο δυνάμεις είναι $fh$ και $nt/2$, όπου $h$ είναι το ύψος του κέντρου βάρους πάνω από τον δρόμο και $t$ είναι η απόσταση μεταξύ των τροχών. Το σχέδιο δείχνει ότι αυτές οι ροπές είναι σε αντίθετες κατευθύνσεις. Ορίζοντας να είναι μηδέν η ολική ροπή και αντικαθιστώντας τις δύο δυνάμεις, παίρνουμε τη **συνθήκη ανατροπής**:

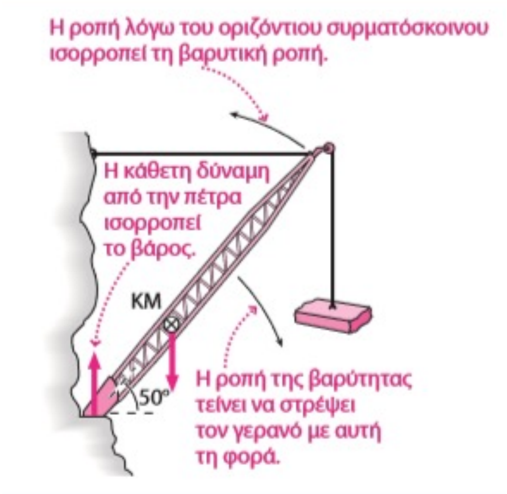
$$\frac{v^2}{rg} = \frac{t}{2h}$$

# Σύνοψη

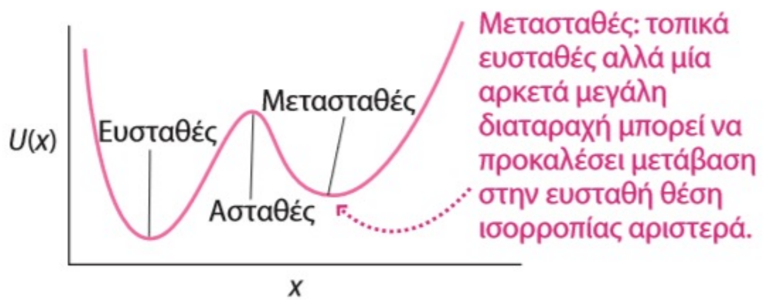
- Η στατική ισορροπία προϋποθέτει μηδενική ολική δύναμη και μηδενική ολική ροπή σε ένα σύστημα:

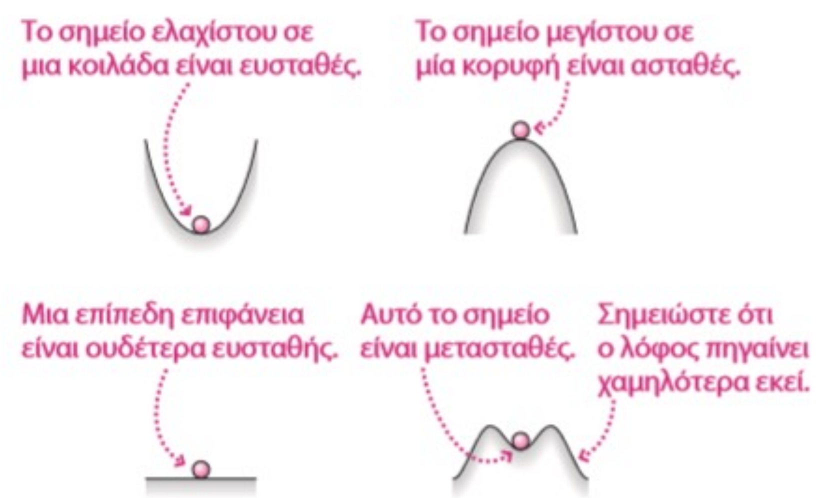
$$\sum \vec{F}_i = \vec{0}, \qquad \sum \vec{\tau}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}$$

Παράδειγμα: Ένας γερανός σε στατική ισορροπία

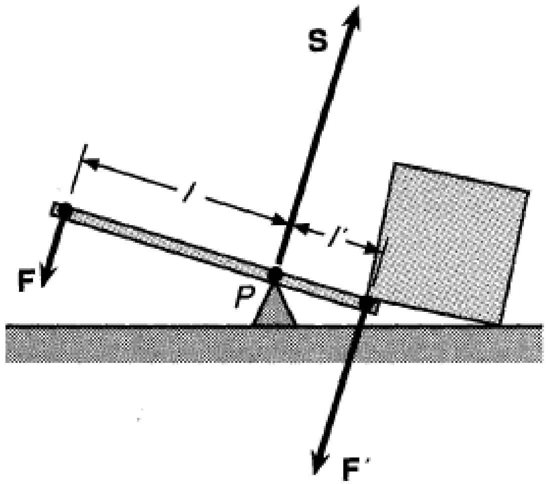



- Τα σημεία ισορροπίας μπορεί να είναι ευσταθή, ασταθή, ουδέτερα ευσταθή ή μετασταθή



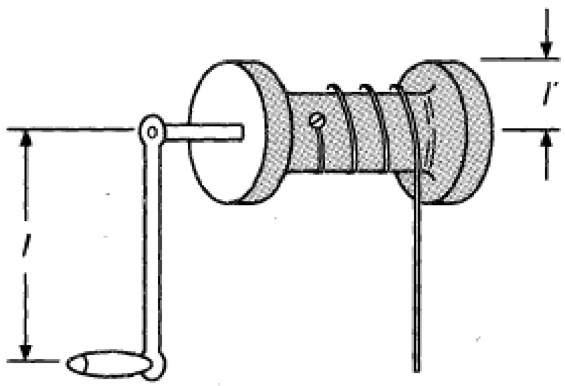
# Μοχλοί και τροχαλίες

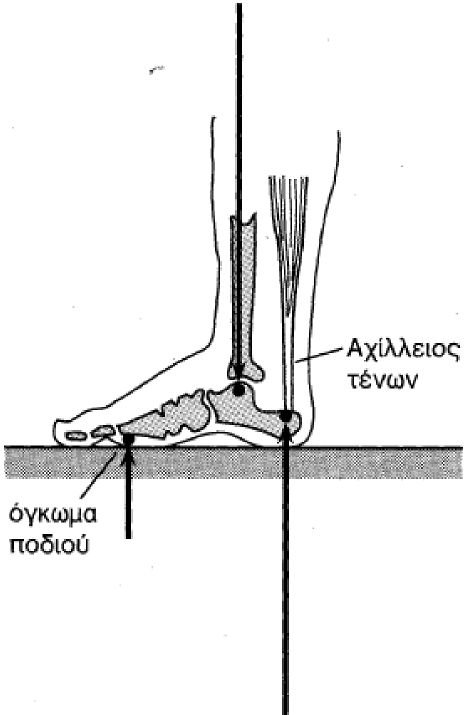



**Μοχλός** F είναι η ώθηση που ασκούμε εμείς

F' είναι η ώθηση του φορτίου (η δύναμη που ασκείται από το μοχλό στο φορτίο έχει ίδιο μέτρο αλλά αντίθετη φορά)

$$\boxed{Fl = F'l' \Rightarrow \frac{F}{F'} = \frac{l'}{l}}$$

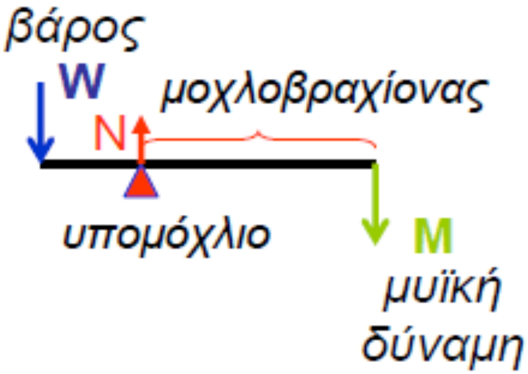


# Μοχλοί

Συμπαγής δοκός ελεύθερη να περιστραφεί γύρω από σταθερό σημείο (υπομόχλιο)

1ου είδους

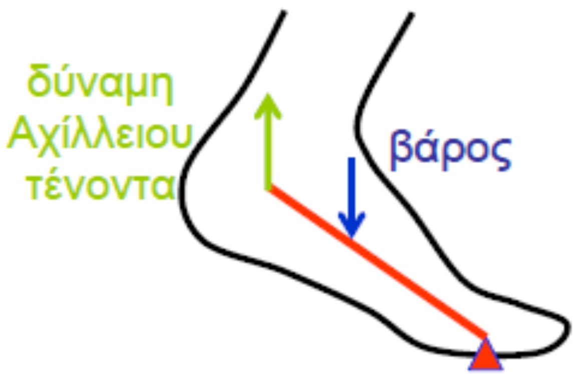



2ου είδους


3ου είδους



Κοινοί στη μηχανική





Κοινοί στο σώμα

- Απαιτείται μεγαλύτερη μυϊκή δύναμη

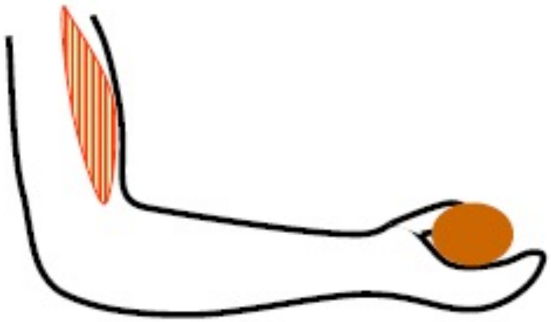
***αλλά***

- Ο μυς συστέλλεται λιγότερο
- Τα άκρα μπορούν να είναι λεπτά και περισσότερο ευκίνητα

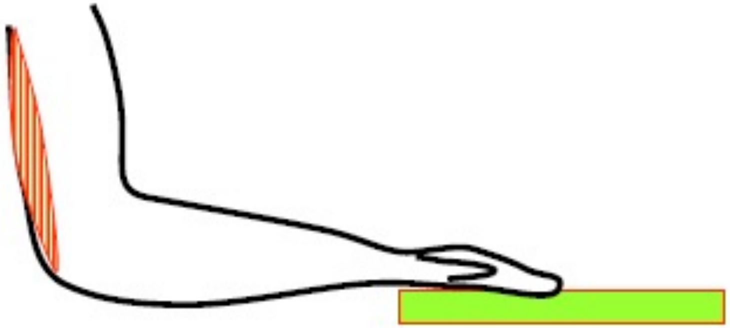
# Σκελετικοί μύες

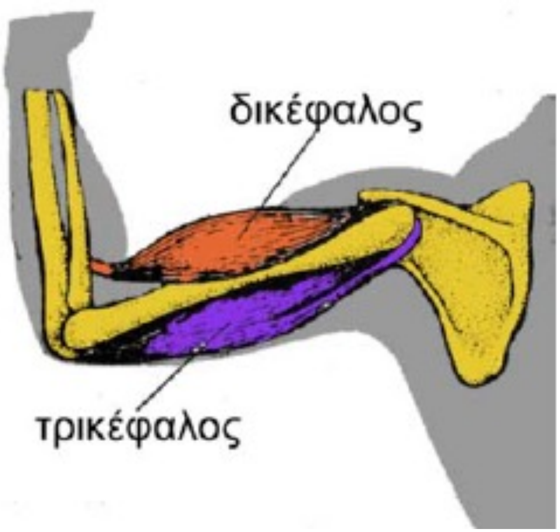
Επειδή οι μύες παράγουν έργο μόνο όταν συστέλλονται υπάρχουν συνήθως κατά ζεύγη

Δικέφαλος: βοηθά στο να ανασηκώνεται προς τα πάνω ο αντιβραχίονας

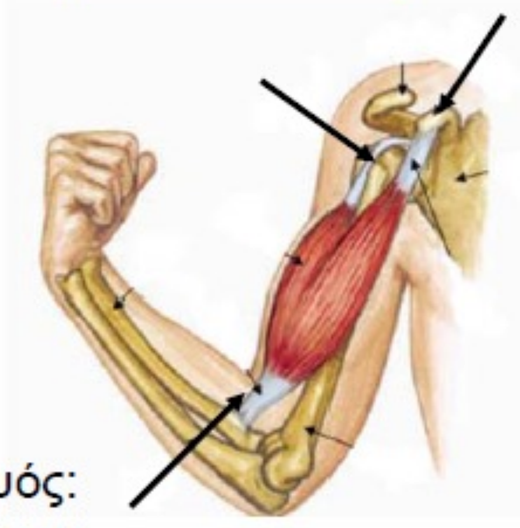


Τρικέφαλος : βοηθά στο να ασκεί δύναμη προς τα κάτω ο αντιβραχίονας





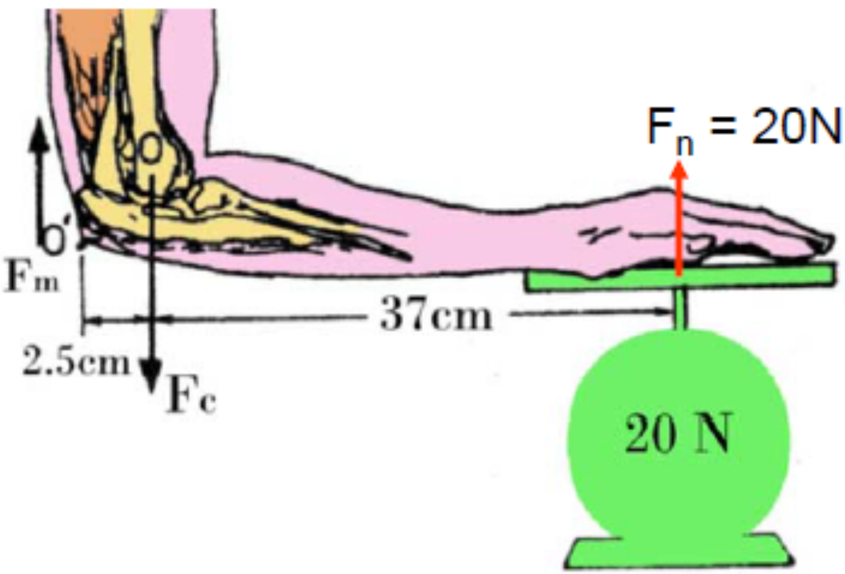

Οι μύες απολήγουν σε τένοντες, ο καθένας εκ των οποίων συνδέεται με διαφορετικό οστό



Μέγιστη δύναμη μυός: ~40 N ανά $cm^2$ του εμβαδού διατομής του

# Άσκηση

Αν ο αντιβραχίονας βρίσκεται σε οριζόντια θέση και η παλάμη ασκεί δύναμη 20N στο ζυγό, να υπολογιστεί η μυϊκή δύναμη $F_m$ και η δύναμη αντίδρασης στον αγκώνα (βάρος χεριού = 0).




Ισορροπία ροπών γύρω από το Ο΄:

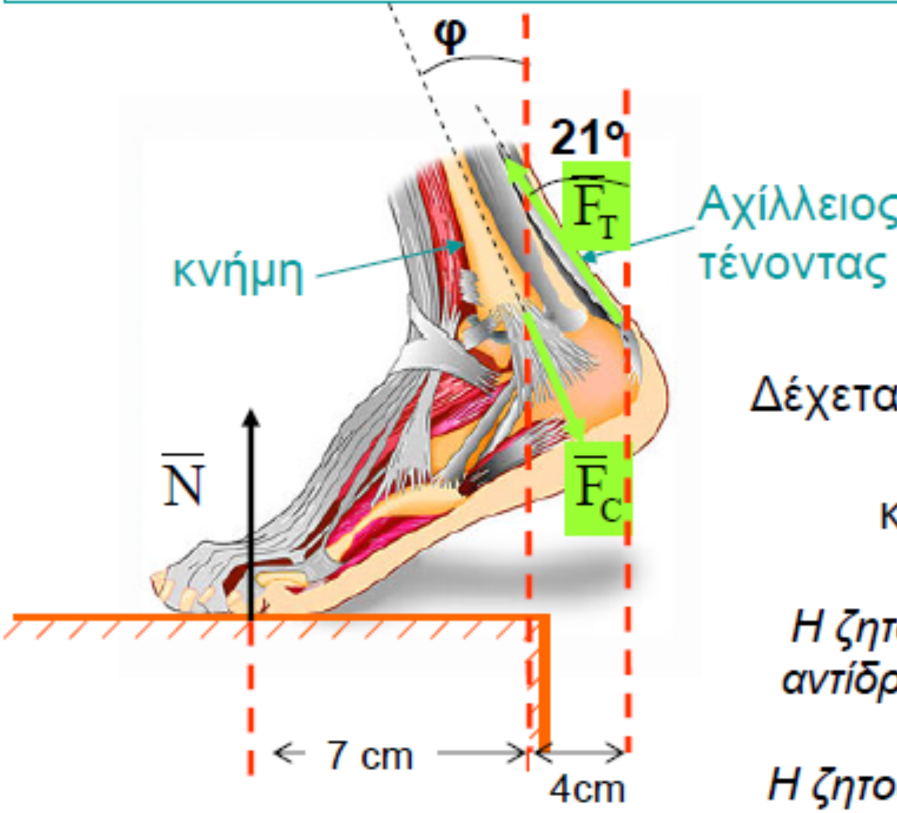
$$\sum \overline{M}_{O'} = 0 \Rightarrow 2.5 \cdot F_C = 39.5 \cdot F_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_C = 316\text{N}$$

Ισορροπία δυνάμεων:

$$\sum \overline{F}_y = 0 \Rightarrow F_m + F_n = F_C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_m = F_C - F_n = 316 - 20 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_m = 296\text{N}$$

# Άσκηση

***Δυνάμεις που αναπτύσσονται στον Αχίλλειο τένοντα και στον αστράγαλο καθώς ανεβαίνουμε τις σκάλες.*** Να υπολογιστεί το μέτρο της συμπιεστικής δύναμης στην κνήμη και της δύναμης έκτασης στον Αχίλλειο τένοντα μόλις ένα άτομο βάρους 850N πατάει στο σκαλοπάτι και όλο το βάρος του μεταφέρεται στο ένα πόδι. Θεώρησε το βάρος του ποδιού κάτω από τον αστράγαλο αμελητέο.

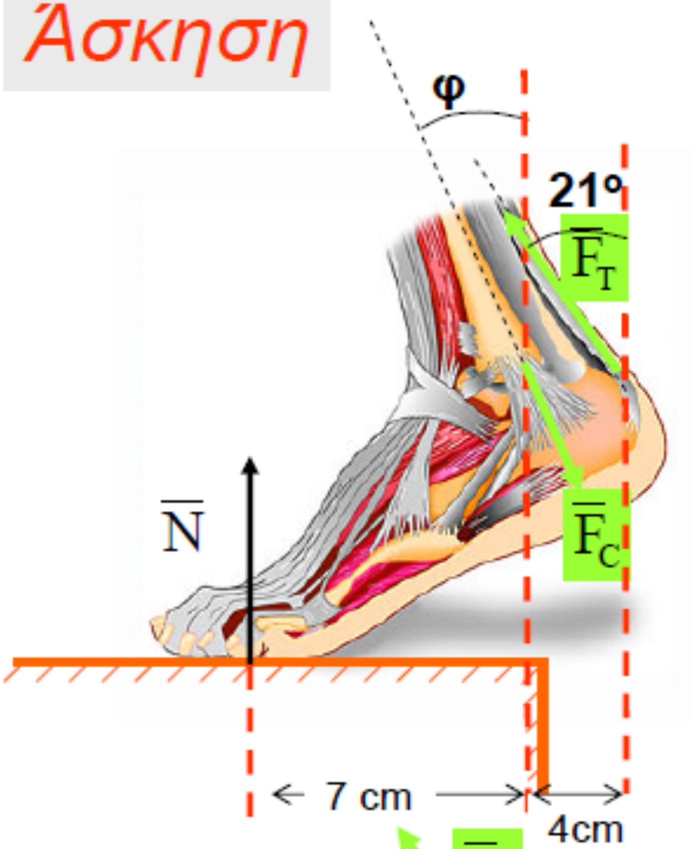


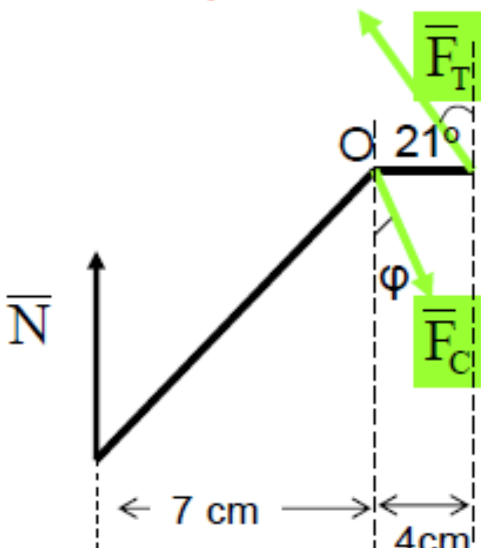

Άνθρωπος που στέκεται στο ένα πόδι:
N=W=850N (ισορροπία δυνάμεων που ασκούνται στον άνθρωπο)

Πόδι ως απομονωμένο σώμα:
Δέχεται την κάθετη αντίδραση του δαπέδου (N), τη δύναμη από την κνήμη ($F_C$) και τη δύναμη από τον τένοντα ($F_T$).

*Η ζητούμενη εκτατική δύναμη στον τένοντα είναι η αντίδραση της $F_T$ (ίση και αντίθετη της $F_T$ με σημείο εφαρμογής στον τένοντα).*
*Η ζητούμενη συμπιεστική δύναμη στην κνήμη είναι η αντίδραση της $F_C$ (ίση και αντίθετη της $F_C$ με σημείο εφαρμογής στην κνήμη).*

# Άσκηση




Ισορροπία δυνάμεων:

$$\sum \overline{F}_y = 0 \Rightarrow \cancel{N} + F_T \cos 21 = F_C \cos\varphi \quad (1)$$

W

$$\sum \overline{F}_x = 0 \Rightarrow F_T \sin 21 = F_C \sin\varphi \quad (2)$$

Ισορροπία ροπών γύρω από το O:

$$\sum \overline{M}_O = 0 \Rightarrow 4 \cdot F_T \cos 21 = 7 \cdot W \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_T = \frac{7W}{4\cos 21} = \frac{7 \cdot 850}{4 \cdot 0.933} = 1594\text{N} \quad (3)$$

(2) $F_C \sin\varphi = 1594 \cdot \sin 21 = 571\text{N}$

(1) $F_C \cos\varphi = 850 + 1594 \cos 21 = 2338\text{N}$

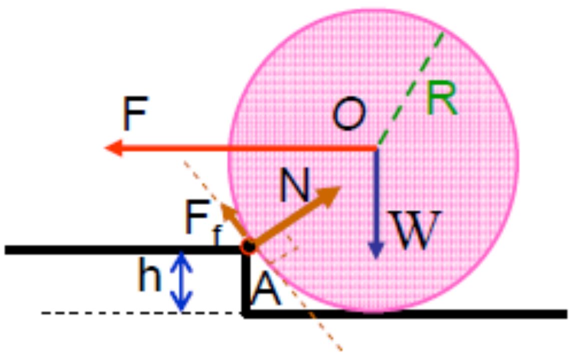
**$F_T$=1594N** **φ=14°** **$F_c$=2407N**

# Άσκηση

Ποια είναι η ελάχιστη οριζόντια δύναμη F που πρέπει να ασκηθεί πάνω στον τροχό μάζας m και ακτίνας R για να ανέβει το σκαλοπάτι;

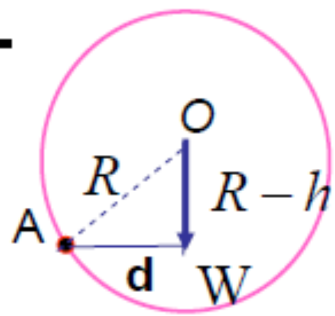
Για να ανέβει το σκαλοπάτι θα πρέπει να στραφεί γύρω από το A

Θα πρέπει: $M_F \geq M_W$



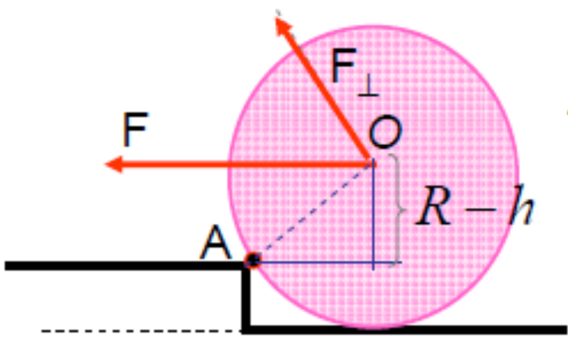

Ροπή της δύναμης F → $M_F = F(R-h)$

*$M_{Ff}$=$M_N$=0, γύρω από το σημείο A*




$$d^2 + (R-h)^2 = R^2 \Rightarrow d^2 =$$

$$= R^2 - R^2 - h^2 + 2Rh \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{2Rh - h^2}}$$

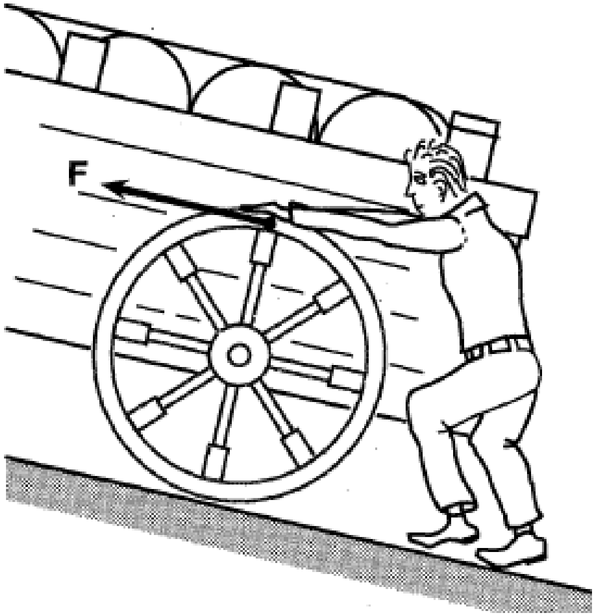


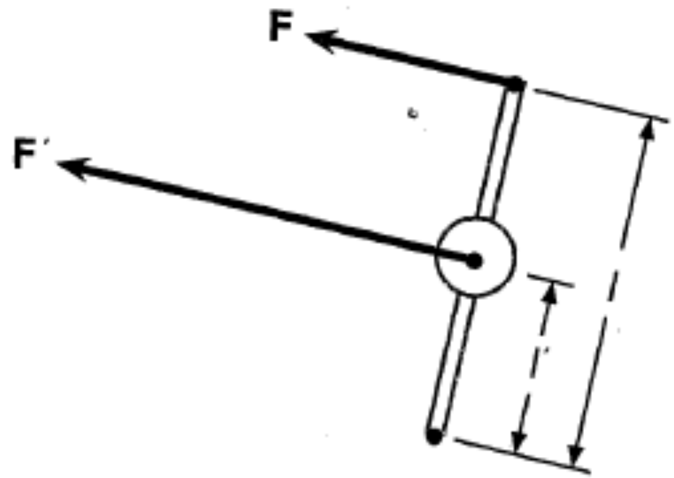

Ροπή του βάρους → $M_W = W \cdot d = W\sqrt{2Rh - h^2}$

Θα πρέπει: $F(R-h) \geq W\sqrt{h(2R-h)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F \geq W\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Για να βοηθήσει το άλογο του να σύρει ένα βαρύ φορτίο σε μιαν ανωφέρεια, ο καρροτσιέρης σπρώχνει το πάνω μέρος της περιφέρειας του ενός τροχού (Σχ. 14.15a). Εάν σπρώχνει με δύναμη 800 N, πόση δύναμη ασκεί στο κάρρο;



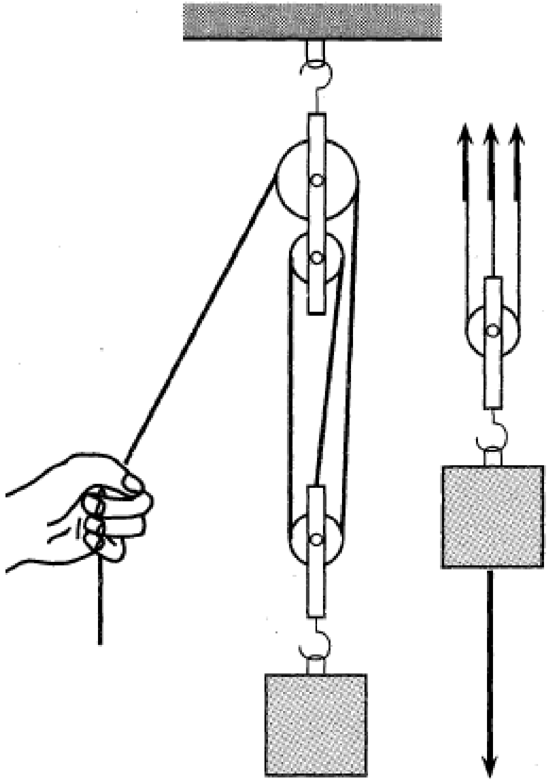



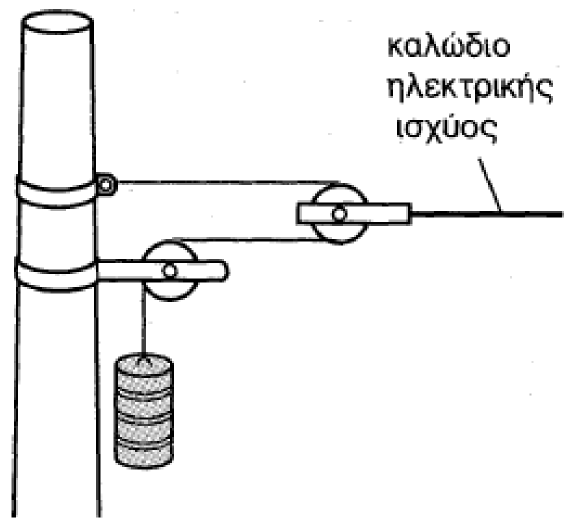

Το σημείο επαφής του τροχού με το έδαφος βρίσκεται προς στιγμή σε κατάσταση ηρεμίας, και άρα η κατακόρυφος διάμετρος του τροχού δρα ως μοχλός με υπομόχλιο το σημείο επαφής.

$$Fl = F'l' \Rightarrow \frac{F}{F'} = \frac{l'}{l} \Rightarrow \frac{800}{F'} = \frac{1}{2} \Rightarrow F' = 1600N$$

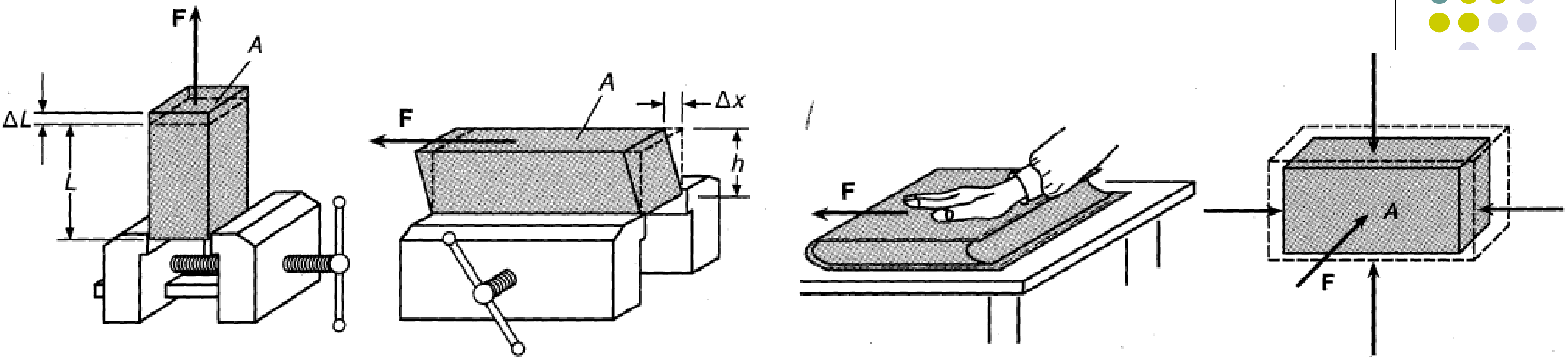
# Πολύσπαστο

(διάταξη πολλών συνδεδεμένων τροχαλιών που αποδίδουν μεγάλο μηχανικό όφελος)





# Ελαστικότητα υλικών




Η τάση που ασκείται στην άκρη ενός όγκου προκαλεί επιμήκυνση (αριστερά), η εφαπτομενική δύναμη στην επιφάνεια ενός όγκου προκαλεί διάτμηση (κέντρο), και η πίεση που ασκείται σε όλες τις πλευρές ενός όγκου προκαλεί σύνθλιψη (δεξιά).

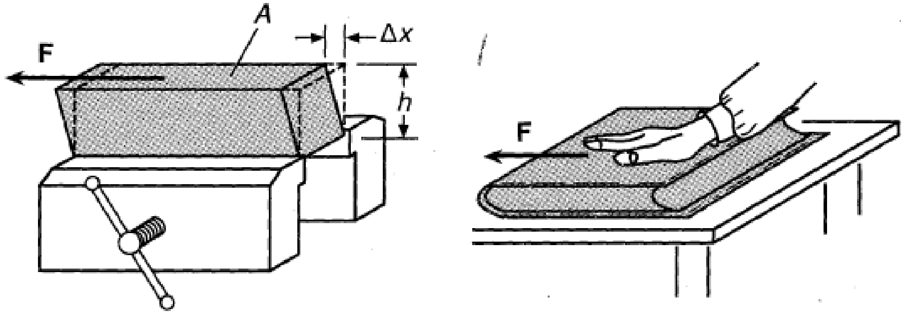
Για ράβδο μήκους L, εγκάρσιας διατομής A που εφαρμόζεται δύναμη F η οποία και προκαλεί επιμήκυνση ΔL, ισχύει:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{Y}\frac{F}{A}$$

*Παραμόρφωση (ΔL/L) ανάλογη της τάσης (F/A), Y = μέτρο ελαστικότητας Young*

# Ελαστικότητα υλικών

Για την περίπτωση της διάτμησης, ή της σύνθλιψης - συμπίεσης ισχύει:




$$\frac{\Delta x}{h} = \frac{1}{S}\frac{F}{A}$$

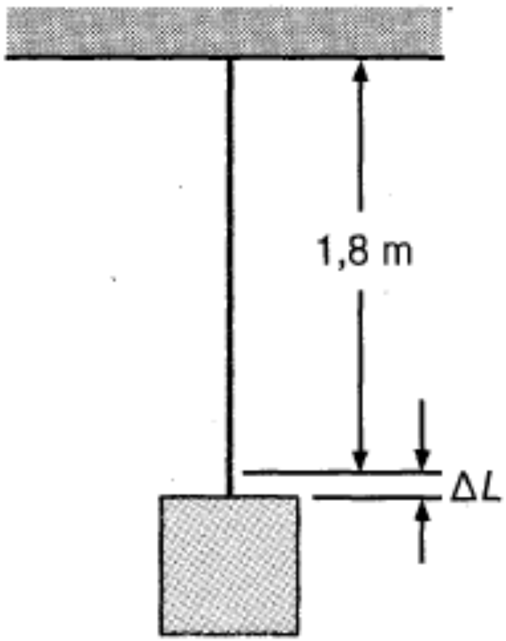
$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{B}\frac{F}{A}$$

*S = μέτρο διάτμησης, B = μέτρο ελαστικότητας όγκου*

# Πίνακας. Μέτρα ελαστικότητας μερικών υλικών

| Υλικό | Μέτρο Ελαστικότητας όγκου | Μέτρο διάτμησης | Μέτρο ελαστικότητας Young | Όριο θραύσης εφελκυσμού |
|---|---|---|---|---|
| Αργίλιο | $7{,}5 \times 10^{10}$ N/m$^2$ | $2{,}5 \times 10^{10}$ N/m$^2$ | $7{,}0 \times 10^{10}$ N/m$^2$ | $0{,}78 \times 10^{8}$ N/m$^2$ |
| Χαλκός | 13,5 | 4,4 | 11,0 | 2,4 |
| Χρυχός | 16,5 | 2,8 | 8,0 | 2,5 |
| Σίδηρος | | | | |
| χυτός | 9,5 | 5,0 | 11,0 | 1,1 |
| σφυρήλατος | 16,0 | 7,7 | 21,0 | 3,3 |
| Μόλυβδος | 4,1 | 0,6 | 1,6 | 2,1 |
| Νικέλιο | 17,0 | 7,8 | 21,0 | 4,1 |
| Χάλυβας | | | | |
| χυτός | 17,0 | 7,5 | 20,0 | 5,2 |
| μαλακός | 16,0 | 8,0 | 22,0 | 3,8 |
| Ορείχαλκος | 6,0 | 3,5 | 9,0 | 3,8 |
| Κασσιτερόχαλκος | 9,0 | 3,7 | 10,5 | 2,9 |
| Nylon | 0,59 | 0,12 | 0,36 | 3,2 |
| Οστό (μακρό) | 3,1 | 1,2 | 3,2 | – |
| Νερό | 0,22 | – | – | – |
| Γλυκόλη | 0,27 | – | – | – |
| Τετραχλοράνθρακας | 0,10 | – | – | – |
| Μεθανόλη | 0,083 | – | – | – |

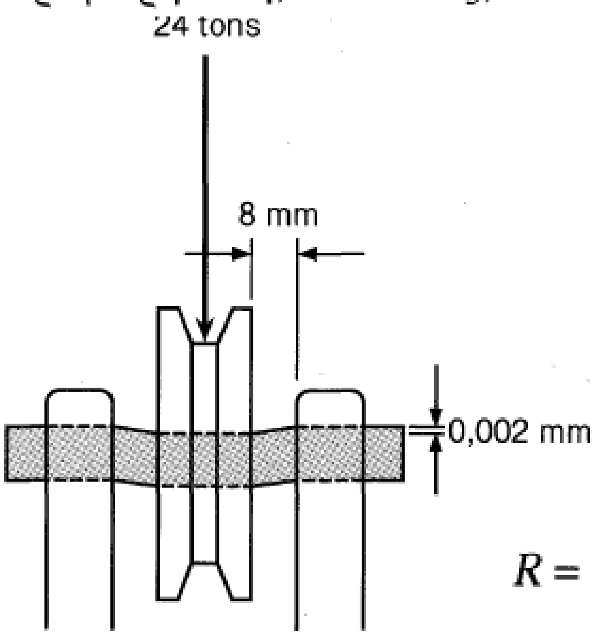
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9. Χαλύβδινο σύρμα 1,8 m και ακτίνας 0,3 mm υποβάλλεται σε τείνουσα δύναμη 70 N με βάρος που προσαρμόζεται στο κάτω άκρο του (βλ. Σχ. 14.22). Κατά πόσο εκτείνεται το σύρμα ως προς το αρχικό του μήκος; Το μέτρο ελαστικότητας του σύρματος ισούται με $1,9 \times 10^{11}\ \mathrm{N/m^2}$.




$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{Y} \times \frac{F}{A} \Rightarrow \frac{\Delta L}{1,8} = \frac{1}{1,9 \times 10^{11}} \times \frac{70}{\pi \times 0,0003^2} \Rightarrow \Delta L = 0,0023m$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10. Ο άξονας της τροχαλίας στο άκρο του βραχίονα γερανού είναι στερεωμένος σε δύο έδρανα. Ο άξονας είναι κατασκευασμένος από χυτό χάλυβα. Η απόσταση ανάμεσα στο κάθε έδρανο και στην προσκείμενη πλευρά της τροχαλίας ισούται με 8 mm. Εάν θέλουμε η μέγιστη κάμψη στο μέσο του άξονα να μην υπερβαίνει τα 0,002 mm όταν υποβάλλεται σε φορτίο 24 μετρικών τόννων (βλ. Σχ. 14.23), πόση πρέπει να είναι η ελαχίστη διάμετρος του άξονα;

ΛΥΣΗ: Η παραμόρφωση κάθε πλευράς του άξονα είναι διάτμηση. Κάθε πλευρά του άξονα στηρίζει το μισό φορτίο, δηλαδή, $F/2$. Εάν η ακτίνα του άξονα είναι $R$, η εγκάρσια διατομή έχει εμβαδό $\pi R^2$ και η τάση διάτμησης είναι $F/2A = F/2\pi R^2$. Η παραμόρφωση, συνεπώς, ισούται με



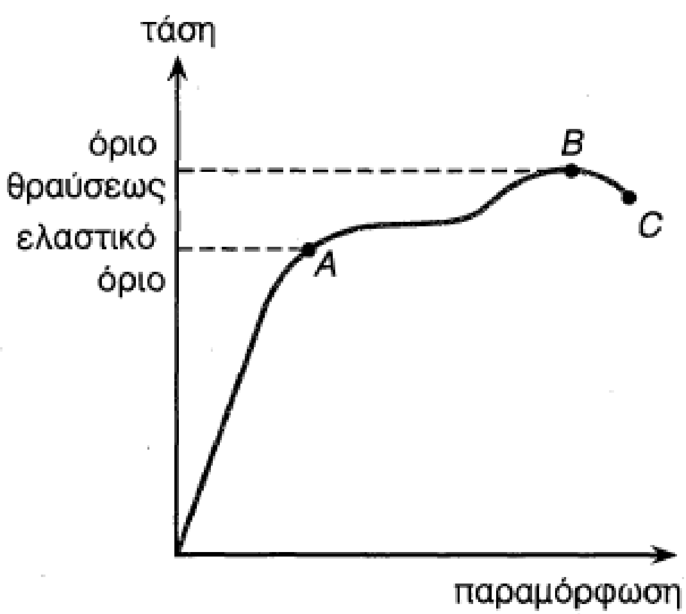

$$\frac{\Delta x}{h} = \frac{1}{S}\frac{F}{A}$$

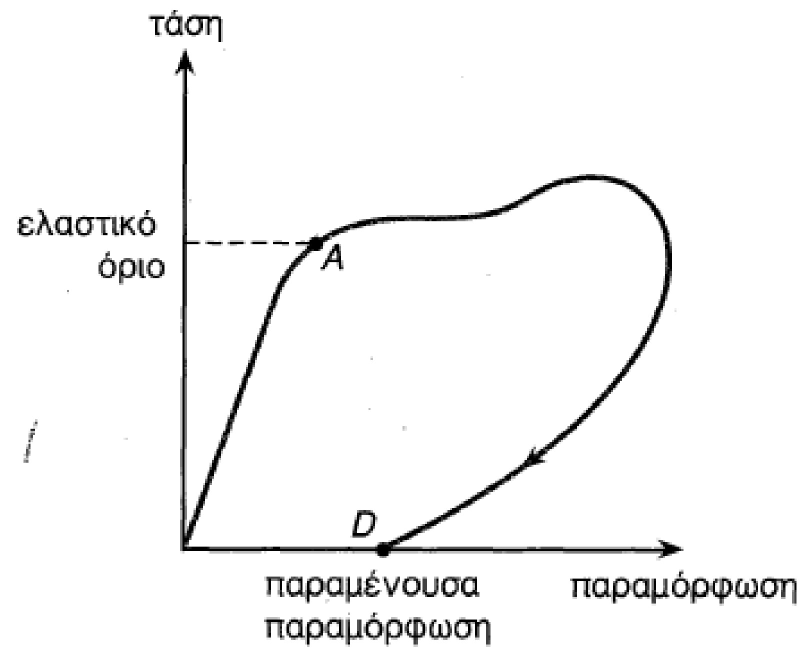
$$\frac{\Delta x}{h} = \frac{1}{S}\frac{F}{2\pi R^2}$$

$$R = \sqrt{\frac{Fh}{2\pi S \Delta x}}$$

$$= \sqrt{\frac{24\times 10^3\,\text{kg}\times 9{,}8\,\text{m/s}^2\times 8\times 10^{-3}\,\text{m}}{2\pi\times 7{,}5\times 10^{10}\,\text{N/m}^2\times 2\times 10^{-6}\,\text{m}}} = 4{,}5\times 10^{-2}\,\text{m} = 4{,}5\,\text{cm}$$

# Όρια ελαστικότητας και θραύσης




Τάση συναρτήσει παραμόρφωσης ενός τυπικού δείγματος μετάλλου. Αν εφαρμοστεί τάση > από το όριο θραύσης (B), το δείγμα δεν μπορεί να την αντισταθμίσει (δηλ. να προσφέρει αρκετά μεγάλη επαναφέρουσα δύναμη) και στο τέλος σπάει (σημείο C).

Τάση συναρτήσει παραμόρφωσης ενός τυπικού δείγματος μετάλλου το οποίο υποβλήθηκε σε βαθμιαία αυξανόμενη τάση η οποία παραμόρφωσε το δείγμα πέρα από το όριο ελαστικότητάς του. Στη συνέχεια η τάση μηδενίστηκε. Το σημείο D δείχνει την παραμένουσα μόνιμη παραμόρφωση του δείγματος.

# Σύνοψη

**Στατική ισορροπία:** Τα αθροίσματα των εξωτερικών δυνάμεων και των εξωτερικών ροπών που ασκούνται σε στερεό σώμα είναι ίσα με το μηδέν. Η βαρύτητα δρα στο κέντρο μάζας.

**Μηχανικό όφελος μοχλού:** $\dfrac{F'}{F} = \dfrac{l}{l'}$

**Επιμήκυνση ελαστικού υλικού:** $\dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{1}{Y}\dfrac{F}{A}$

**Διάτμηση:** $\dfrac{\Delta x}{h} = \dfrac{1}{S}\dfrac{F}{A}$

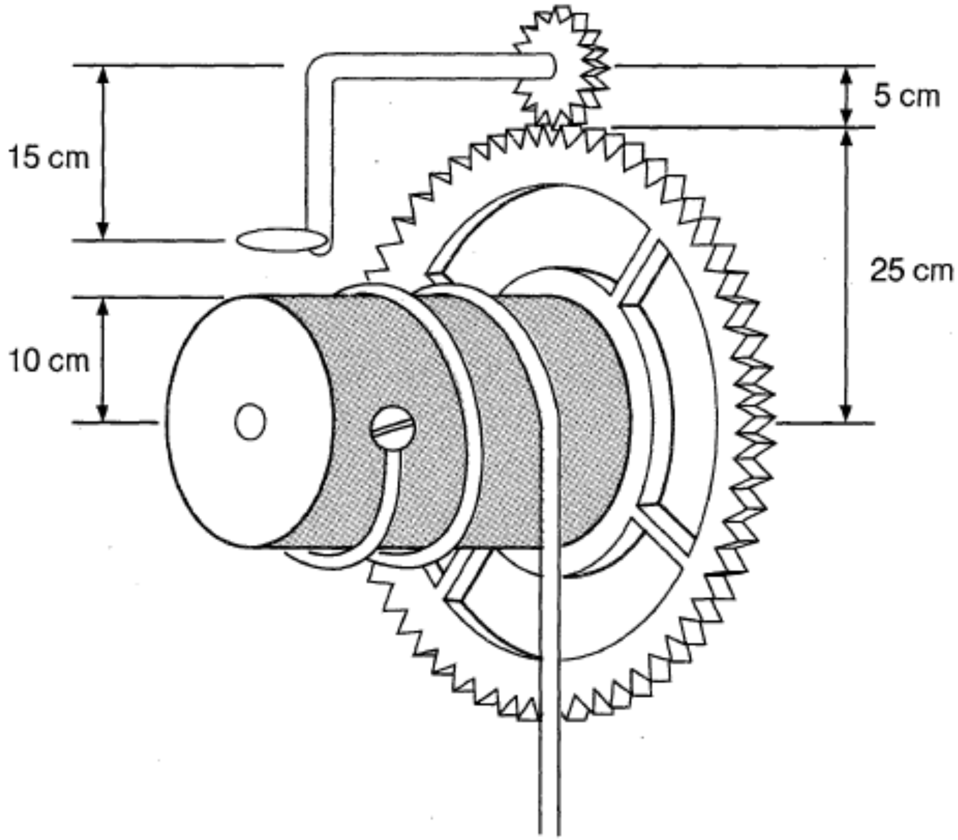
**Συμπίεση όγκου:** $\dfrac{\Delta V}{V} = \dfrac{1}{B}\dfrac{F}{A}$

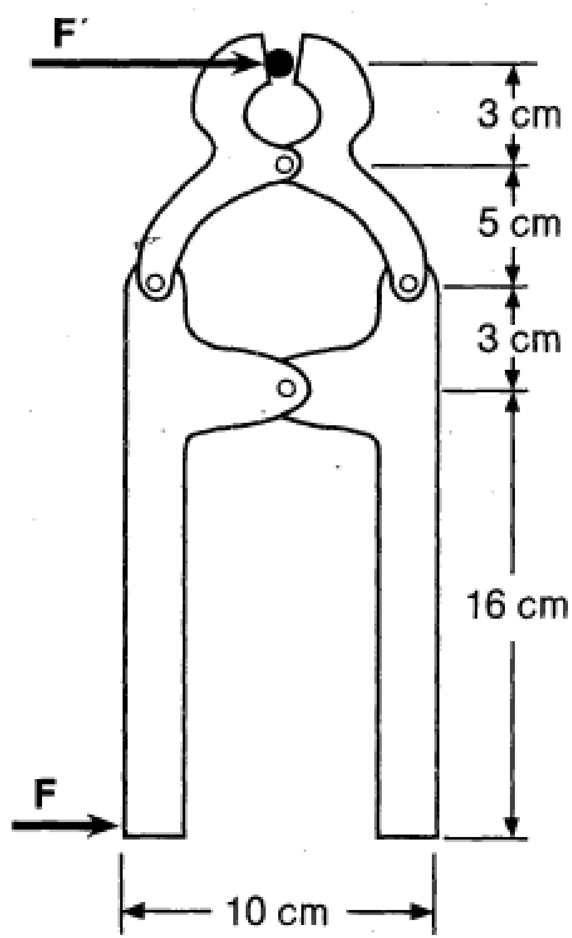
# Ερωτήσεις

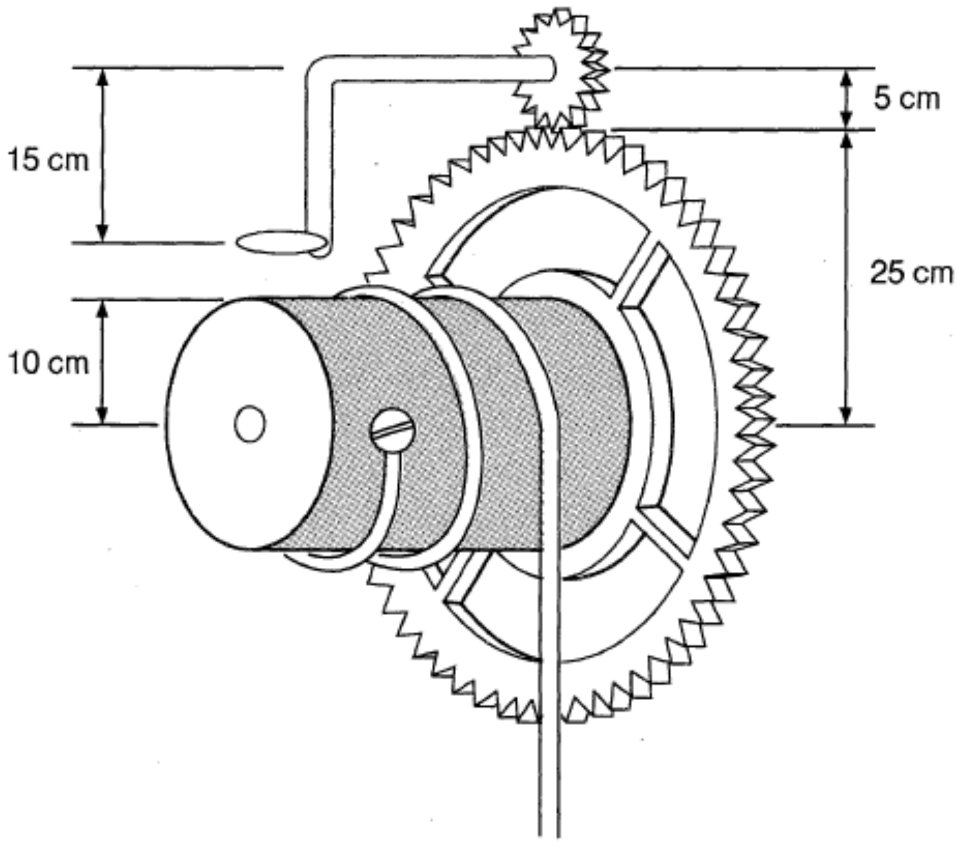
1. Εάν τα πόδια ενός τραπεζιού έχουν ακριβώς το ίδιο μήκος και εάν το πάτωμα είναι ακριβώς οριζόντιο, τότε το βάρος του τραπεζιού θα κατανεμηθεί εξίσου στα τέσσερα πόδια. Αν, όμως, υπάρχουν μικρές παρεκκλίσεις, τότε το βάρος δεν θα είναι ισοκατανεμημένο. Είναι δυνατό το βάρος να μοιραστεί σε τρία πόδια; Σε δύο;

8. Ενας ξυλουργός θέλει να υποβαστάξει την (επίπεδη) οροφή ενός κτιρίου, με οριζόντιες δοκούς ορθογώνιας διατομής. Για να επιτύχει μέγιστη αντοχή της οροφής (μικρότερο κοίλωμα στο μέσο) θα πρέπει να εγκαταστήσει τις δοκούς με τη στενή πλευρά κατακόρυφη ή με τη φαρδειά πλευρά κατακόρυφη;

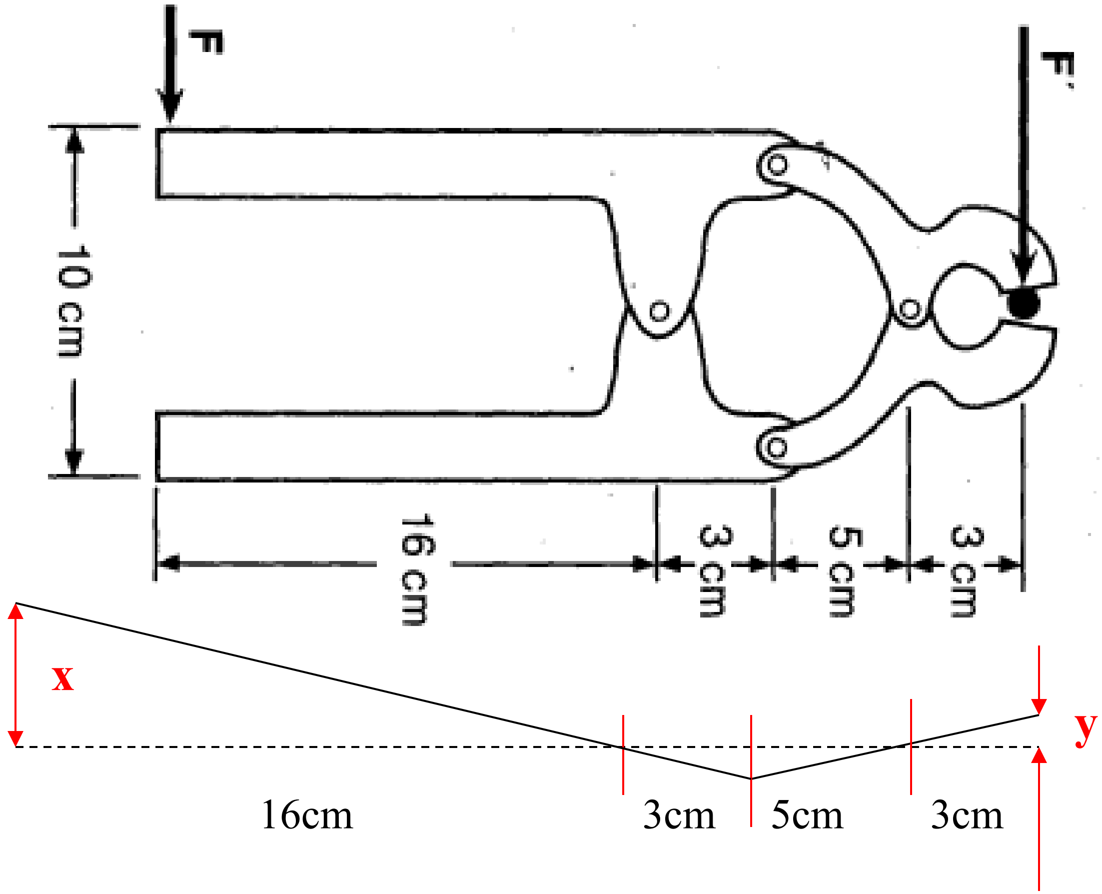
Ποιο είναι το μηχανικό όφελος των παρακάτω μηχανισμών ?






$$\text{Συνολικό μηχανικό όφελος} = \frac{15}{5} \times \frac{25}{10} = 7{,}5$$




$$\text{M.A.} = \frac{x}{y} = \frac{16}{3} \times \frac{5}{3} = 8{,}9$$

# Εμπειρογνώμονας

Σας καλούν να καταθέσετε σε μια αγωγή για ασφάλεια προϊόντων. Ένα βρέφος στο φορητό κάθισμα που φαίνεται στο Σχήμα 12.36 τραυματίστηκε όταν αυτό έπεσε στο πάτωμα. Ο κατασκευαστής ισχυρίζεται ότι το παιδί ήταν πολύ βαρύ για το κάθισμα. Οι γονείς ισχυρίζονται ότι το κάθισμα ήταν ελαττωματικό. Οι δοκιμές δείχνουν ότι το κάθισμα μπορεί να κρατήσει με ασφάλεια ένα παιδί αν η δύναμη $\vec{F}$ του τραπεζιού σε αυτό δεν υπερβαίνει τα 229 N. Η μάζα του καθίσματος είναι 2,0 kg, το τραυματισμένο παιδί έχει μάζα 10 kg και το κέντρο μάζας του παιδιού και του καθίσματος ήταν 16 cm από την άκρη του τραπεζιού. Ποιος διάδικος έχει δίκιο;