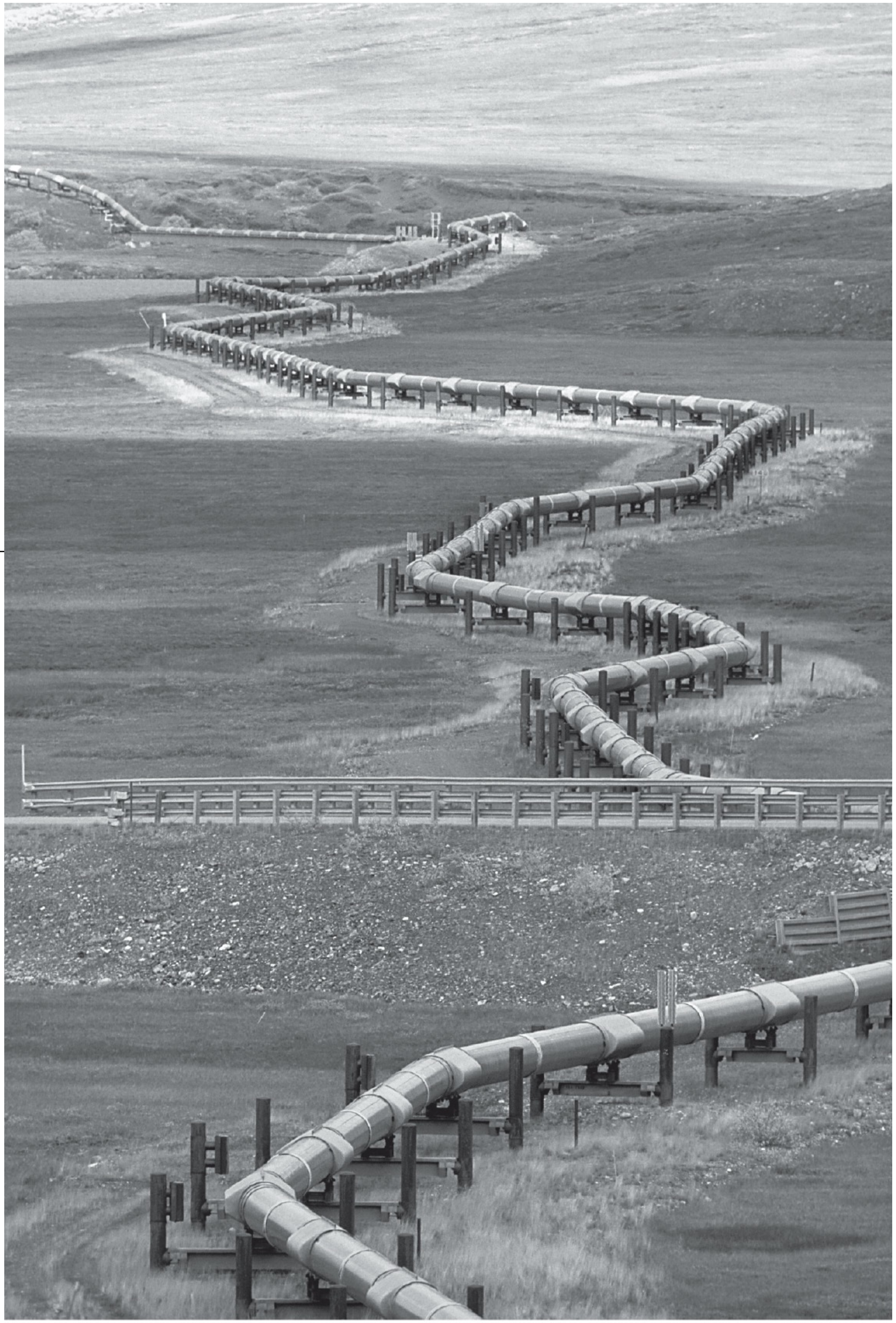
Ρευστομηχανική

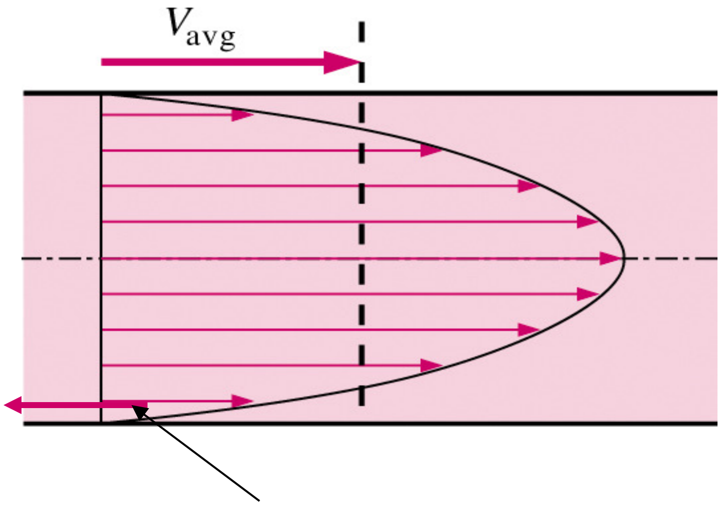
Ροές σε κλειστούς αγωγούς 1



Εισαγωγή

- Ροή σε κυλινδρικό αγωγό – εξέταση της επίδρασης του ιξώδους
- Εξέταση της Πλήρως Ανεπτυγμένης Ροής (η κατανομή της ταχύτητας δεν μεταβάλλεται κατά τη διεύθυνση της ροής)
- Εξέταση πραγματικών ρευστών – Ιξώδες, Στρωτή -Τυρβώδης ροή (Αριθμός Reynolds)

Εισαγωγή



Friction force of wall on fluid

- Average velocity in a pipe
  - The velocity at the walls of a pipe or duct flow is zero
  - We are often interested only in V_{avg}, which we usually call just V
  - Keep in mind the shear stress and friction along the pipe walls

Εισαγωγή

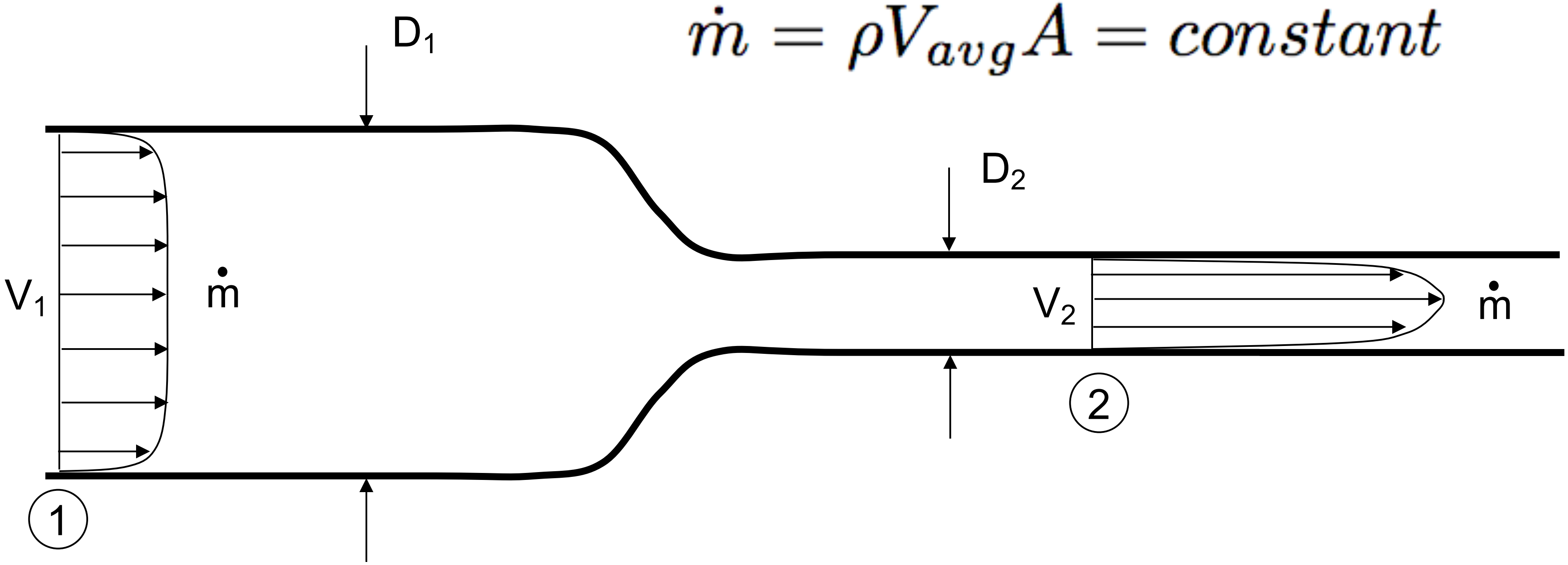
- For pipes of constant diameter and incompressible flow
  - V_{avg} stays the same down the pipe, even if the velocity profile changes
    - Why? Conservation of Mass

$$\underbrace{\dot{m} = \rho}_{\text{same}} \underbrace{V_{avg}}_{\text{same}} \underbrace{A}_{\text{same}} = constant$$

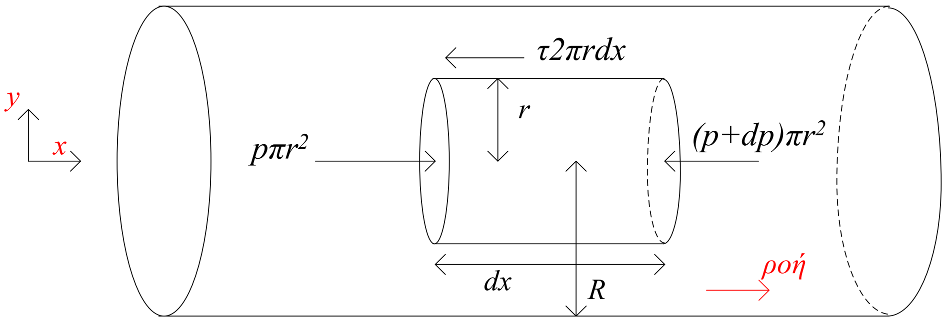
Εισαγωγή

- For pipes with variable diameter, $\dot{m}$ is still the same due to conservation of mass, but $V_1 \neq V_2$

$$\dot{m} = \rho V_{avg} A = constant$$



Ροή σε οριζόντιο κυκλικό αγωγό



- Αγωγός ακτίνας R με ροή ρευστού
- Ροή μόνιμη → ΣF = 0 στον στοιχειώδη κύλινδρο

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow p\pi r^2 - (p+dp)\pi r^2 - \tau(2\pi r dx) = 0 \Rightarrow \tau = -\frac{r}{2}\frac{dp}{dx}$$

$$\text{(ορισμός ιξώδους)}\ \tau = -\mu\frac{du}{dr}$$

$$\left.\right\} \quad -\mu\frac{du}{dr} = -\frac{r}{2}\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow du = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx} r dr \Rightarrow \int du = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\int r dr \quad \Rightarrow \boxed{u_x(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx} r^2 + \sigma\tau\alpha\theta.}$$

$$\text{Επειδή για}\ \ r = R \quad u_x = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma\tau\alpha\theta. = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}R^2} \Rightarrow \boxed{u_x(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}(r^2 - R^2)}$$

- *Κατανομή ταχύτητας* παραβολική – Ροή Poiseuille
- $\Gamma\iota\alpha\ r = 0 \Rightarrow u_x(r) = u_{max} = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}R^2 \quad \Rightarrow \boxed{u_x(r) = u_{max}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}$

Ποια η φορά ροής ?

$$u_{max}\ \theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\eta} \Rightarrow \frac{dp}{dx} < 0 \Rightarrow$$

η πίεση ελαττώνεται κατά τον άξονα x

→ το ρευστό ρέει από την υψηλή προς τη χαμηλή πίεση

Υπολογισμός της μέσης ταχύτητας

Ως γνωστό ισχύει ότι: $\overline{u} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{1}{A}\int\int_A (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\,dA.$

Έτσι έχουμε: $\overline{u} = \dfrac{\int_o^R u_x(r)2\pi r\ dr}{\pi R^2} = \dfrac{\int_o^R u_{max}\,(1-\dfrac{r^2}{R^2})\,2\pi r\ \mathrm{dr}}{\pi R^2} = \dfrac{u_{max}}{2}$

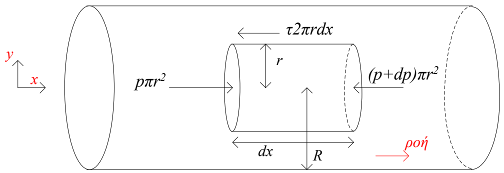
$$u_{max} = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}R^2 \qquad \overline{u} = -\frac{1}{8\mu}\frac{dp}{dx}R^2 \Rightarrow \Delta p = \frac{8\mu L\overline{u}}{R^2},$$

όπου: L είναι το μήκος του αγωγού και Δp η πτώση πίεσης σε μήκος L.

Αν αντί της μέσης ταχύτητας χρησιμοποιηθεί η ογκομετρική παροχή ..

$$\Delta p = \frac{8\mu L\dot{V}}{\pi R^4} = \frac{128\mu L\dot{V}}{\pi d^4}$$

Υπολογισμός διατμητικής τάσης



$$p\pi r^2 - (p+dp)\pi r^2 - \tau 2\pi r dx = 0 \;\Rightarrow \tau = -\frac{r}{2}\frac{dp}{dx} \Rightarrow \tau = \frac{\Delta p}{2L} r$$

η διατμητική τάση είναι γραμμική συνάρτηση της ακτίνας και η μέγιστη τιμή της είναι στα τοιχώματα του αγωγού

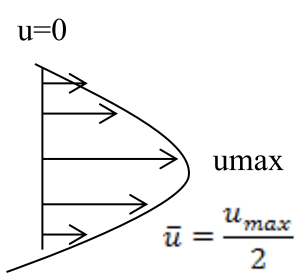
$$\tau_0 = \frac{\Delta p}{2L} r$$

Υπολογισμός Συντελεστού Διόρθωσης Κινητικής Ενέργειας

$$\alpha = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{u}{\bar{u}}\right)^3 dA = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \left[2\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\right]^3 d(\pi r^2) = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \left(2-2\frac{r^2}{R^2}\right)^3 2\pi r dr = 2$$

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{u}{u_{max}/2} = 2\frac{u}{u_{max}} = 2\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

Συμπέρασμα

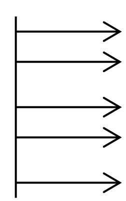


Στρωτή Μόνιμη ροή

$$E_{\kappa\iota\nu} = \left(\frac{1}{2}\bar{u}^2\right)\cdot a$$

$$a = 2$$

Ομοιόμορφη ροή



$$u = \bar{u}$$

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\bar{u}^2$$

Η $E_{\kappa\iota\nu}$ της στρωτής ροής είναι 2-πλάσια της $E_{\kappa\iota\nu}$ της ομοιόμορφης ροής της ίδιας μέσης ταχύτητας

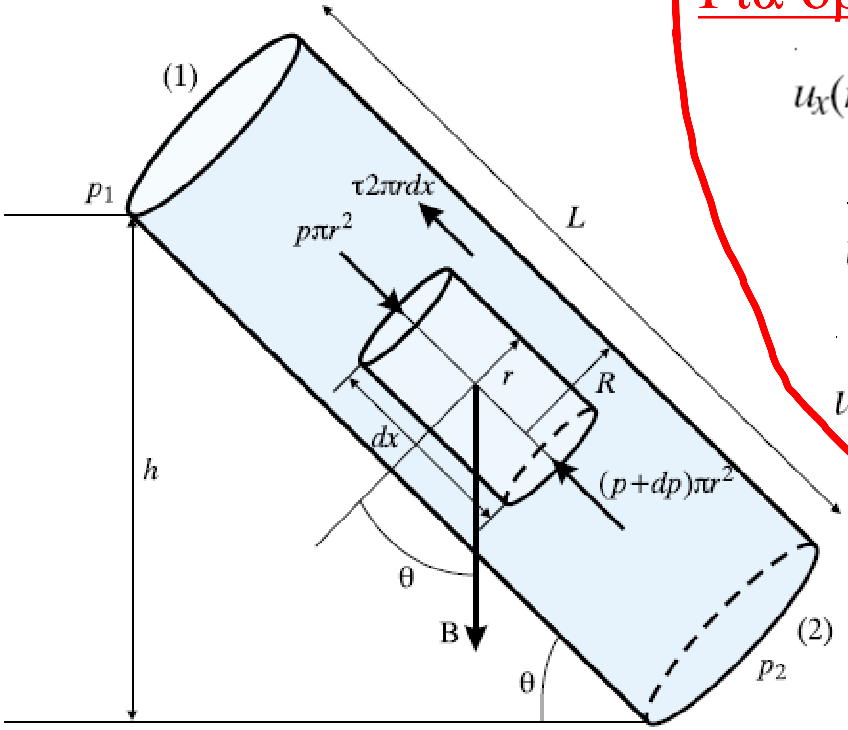
Παράδειγμα 6.1

Στον αγωγό του Σχήματος ρέει ρευστό σε συνθήκες μόνιμης ροής. Να υπολογισθούν: α) Η κατανομή ταχυτήτων στον αγωγό, β) Η φορά ροής αν, $p_1=200$ kPa, $p_2=300$ kPa, $L=10$ m, $h=6$ m, $d=10$ mm και $\gamma=8000$ N/m^3.

$$u(r) = \frac{r^2-R^2}{4\mu}\,\frac{d(p+\gamma h)}{dx}$$

$$u(0) = u_{max} = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{d(p+\gamma h)}{dx}$$

$$u(r) = u_{max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$



Για οριζόντιο αγωγό

$$u_x(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}\left(r^2-R^2\right)$$

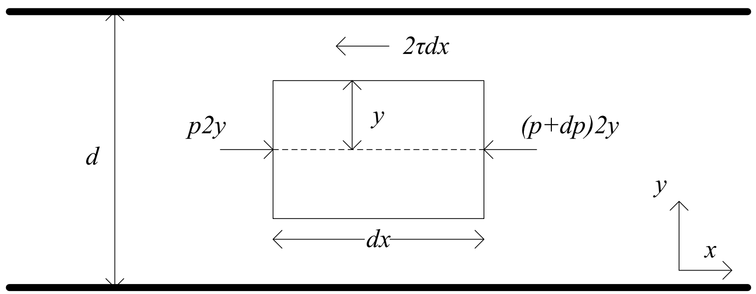
$$u_{max} = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}R^2$$

$$u_x(r) = u_{max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

Αναφέρεται σε κεκλιμένο αγωγό και επιδρά και συνιστώσα του βάρους του ρευστού.

Στις σχέσεις που εμφανίζεται **dp** αυτό γίνεται **d(p+γh).**

Στρωτή ροή μεταξύ δύο παράλληλων πλακών



Ροή ρευστού μεταξύ δύο παράλληλων πλακών μεγάλου μήκους που απέχουν απόσταση d.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 2py - 2(p+dp)y - 2\tau dx = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow py - py - ydp - \tau dx = 0 \Rightarrow \\ &\tau = -\mu \frac{du_x}{dy} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad du_x = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} y dy \Rightarrow$$

$$\int du_x = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\int y dy \Rightarrow$$

$$u_x = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2 + \sigma\tau\alpha\theta.$$

Παραβολοειδής μεταβολή της ταχύτητας με την απόσταση

$$\Gamma\iota\alpha\ y = \frac{d}{2}, u_x = 0 \Rightarrow u_x = 0 = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\frac{d^2}{4} + \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \boxed{\sigma\tau\alpha\theta. = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\frac{d^2}{4}}$$

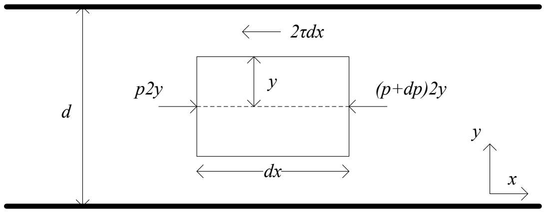
$$\Rightarrow \boxed{u_x = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(y^2 - \frac{d^2}{4}\right)}$$

$$\Gamma\iota\alpha\ y = 0 \Rightarrow u_{max} = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\frac{d^2}{4}$$

$$u_x = u_{max}\left[1 - \frac{y^2}{\left({d}/{2}\right)^2}\right]$$

Στρωτή ροή μεταξύ δύο παράλληλων πλακών

Η **ογκομετρική ροή** ανά μονάδα πλάτους z μπορεί να υπολογισθεί αν θεωρήσουμε στοιχειώδες στρώμα ρευστού πάχους dy σε απόσταση y από το επίπεδο συμμετρίας των δύο πλακών, και ολοκληρώσουμε μέχρι τη μία πλάκα και διπλασιάζουμε ταυτόχρονα. Δηλαδή:



$$\dot{V} = \int_A \vec{u}_x d\vec{A} \Rightarrow \dot{V} = 2\int_0^{d/2} u_x dy$$

$$\frac{\dot{V}}{z} = 2\int_0^{d/2} u_x\, dy = 2\int_0^{d/2} \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right) dy \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{V}}{z} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\left(\frac{d^3}{8} - \frac{d^3}{24}\right) = \frac{dp}{dx}\frac{d^3}{12\mu}$$

$$\bar{u} = \frac{\frac{\dot{V}}{z}}{d} = \frac{\frac{dp}{dx}\frac{d^3}{12\mu}}{d} = \frac{dp}{dx}\frac{d^2}{12\mu}$$

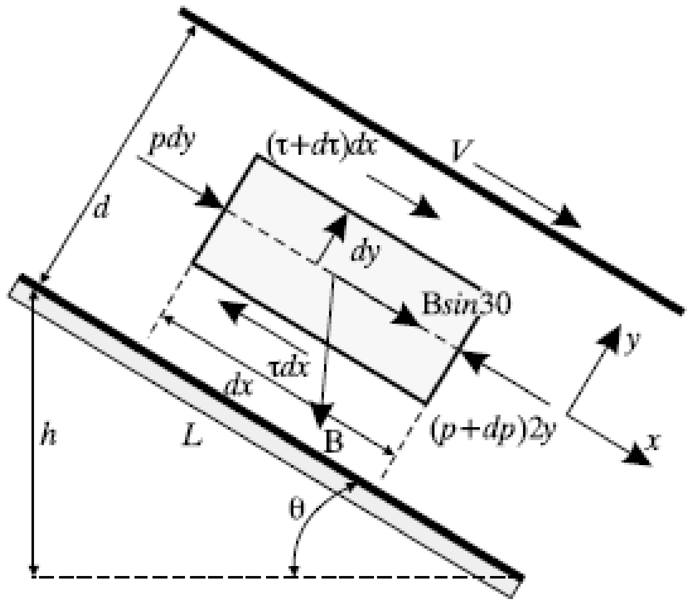
$$u_{max} = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\frac{d^2}{4}$$

$$u_{\max}(\mu\varepsilon\tau\alpha\xi\acute{\upsilon}\_\pi\lambda\alpha\kappa\acute{\omega}\nu) = 1{,}5\bar{u}$$

$$u_{\max}(\sigma\varepsilon\_\alpha\gamma\omega\gamma\acute{o}) = 2\bar{u}$$

Παράδειγμα 6.2

Να υπολογισθεί η κατανομή ταχύτητας μεταξύ των δύο πλακών του Σχήματος. Η μία πλάκα είναι ακίνητη και η άλλη κινείται με σταθερή ταχύτητα V.



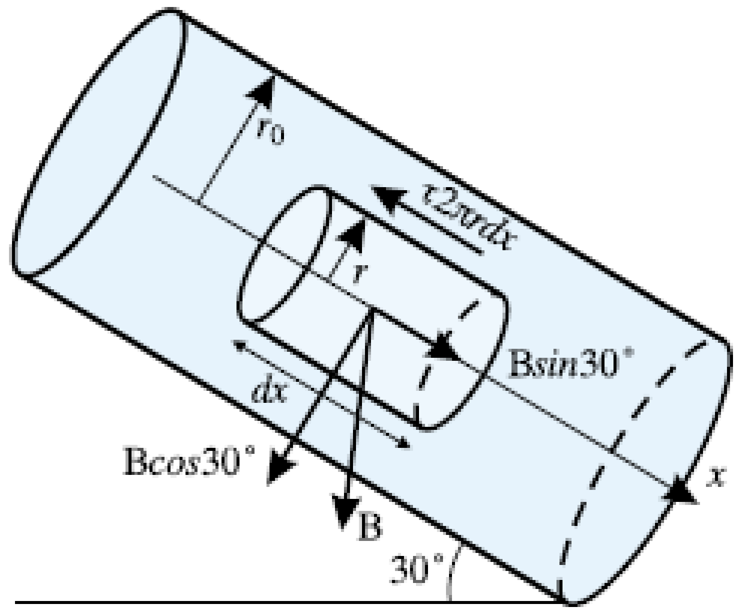
Άρα η κατανομή ταχύτητα δίνεται ως,

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{d\ (p + \gamma h)}{dx}(y^2 - dy) + \frac{V}{d}y$$

Αν οι πλάκες είναι οριζόντιες τότε η εξίσωση γίνεται, $u(y) = \frac{V}{d}y$, που είναι η γνωστή **ροή Couette**.

Παράδειγμα 6.3

Υγρό, υψηλού ιξώδους μ ρέει σε αγωγό μικρής διαμέτρου, όπως στο Σχήμα. Αν υποθέσουμε πλήρως αναπτυγμένη στρωτή ροή και $\Delta p = 0$, να βρεθούν: α) Η διαφορική εξίσωση της ροής αν το ρευστό κινείται υπό την επίδραση του βάρους του, β) Την κατανομή ταχυτήτων, γ) Να υπολογίσετε το μ σαν συνάρτηση της ογκομετρικής παροχής $\dot{V}$.



$$\mu = \frac{\pi \rho g r_o^4}{16 \dot{V}}$$

Πειραματικός υπολογισμός του ιξώδους

Τυρβώδης ροή

- Όχι μόνιμη ροή, τροχιές των σωματιδίων του ρευστού: τυχαίες

- Δημιουργία στροβίλων, άρα:
  - αύξηση ανταλλαγής ορμής και στις 3 διευθύνσεις
  - τυχαία μεταβολή ταχύτητας ($υ_Χ$, $υ_ψ$, $υ_Ζ \neq 0$)
  - αύξηση της διατμητικής τάσης

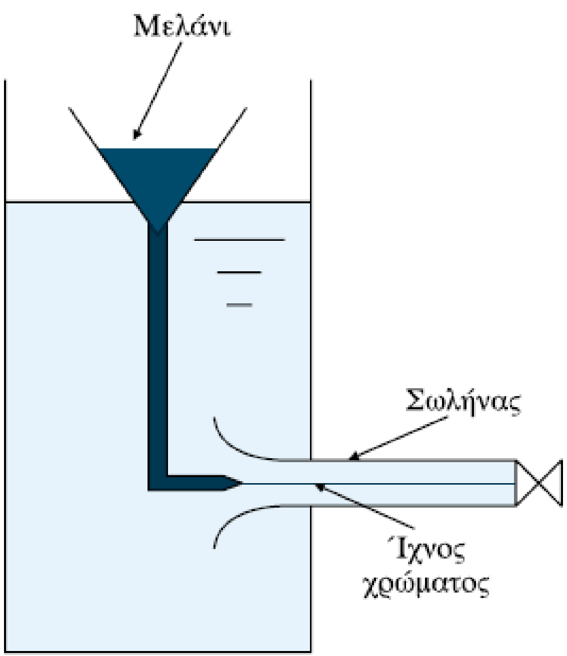
- Η στιγμιαία ταχύτητα δεν έχει καμιά πρακτική σημασία

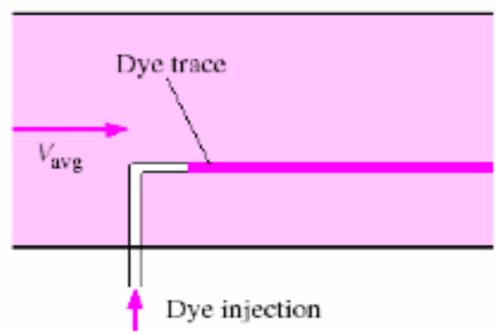
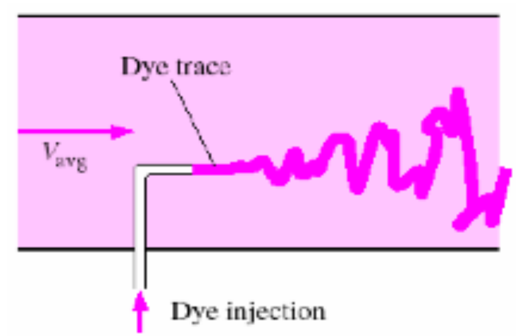
- Μέση ταχύτητα $$u_x = \frac{1}{T}\int_0^T u_x(t)\,dt$$

  (Τ: χρόνος τέτοιας τιμής ώστε να εξουδετερώνει την εξάρτηση της ταχύτητας από το χρόνο)

  - Η μέση ταχύτητα έχει τη διεύθυνση του άξονα του αγωγού
  - Η κατανομή ταχυτήτων είναι συμμετρική ως προς τον άξονα του αγωγού
  - Η ταχύτητα στα τοιχώματα του αγωγού είναι μηδέν

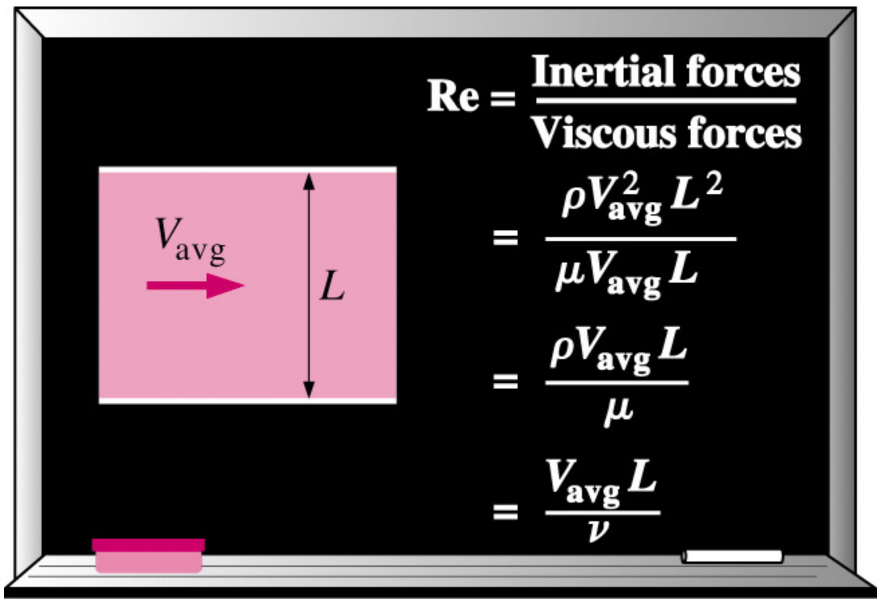
Laminar and Turbulent Flows



Laminar Flow	**Turbulent Flow**
Can be steady or unsteady. (Steady means that the flow field at any instant in time is the same as at any other instant in time.)	Is always *unsteady*. Why? There are always random, swirling motions (vortices or eddies) in a turbulent flow. *Note*: However, a turbulent flow can be steady *in the mean*. We call this a *stationary turbulent flow*.
Can be one-, two-, or three-dimensional.	Is always *three-dimensional*. Why? Again because of the random swirling eddies, which are in all directions. *Note*: However, a turbulent flow can be 1-D or 2-D *in the mean*.
Has regular, *predictable* behavior	Has irregular or *chaotic* behavior (cannot predict exactly – there is some randomness associated with any turbulent flow.
	
Analytical solutions are possible (see Chapter 9).	No analytical solutions exist! (It is too complicated, again because of the 3-D, unsteady, chaotic swirling eddies.)
Occurs at *low* Reynolds numbers.	Occurs at *high* Reynolds numbers.

Laminar and Turbulent Flows

Definition of Reynolds number

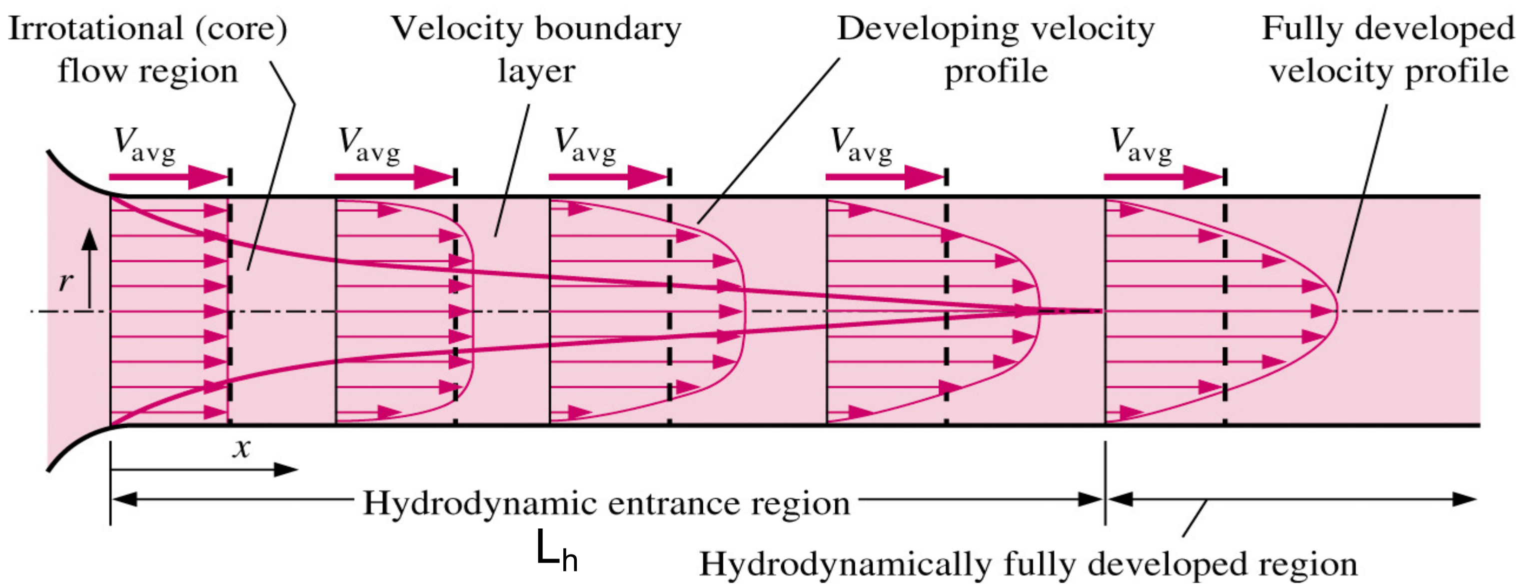


- Critical Reynolds number (Re_{cr}) for flow in a round pipe
  - $Re < 2300 \Rightarrow$ laminar
  - $2300 \leq Re \leq 4000 \Rightarrow$ transitional
  - $Re > 4000 \Rightarrow$ turbulent
- These values are approximate
- For a given application, Re_{cr} depends upon
  - Pipe roughness
  - Vibrations
  - Upstream fluctuations, disturbances (valves, elbows, etc. that may disturb the flow)

Περιοχή εισόδου (Entrance Region or entry length)

- Consider a round pipe of diameter D. The flow can be laminar or turbulent. In either case, the profile develops downstream over several diameters called the *entry length L_h*

- L_h/D is a function of Re.



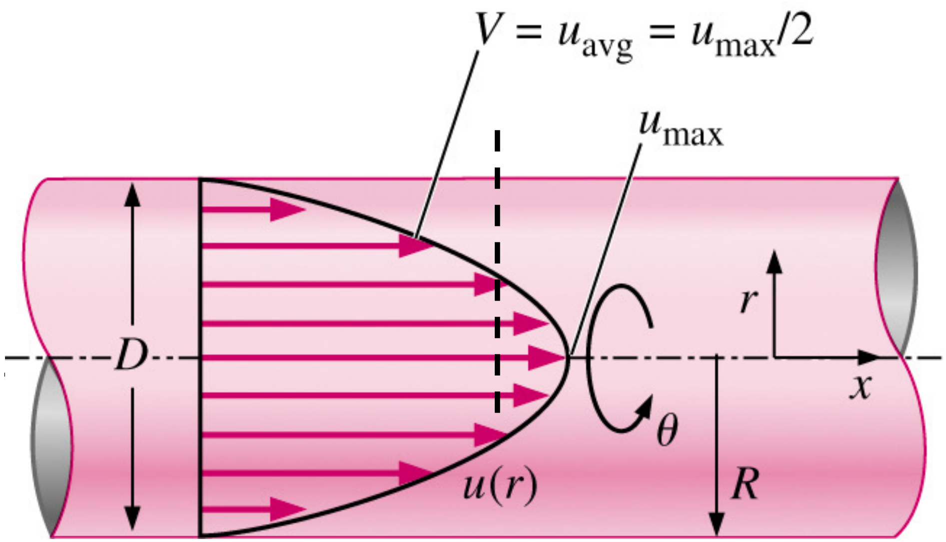
Πλήρως ανεπτυγμένη ροή (Fully Developed Pipe Flow)

- Comparison of laminar and turbulent flow

  There are some major differences between laminar and turbulent fully developed pipe flows

Laminar

- Can solve exactly
- Flow is steady
- Velocity profile is parabolic
- Pipe roughness not important

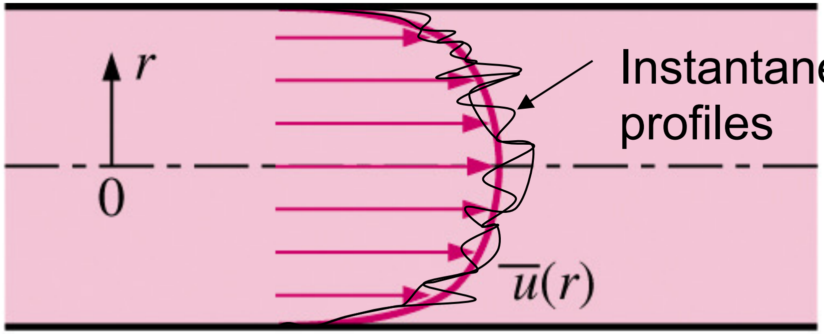


It turns out that $V_{avg} = 1/2U_{max}$ and $u(r)= 2V_{avg}(1 - r^2/R^2)$

Πλήρως ανεπτυγμένη ροή (Fully Developed Pipe Flow)

Turbulent

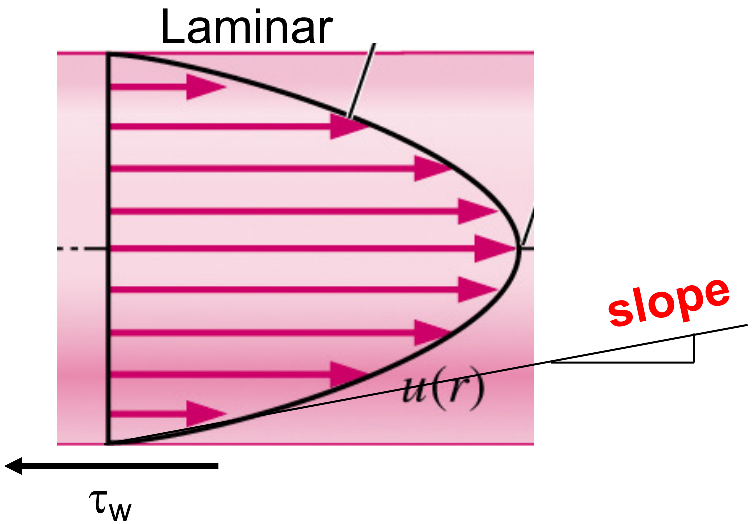
- *Cannot* solve exactly (too complex)
- Flow is unsteady (3D swirling eddies), but it is steady in the mean
- Mean velocity profile is fuller (shape more like a top-hat profile, with very sharp slope at the wall)
- Pipe roughness is very important

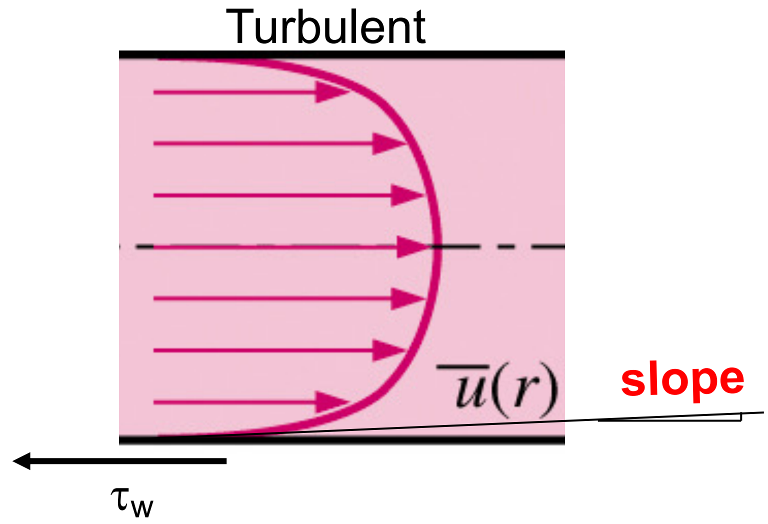


- V_{avg} 85% of U_{max} (depends on Re a bit)
- No analytical solution, but there are some good semi-empirical expressions that approximate the velocity profile shape.
  - Logarithmic law
  - Power law

Πλήρως ανεπτυγμένη ροή (Fully Developed Pipe Flow) Διατμητική τάση (Wall-shear stress

- Recall, for simple shear flows *u=u(y)*, we had $\tau = \mu du/dy$
- In fully developed pipe flow, it turns out that $\tau = \mu du/dr$





τ_w = shear stress at the wall, acting on the fluid

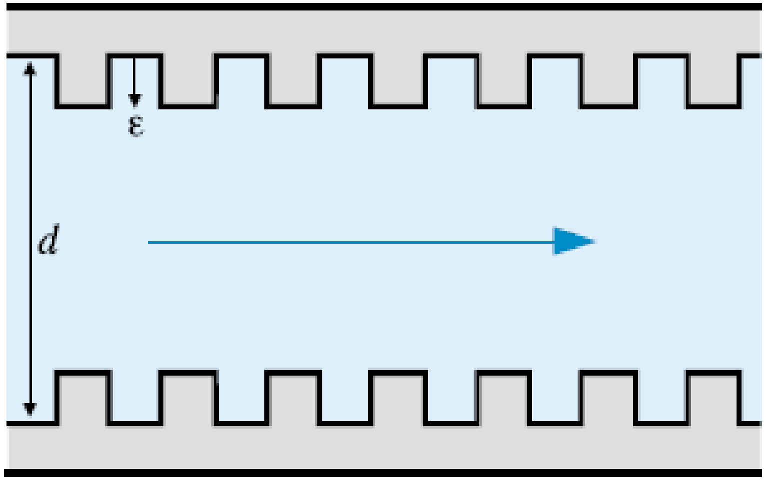
$\boxed{\tau_{w,turb} > \tau_{w,lam}}$

Απώλειες ενέργειας κατά τη ροή

- Υπολογισμός σε ύψος στήλης ρέοντος ρευστού h, λόγω εσωτερικής τριβής κατά τη διάρκεια της ροής

- Υπολογισμός απαραίτητος για τον υπολογισμό της κατάλληλης ισχύος αντλίας

- Απώλειες ενέργειας συνάρτηση των
  - **u**: ταχύτητας ρευστού
  - **μ**: ιξώδους ρευστού
  - **ρ**: πυκνότητας ρευστού
  - **d**: διαμέτρου αγωγού
  - **L**: μήκους αγωγού
  - **ε**: τραχύτητας αγωγού (διαστάσεις μήκους)



Τραχύτητες διαφόρων υλικών

Υλικό	Κατάσταση τοιχώματος (mm)	Τραχύτητα ε
Χαλυβδοσωλήνες χωρίς ραφή	Τοίχωμα εξελασμένο Καθαρισμένο με οξέα Επιψευδαργυρωμένο	0,02 - 0,06 0,03 - 0,04 0,07 - 0,05
Χυτοσίδηρος	Ασφαλτωμένο Σκουριασμένο Με επικαθήσεις	0,1 - 0,13 1,0 - 1,5 1,5 - 3,0
Χαλυβδοσωλήνες με ραφή	Τοίχωμα εξελασμένο Ασφαλτωμένο Γαλβανισμένο	0,04 - 0,1 0,01 - 0,05 0,008
Αγωγοί αποχέτευσης από κεραμικό	Εμπορίου	0,07
Ασφαλτωμένος χυτοσίδηρος	0,0048	0,012
Πέτρινο ή βραχώδες τοίχωμα		80 - 1000
Ξύλο	Λείο	0,9 - 1,83
Μεταχειρισμένοι χαλυβδοσωλήνες	Ομοιόμορφη σκουριά Πολλές επικαθίσεις	0,15 2 - 4
Σκυρόδεμα	Λεία τοιχώματα τραχέα τοιχώματα Μετά από πολυετή χρήση νερού	0,3 - 0,8 2,0 - 3,0 0,2 - 0,3
Σωλήνας Πολυαιθυλαινίου	Καινούργιο	0,01
Σωλήνες από χαλκό, μπρούτζο, ελαφριά μέταλλα	Καινούργιο, λείο	0,0013 - 0,0015
Ελαστικός σωλήνας	Καινούργιο	0,0016
Εμπορικός χάλυβας ή σίδηρος	0,0018	0,046

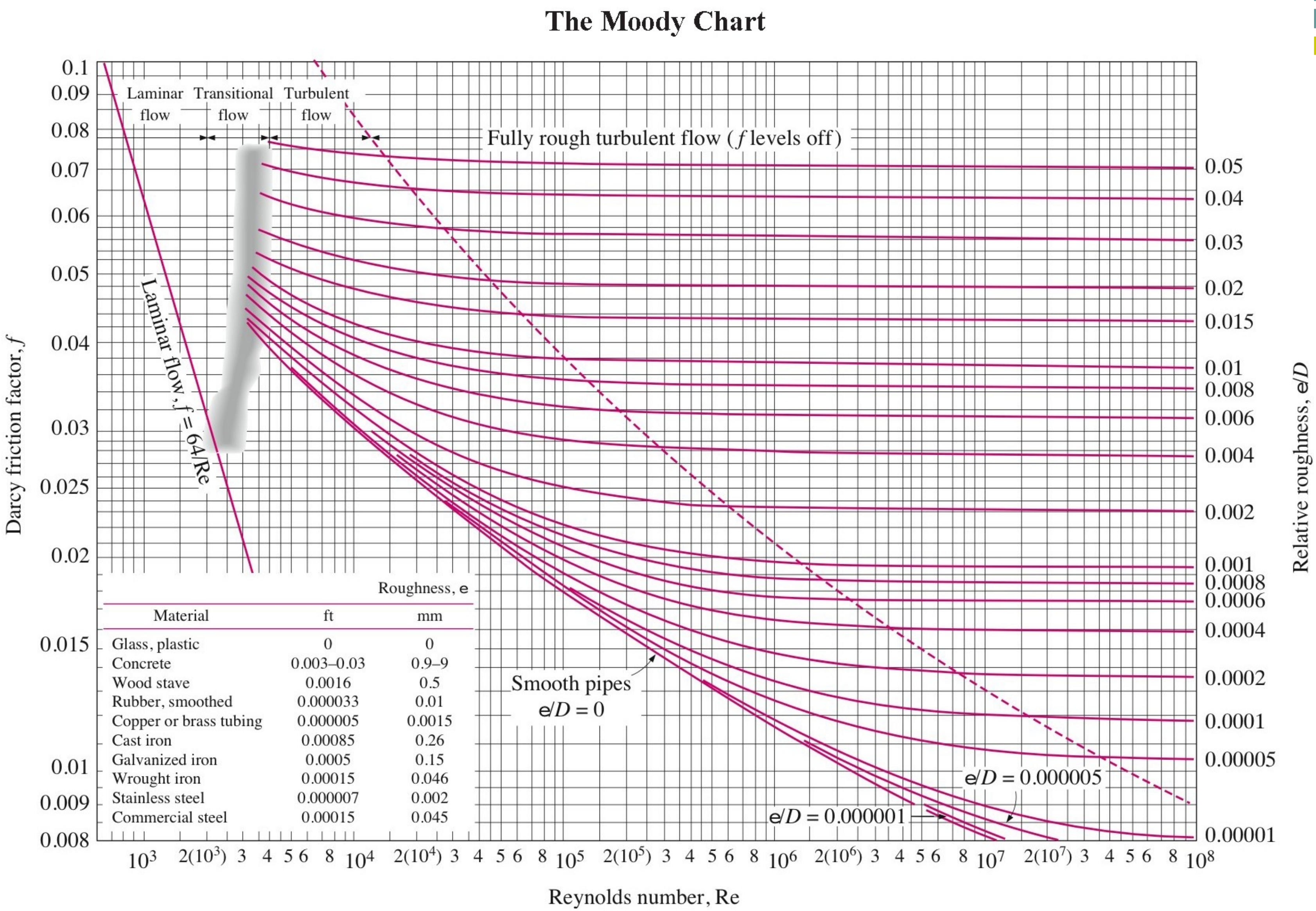
Απώλειες ενέργειας κατά τη ροή

$$\begin{bmatrix} \text{Ύψος} \\ \text{Απωλειών}\,(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Συντελεστής} \\ \text{Τριβής}\,(f) \end{bmatrix} \times \left[\frac{\text{μήκος}, L(m)}{\text{διάμετρος}, d\,(m)} \right] \times \begin{bmatrix} \text{Ύψος} \\ \text{κινητικής} \\ \text{ενέργειας}, (u^2/2g)(m) \end{bmatrix} (1)$$

(Σχέση Darcy-Weisbach) $h_L = \dfrac{\Delta P}{\gamma} = f \dfrac{L}{d} \dfrac{\bar{u}^2}{2g} = f \dfrac{8 L \dot{V}^2}{d^5 \pi^2 g},$

όπου f είναι ο συντελεστής τριβής Moody και $\bar{u} = \dfrac{4\dot{V}}{\pi d^2}.$

Διάγραμμα Moody
Εύρεση του Συντελεστή τριβής για ροή σε αγωγό



	Roughness, e	
Material	ft	mm
Glass, plastic	0	0
Concrete	0.003–0.03	0.9–9
Wood stave	0.0016	0.5
Rubber, smoothed	0.000033	0.01
Copper or brass tubing	0.000005	0.0015
Cast iron	0.00085	0.26
Galvanized iron	0.0005	0.15
Wrought iron	0.00015	0.046
Stainless steel	0.000007	0.002
Commercial steel	0.00015	0.045

Χαρακτηριστικά διαγράμματος Moody

- Για μικρούς αριθμούς Reynolds, οπότε η ροή είναι στρωτή, ο συντελεστής τριβής είναι ανεξάρτητος της σχετικής τραχύτητας του αγωγού και το διάγραμμα είναι ευθεία γραμμή.
- Για αριθμούς Reynolds > 3000, εφόσον έχουμε τυρβώδη ροή, ο συντελεστής τριβής εξαρτάται από τη σχετική τραχύτητα και μάλιστα όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός Reynolds τόσο μεγαλύτερη επίδραση έχει η σχετική τραχύτητα.
- Για αριθμούς Reynolds μεταξύ 2000 και 3000 έχουμε μεταβατική περιοχή και τα αποτελέσματα της πτώσης πίεσης δεν είναι επαναλήψιμα.
- Για πολύ μεγάλους αριθμούς Reynolds ο συντελεστής τριβής δεν εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds.

- **Λείοι αγωγοί, Re>3000, τυρβώδης ροή.**

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0{,}86 \ln(\mathrm{Re}\sqrt{f}) - 0{,}8 \tag{6.36.α}$$

Σε περίπτωση που οι αγωγοί είναι λείοι και $2{,}5\times10^3<\mathrm{Re}<10^5$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την **εξίσωση Blasius**

$$f = \frac{0{,}316}{\mathrm{Re}^{0{,}25}} \tag{6.36.β}$$

Για αριθμούς Reynolds $2{,}5\times10^3<\mathrm{Re}<10^7$ μπορεί να εφαρμοσθεί η εξίσωση

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2{,}5 \ln(\mathrm{Re}\sqrt{f}) + 0{,}3 \tag{6.36.γ}$$

- **Μη λείοι αγωγοί, τυρβώδης ροή**

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}5 \ln\left(0{,}27\frac{\varepsilon}{d} + 0{,}885\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{\sqrt{f}}\right) \tag{6.36.δ}$$

- **Πλήρως Τυρβώδης Ροή**

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0{,}86 \ln\frac{e}{3{,}7d} \tag{6.37}$$

- **Πλήρως Τυρβώδης Ροή, Re>4000 (εξίσωση Colebrook)**

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0{,}80 \ln\left(\frac{e}{3{,}7d} + \frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right), \tag{6.38}$$

όπου, d είναι η διάμετρος του αγωγού.

- **Στρωτή Ροή σε οποιοδήποτε κυκλικό αγωγό με Re<2000**

$$f = \frac{64}{\mathrm{Re}} \tag{6.39}$$

Άλλες εξισώσεις

Απώλειες ενέργειας για τη στρωτή ροή

Για στρωτή ροή επειδή $f = \dfrac{64}{\mathrm{Re}}$ (2), $h_L = \dfrac{64}{\mathrm{Re}} \cdot \dfrac{L}{D} \cdot \dfrac{u^2}{2g}$ (3), $\mathrm{Re} = \dfrac{du\rho}{\mu}$ (4)

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει η σχέση

$$h_L = \frac{32\mu L\bar{u}}{\rho d^2 g} \quad (5)$$ **(εξίσωση Hagen-Poiseuille)**

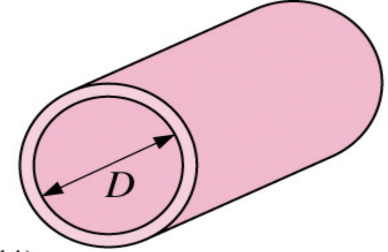
Από την σχέση (5) και την σχέση $h_L = \dfrac{\Delta p}{\gamma}$ (6) προκύπτει τελικά

$$\Delta p = 32\frac{\mu L}{d^2}\bar{u}$$

Δηλαδή, οι απώλειες ύψους και η πτώση πίεσης λόγω τριβών είναι ανάλογες της μέσης ταχύτητας του ρευστού.

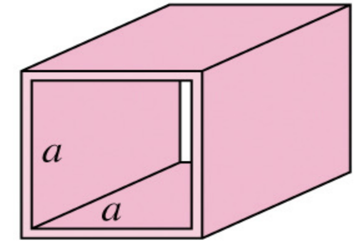
Υδραυλική διάμετρος

Circular tube:



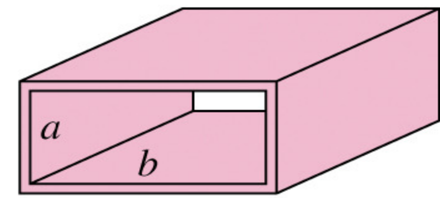
$$D_h = \frac{4(\pi D^2/4)}{\pi D} = D$$

Square duct:



$$D_h = \frac{4a^2}{4a} = a$$

Rectangular duct:

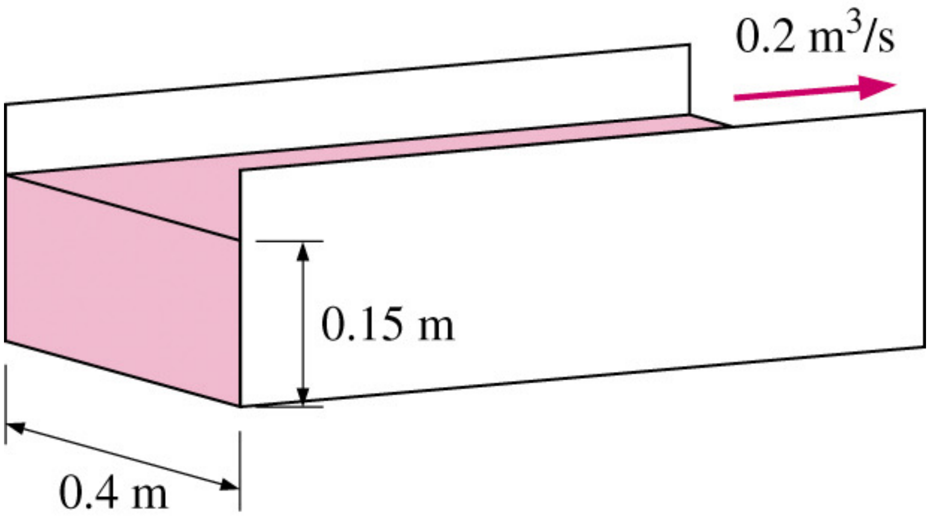


$$D_h = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$$

Μέχρι τώρα αναφερόμαστε σε αγωγούς κυκλικής διατομής. Αν ο αγωγός έχει άλλη μορφή τότε μπορούμε να χρησιμοποιούμε τους ίδιους τύπους, αρκεί αντί της διαμέτρου d να χρησιμοποιούμε την **υδραυλική διάμετρο, d_h.** Ως υδραυλική διάμετρος ορίζεται το τετραπλάσιο της διατομής του αγωγού δια της περιμέτρου του αγωγού που διαβρέχεται από το ρευστό $d_h = 4\,A/P$ π.χ. για αγωγό ορθογωνικής διατομής διαστάσεων a και b ή υδραυλική διάμετρος είναι $d_h = 2ab/(a+b)$ και για ομόκεντρο δακτύλιο διαμέτρων d_2 και d_1 η υδραυλική διάμετρος είναι $d_h = d_2 - d_1$.

Υδραυλική διάμετρος

- For non-round pipes, define the hydraulic diameter
  $D_h = 4A_c/P$
  A_c = cross-section area
  P = wetted perimeter



- Example: open channel
  $A_c = 0.15 * 0.4 = 0.06 m^2$
  $P = 0.15 + 0.15 + 0.4 = 0.7 m$
  Δεν υπολογίζεται η ελεύθερη επιφάνεια αφού δε συνεισφέρει στις τριβές κατά μήκος της ροής μέσα στον αγωγό

  $D_h = 4A_c/P = 4*0.06/0.7 = 0.34 m$

  Σημασία Η συγκεκριμένη ροή σε ανοικτό αγωγό είναι ισοδύναμη με ροή σε κλειστό αγωγό διαμέτρου 0.34 m

Fully Developed Pipe Flow Friction Factor

- Moody chart was developed for circular pipes, but can be used for non-circular pipes using hydraulic diameter

- Colebrook equation is a curve-fit of the data which is convenient for computations

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right)$$

- Both Moody chart and Colebrook equation are accurate to ±15% due to roughness size, experimental error, curve fitting of data, etc.

Προβλήματα με αγωγούς

Με τον όρο απλά προβλήματα με αγωγούς δηλώνουμε προβλήματα στα οποία οι απώλειες στους αγωγούς είναι και οι μόνες απώλειες που λαμβάνονται υπ' όψιν. Ο αγωγός μπορεί να είναι οριζόντιος ή να σχηματίζει γωνία με το οριζόντιο επίπεδο. Σε κάθε πρόβλημα ροής ασυμπίεστου ρευστού σε αγωγό υπάρχουν οι εξής μεταβλητές:

- Ογκομετρική παροχή $\dot{V}$.
- Μήκος αγωγού L.
- Διάμετρος αγωγού d.
- Απώλεια ύψους λόγω τριβών h_L.
- Ιξώδες, μ, ή κινηματικό ιξώδες ν.
- Τραχύτητα ε.

Προβλήματα με αγωγούς

Γενικά, τα μεγέθη μήκος, διάμετρος αγωγού, ιξώδες, ή κινηματικό ιξώδες, και τραχύτητα του αγωγού δίνονται ή βρίσκονται από πίνακες ή διαγράμματα. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι τα προβλήματα με αγωγούς είναι τριών ειδών, όπως φαίνεται και στον πίνακα που ακολουθεί.

Είδος	Δεδομένα	Ζητούμενα
I	$\dot{V}, L, d, \nu, \varepsilon$	h_L
II	$h_L, L, d, \nu, \varepsilon$	$\dot{V}$
III	$\dot{V}, h_L, L, \nu, \varepsilon$	d

Σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις η λύση του προβλήματος γίνεται με τη χρησιμοποίηση της εξίσωσης συνεχείας, του διαγράμματος Moody, της εξίσωσης Darcy-Weisbach και πιθανόν της εξίσωσης της ενέργειας. Θα εξετάσουμε παρακάτω τα τρία είδη προβλημάτων ξεχωριστά.

Υπολογισμός των απωλειών ύψους h_L

Η περίπτωση αυτή είναι και η ευκολότερη, επειδή η εφαρμογή των τύπων που έχουμε παραθέσει είναι άμεση δηλαδή υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds, Re και τη σχετική τραχύτητα ε/d άμεσα. Από το διάγραμμα Moody βρίσκουμε το συντελεστή τριβής f και από την εξίσωση Darcy-Weisbach υπολογίζουμε τη ζητούμενη απώλεια ύψους h_L.

Παράδειγμα 6.4

Αντλία τροφοδοτεί με νερό δεξαμενή μέσω οριζόντιου χαλύβδινου αγωγού μήκους $L=\cancel{30}$ m και διαμέτρου $d=25$ mm. Η παροχή είναι 1250 cm^3/s. Το ιξώδες του νερού είναι $\mu=1300\times10^{-6}$N s/m^2 και η πυκνότητά του $\varrho=1000$ kgr/m^3. Να βρεθεί η απώλεια ύψους στον αγωγό.

Υλικό	Κατάσταση τοιχώματος (mm)	Τραχύτητα ε
Χαλυβδοσωλήνες χωρίς ραφή	Τοίχωμα εξελασμένο Καθαρισμένο με οξέα Επιψευδαργυρωμένο	0,02 - 0,06 0,03 - 0,04 0,07 - 0,05
Χυτοσίδηρος	Ασφαλτωμένο Σκουριασμένο Με επικαθήσεις	0,1 - 0,13 1,0 - 1,5 1,5 - 3,0
Χαλυβδοσωλήνες με ραφή	Τοίχωμα εξελασμένο Ασφαλτωμένο Γαλβανισμένο	0,04 - 0,1 0,01 - 0,05 0,008
Αγωγοί αποχέτευσης από κεραμικό	Εμπορίου	0,07
Ασφαλτωμένος χυτοσίδηρος	0,0048	0,012
Πέτρινο ή βραχώδες τοίχωμα		80 - 1000
Ξύλο	Λείο	0,9 - 1,83
Μεταχειρισμένοι χαλυβδοσωλήνες	Ομοιόμορφη σκουριά Πολλές επικαθίσεις	0,15 2 - 4
Σκυρόδεμα	Λεία τοιχώματα τραχέα τοιχώματα Μετά από πολυετή χρήση νερού	0,3 - 0,8 2,0 - 3,0 0,2 - 0,3
Σωλήνας Πολυαιθυλαινίου	Καινούργιο	0,01
Σωλήνες από χαλκό, μπρούτζο, ελαφριά μέταλλα	Καινούργιο, λείο	0,0013 - 0,0015
Ελαστικός σωλήνας	Καινούργιο	0,0016
Εμπορικός χάλυβας ή σίδηρος	0,0018	0,046

Λύση

Υπολογίζουμε τη μέση ταχύτητα $\bar{u}$ και τον αριθμό Reynolds Re:

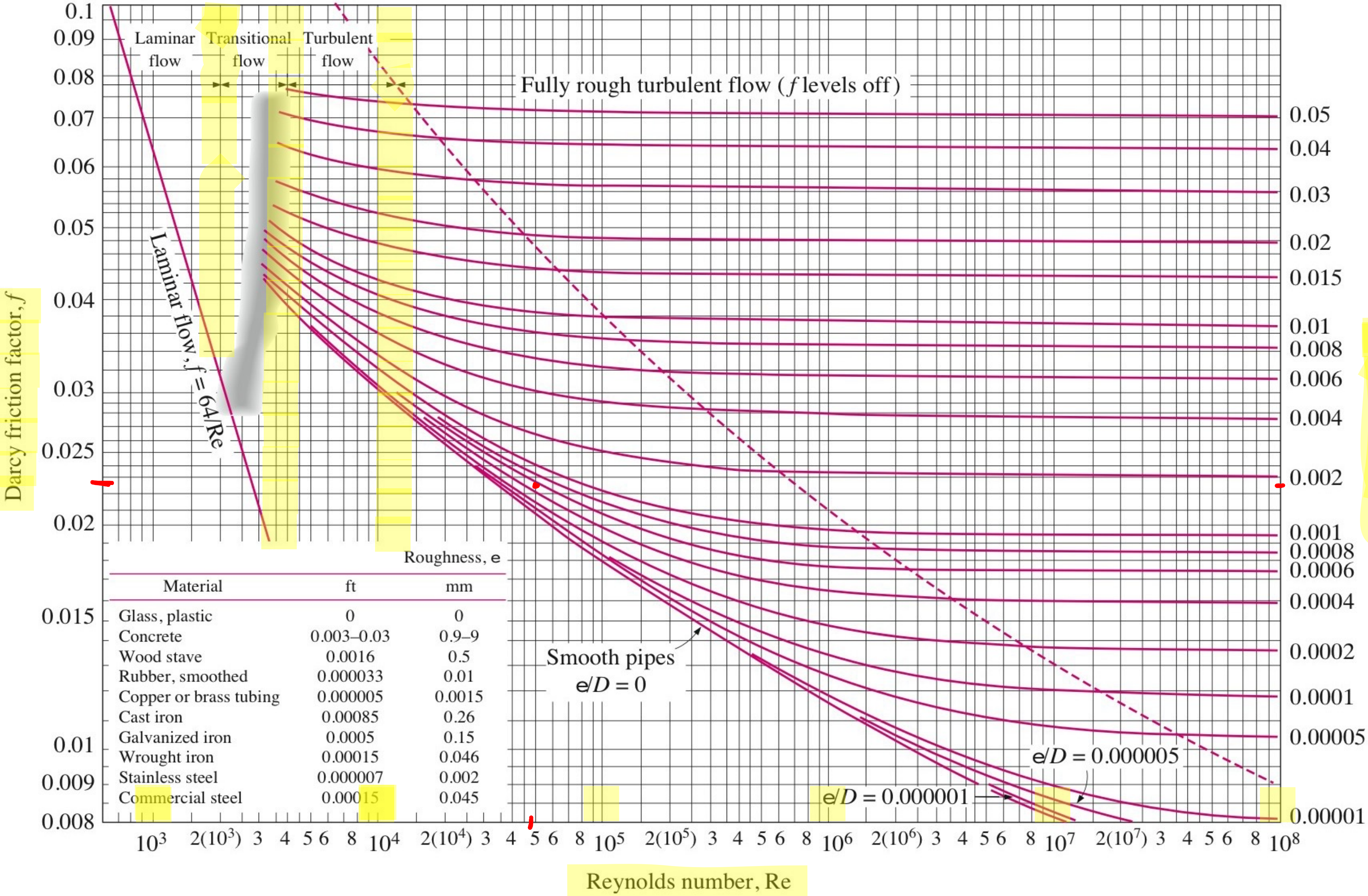
$$\bar{u}=\frac{\dot{V}}{\pi\frac{d^2}{4}}=\frac{4\times1250\times10^{-6}}{3{,}14\times(25\times10^{-3})^2}=2{,}54\text{ m/s},$$

$$\mathrm{Re}=\frac{d\bar{u}\varrho}{\mu}=\frac{25\times10^{-3}\times2{,}54\times1000}{1300\times10^{-6}}=48900$$

Για τον χαλύβδινο αγωγό βρίσκουμε $\varepsilon=0{,}046$ mm. Άρα $\varepsilon/d=0{,}0018$. Από το διάγραμμα Moody για $\mathrm{Re}=48900$ και $\varepsilon/d=0{,}0018$ βρίσκουμε $f=0{,}027$. Έτσι η απώλεια ύψους θα είναι:

$$h_L=f\frac{L}{d}\frac{\bar{u}^2}{2g}=0{,}027\times\frac{12}{0{,}025}\times\frac{2{,}54^2}{2\times9{,}8}=4{,}26\text{ m}$$

The Moody Chart



Material	Roughness, e ft	Roughness, e mm
Glass, plastic	0	0
Concrete	0.003–0.03	0.9–9
Wood stave	0.0016	0.5
Rubber, smoothed	0.000033	0.01
Copper or brass tubing	0.000005	0.0015
Cast iron	0.00085	0.26
Galvanized iron	0.0005	0.15
Wrought iron	0.00015	0.046
Stainless steel	0.000007	0.002
Commercial steel	0.00015	0.045

Υπολογισμός της παροχής

Σ' αυτήν την περίπτωση η μέση ταχύτητα $\bar{u}$ και ο συντελεστής τριβής f, που εξαρτάται από την ταχύτητα, είναι άγνωστοι. Έτσι, υποθέτουμε μία τιμή για το συντελεστή τριβής, οπότε από την εξίσωση Darcy-Weisbach υπολογίζουμε την ταχύτητα. Βρίσκουμε τον αριθμό Reynolds και με τη σχετική τραχύτητα από το διάγραμμα Moody βρίσκουμε το συντελεστή τριβής. Αν η τιμή του συντελεστή τριβής που βρήκαμε και αυτού που υποθέσαμε δεν ταυτίζονται τότε επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία με την τελευταία τιμή του συντελεστή τριβής.

Παράδειγμα 6.5

Νερό ρέει σε αγωγό διαμέτρου d=300 mm και μήκους L=300 m και οι απώλειες ύψους είναι h_L=6 m. Αν ε=4,6 mm και ν=1,13 × 10^{-6} m^2/s, να βρεθεί η παροχή του σωλήνα.

Παράδειγμα 6.5

Νερό ρέει σε αγωγό διαμέτρου $d=300$ mm και μήκους $L=300$ m και οι απώλειες ύψους είναι $h_L=6$ m. Αν $\varepsilon=4{,}6$ mm και $\nu=1{,}13\times10^{-6}$ m²/s, να βρεθεί η παροχή του σωλήνα.

Λύση

Ας υποθέσουμε $f=0{,}04$. Αν λύσουμε την εξίσωση Darcy-Weisbach ως προς την ταχύτητα θα έχουμε:

$$\bar{u}=\sqrt{\frac{h_L d\,2g}{fL}}=\sqrt{\frac{6\times0{,}3\times2\times9{,}8}{0{,}04\times300}}=1{,}714\ \text{m/s}$$

Με τη βοήθεια της ταχύτητας υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds.

$$\text{Re}=\frac{\bar{u}d}{\nu}=\frac{1{,}714\times0{,}3}{1{,}13\times10^{-6}}=4{,}55\times10^{5}$$

Η σχετική τραχύτητα δίνεται από $\varepsilon/d=0{,}015$. Από τις δύο αυτές τιμές από το διάγραμμα Moody βρίσκουμε ότι $f=0{,}0438$. Η τιμή αυτή είναι περίπου ίση με αυτή που υποθέσαμε. Έτσι έχουμε:

$$\dot{V}=\frac{\pi d^2\bar{u}}{4}=\frac{3{,}14\times0{,}3^2\times1{,}715}{4}=0{,}121\ \text{m}^3/\text{s}$$

Αν ζητείται μεγαλύτερη ακρίβεια, θα έπρεπε να επαναλαμβανόταν η προηγούμενη διαδικασία με $f=0{,}0438$. Σε αυτή την περίπτωση θα είχαμε

$$\bar{u}=1{,}653\ \text{m/s}\qquad\text{και}\qquad\text{Re}=4{,}67\times10^{5}$$

Από τη νέα τιμή του αριθμού Reynolds και τη σχετική τραχύτητα στο διάγραμμα Moody βρίσκουμε $f=0{,}042$, που προσεγγίζει την τιμή που υποθέσαμε. Έτσι τελικά έχουμε: $\dot{V}=0{,}116$ m³/s.

Υπολογισμός της διαμέτρου

Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν τρεις άγνωστοι στην εξίσωση Darcy-Weisbach *d,u,f* και δύο στον υπολογισμό του αριθμού Reynolds *d,u*. Η σχετική τραχύτητα ε/*d* είναι επίσης άγνωστη.

Αν στην εξίσωση Darcy-Weisbach χρησιμοποιηθεί η ογκομετρική παροχή, ελαχιστοποιούμε τους αγνώστους.

$$h_L = f\frac{L}{d}\frac{\dot{V}^2}{2g\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)^2} \Rightarrow d^5 = \frac{8L\dot{V}^2}{h_L g\,\pi^2}f = C_1 f \qquad (6.43)$$

Με τον ίδιο τρόπο ο αριθμός Reynolds υπολογίζεται ως:

$$\mathrm{Re} = \frac{\bar{u}d}{\nu} = \frac{\dot{V}d}{\frac{\pi d^2}{4}\nu} = \frac{4\dot{V}}{\pi\nu}\frac{1}{d} = \frac{C_2}{d}, \qquad (6.44)$$

όπου C_1 και C_2 είναι γνωστές ποσότητες.

Έτσι ακολουθούμε την εξής διαδικασία σε προβλήματα αυτής της κατηγορίας:

1. Υποθέτουμε μια τιμή για το συντελεστή τριβής *f*.
2. Λύνουμε την εξίσωση (6.43) ως προς *d*.
3. Λύνουμε την εξίσωση (6.44) ως προς Re.
4. Υπολογίζουμε τη σχετική τραχύτητα ε/*d*.
5. Από το διάγραμμα Moody υπολογίζουμε τον συντελεστή τριβής. Αν η τιμή αυτή είναι περίπου ίση με αυτήν που υποθέσαμε έχει καλώς. Αλλιώς με τη νέα αυτή τιμή επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 έως 6.
6. Όταν δύο διαδοχικές τιμές του συντελεστού τριβής προσεγγίζουν αρκετά, το πρόβλημα έχει λυθεί.

Παράδειγμα 6.6

Λάδι ρέει σε αγωγό μήκους $L=3000$ m με παροχή 0,25 m^3/s. Το κινηματικό ιξώδες του λαδιού είναι $\nu=10^{-6}$ m^2/s και οι απώλειες ύψους $h_L=25$ m. Η τραχύτητα του αγωγού είναι $\varepsilon=0{,}046$ mm. Να υπολογισθεί η διάμετρος που πρέπει να έχει ο αγωγός.

Λύση

Υποθέτουμε ότι ο συντελεστής τριβής είναι $f=0{,}02$. Από την εξίσωση (6.43) υπολογίζουμε τη διάμετρο: $d=0{,}416$ m. Συνεπώς από την εξίσωση (6.44) θα έχουμε: Re=76500 και $\varepsilon/d=0{,}00011$.

Από το διάγραμμα Moody βρίσκουμε ότι $f=0{,}0195$. Έτσι για τη νέα αυτή τιμή επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία και βρίσκουμε:

$$d=0{,}413 \text{ m},\ \mathrm{Re}=75700 \text{ και } \varepsilon/d=0{,}00011 \text{ και } f=0{,}0196.$$

Συνεπώς $d=0{,}413$ m.

Παράδειγμα 6.7

Υγρό ρέει σε λείο αγωγό μήκους $L=20$ m. Η μέση ταχύτητα ροής στον αγωγό είναι $\bar{u}=4$ m/s και το κινηματικό ιξώδες $\nu=10^{-4}$ m^2/s. Αν υποθέσουμε στρωτή πλήρως ανεπτυγμένη ροή να υπολογίσετε την ισχύ αντλίας έτσι ώστε να τροφοδοτεί με υγρό πυκνότητας 1274 kg/m^3.

Λύση

Ως γνωστό η πτώση πίεσης λόγω απωλειών στην είσοδο και έξοδο του αγωγού θα δίνεται από την εξίσωση (6.42).

$$\Delta p = \frac{8\mu L \bar{u}}{R^2} \qquad \text{ή} \qquad \Delta p = \frac{32\mu L \bar{u}}{d^2}$$

Εφαρμογή της εξίσωσης (3.110) στον όγκο ελέγχου που περιλαμβάνει την είσοδο και έξοδο του αγωγού, δίνει ότι:

$$\boxed{\frac{\Delta u^2}{2} + g\Delta z + \frac{\Delta p}{\varrho} + w_L + w_s = 0} \qquad \cancel{\frac{\Delta u^2}{2}} + \cancel{g\Delta z} + \frac{\Delta p}{\varrho} + \cancel{w_s} + w_f = 0$$

όπου w_s είναι το παραγόμενο από το ρευστό έργο ανά μονάδα μάζας ρευστού. Αλλά ισχύει:

$$\frac{\Delta u^2}{2} = 0, \quad g\Delta z = 0 \qquad \text{και} \qquad w_s = 0$$

Έτσι έχουμε: $w_f = \dfrac{\Delta p}{\varrho} = -\dfrac{32\mu L \bar{u}}{d^2 \varrho} = -\dfrac{32\nu L \bar{u}}{d^2}$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι απαιτείται προσφορά έργου ίση με τις απώλειες. Αν η προηγούμενη εξίσωση πολλαπλασιαστεί με τον ρυθμό μάζας θα έχουμε

$$w_f \dot{m} = -\frac{32\nu L \bar{u} \dot{m}}{d^2} = -\frac{32\nu L \bar{u} \varrho \dot{V}}{d^2} = -\frac{32\nu L \bar{u} \varrho \cdot \bar{u} \pi d^2}{4 \cdot d^2} = -8\nu\varrho\pi L \bar{u}^2$$

Οι απώλειες όμως ανά μονάδα μάζας w_f είναι ίσες με το έργο ανά μονάδα μάζας που πρέπει να προσφέρει η αντλία και το γινόμενο: $w_f \dot{m}$ δίνει την ισχύ που απαιτείται. Συνεπώς έχουμε:

$$\text{Ισχύς} = -8\,\nu\varrho\pi\, L\, \bar{u}^2 = -8\ 10^{-4} \times 1274 \times 3{,}14 \times 20 \times 4^2 = 1024 \text{ W}$$

Παράδειγμα 6.8

Θειικό οξύ πυκνότητας $\varrho=1650$ kg/m^3 και ιξώδους $\mu=8{,}6\times10^{-3}$ Ns/m πρόκειται να μεταφερθεί με αγωγό μήκους $L=0{,}8$ km και διαμέτρου $d=50$ mm με ρυθμό 3,0 kg/s και σε ύψος $h=15$ m. Αν η αντλία που θα χρησιμοποιηθεί έχει απόδοση 50%, να βρεθεί η ισχύς της αντλίας. Δίνεται $\varepsilon=0{,}08$ mm.

Λύση

Εμβαδόν διατομής του αγωγού: $\dfrac{\pi d^2}{4}=0{,}00196\ \text{m}^2.$

Μέση ταχύτητα: $\bar{u}=\dfrac{\dot{V}}{A}=\dfrac{\dot{m}/\varrho}{A}=\dfrac{3/1650}{0{,}00196}=0{,}93$ m/s.

Αριθμός Reynolds: $\text{Re}=\dfrac{du\varrho}{\mu}=\dfrac{0{,}05\times0{,}93\times1650}{8{,}6\times10^{-3}}=8921.$

Η ροή είναι τυρβώδης και συνεπώς η εξίσωση Hagen-Poiseuille δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Η σχετική τραχύτητα είναι $\varepsilon/d=0{,}0016$. Από το διάγραμμα Moody βρίσκουμε $f=0{,}0232$. ΄Ετσι οι απώλειες ύψους λόγω τριβών είναι:

$$h_L=f\frac{L}{d}\frac{\bar{u}^2}{2g}=0{,}022\times\frac{800}{0{,}05}\times\frac{0{,}93^2}{2\times9{,}81}=15{,}5\ \text{m}$$

Συνεπώς το συνολικό ύψος είναι: $h=15{,}5+15=30{,}5$ m.

Η απαιτούμενη ισχύς P μπορεί να βρεθεί ως:

$$P=\text{ρυθμός μάζας}\times\text{ύψος}\times g=3{,}0\times30{,}5\times9{,}81=897{,}6\ \text{W}.$$

Επειδή η απόδοση της αντλίας είναι $n=50$ % η απαιτούμενη ισχύ της είναι:

$$n=\frac{P_{\text{ωφ.}}}{P_{\text{δαπ.}}}\Rightarrow P_{\text{δαπ.}}=\frac{P_{\text{ωφ.}}}{n}=1795\ \text{W}$$

Άσκηση (Υπολογισμός απωλειών)

$Μον.ιξώδους: N\cdot {}^{s}/_{m^2} = Pa\cdot s$

Λάδι απόλυτης συνεκτικότητας $\boxed{0{,}1\ Pa\cdot s}$ και σχετικής πυκνότητας 0,850 ρέει σε σωλήνα από μαντέμι μήκους 3048 m και διαμέτρου 305 mm με παροχή $44{,}4\text{x}10^{-3}\ m^3/s$

α) Προσδιορίστε το είδος της ροής

β) Ποιο το ύψος απωλειών στον σωλήνα

Λύση

$$\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{44{,}4\times 10^{-3}}{\frac{1}{4}\pi(0{,}305)^2} = 0{,}61\,{}^{m}/_{s} \qquad Re = \frac{d\bar{u}\rho}{\mu} = \frac{0{,}305\cdot 0{,}61\cdot 850}{0{,}1} = 1580$$

Στρωτή ροή

$$f = \frac{64}{Re} \Rightarrow f = 0{,}0407 \Rightarrow \qquad h_L = f\frac{L}{d}\frac{u^2}{2g} = 0{,}0407\cdot\frac{3048}{0{,}305}\cdot\frac{0{,}61^2}{2g} = 7{,}71m$$

Άσκηση (Υπολογισμός παροχής)

Πετρέλαιο ρέει από το Α στο Β σε οριζόντιο χαλυβδοσωλήνα των 153 mm, μήκους 104.4 m. Η πίεση στο Α είναι 1,069 Mpa και στο Β είναι 34,48 kPa. Η κινηματική συνεκτικότητα είναι $412{,}5\text{x}10^{-6}$ m^2/s και η σχετική πυκνότητα 0,918. Πόση είναι η παροχή σε m^3/s

Λύση

$Q = A \cdot \bar{u}$, άρα πρέπει να υπολογιστεί η μέση ταχύτητα

Εξίσωση Bernoulli ή $\dfrac{\Delta u^2}{2} + g\Delta z + \dfrac{\Delta p}{\varrho} + w_L + w_s = 0$

$$\left(\frac{p_A}{\gamma_A} + \cancel{\frac{u_A^2}{2g}} + \cancel{z_A}\right) - H_L = \left(\frac{p_B}{\gamma_B} + \cancel{\frac{u_B^2}{2g}} + \cancel{z_B}\right) \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta p}{\gamma} + \cancel{\frac{\Delta u^2}{2g}} + \cancel{\Delta z} - H_L = 0$$

$$\frac{1.069.000 - 34.480}{918 \cdot 9{,}81} - f\frac{L}{d}\frac{u^2}{2g} = 0 \ \Rightarrow f\frac{u^2}{2g}682{,}4 = 114{,}88$$

f, u άγνωστα

Αν στρωτή ροή τότε $\Delta p = 32\dfrac{\mu L}{d^2}\bar{u} \Rightarrow \boxed{\bar{u} = 2{,}17\, ^m/_s}$

$$Re = \frac{d\bar{u}\rho}{\mu} = \frac{d\bar{u}}{\nu} = 800, \ \ \text{άρα όντως η ροή είναι στρωτή} \qquad \Rightarrow Q = A \cdot \bar{u} = 0{,}0396\, ^{m^3}/_s$$