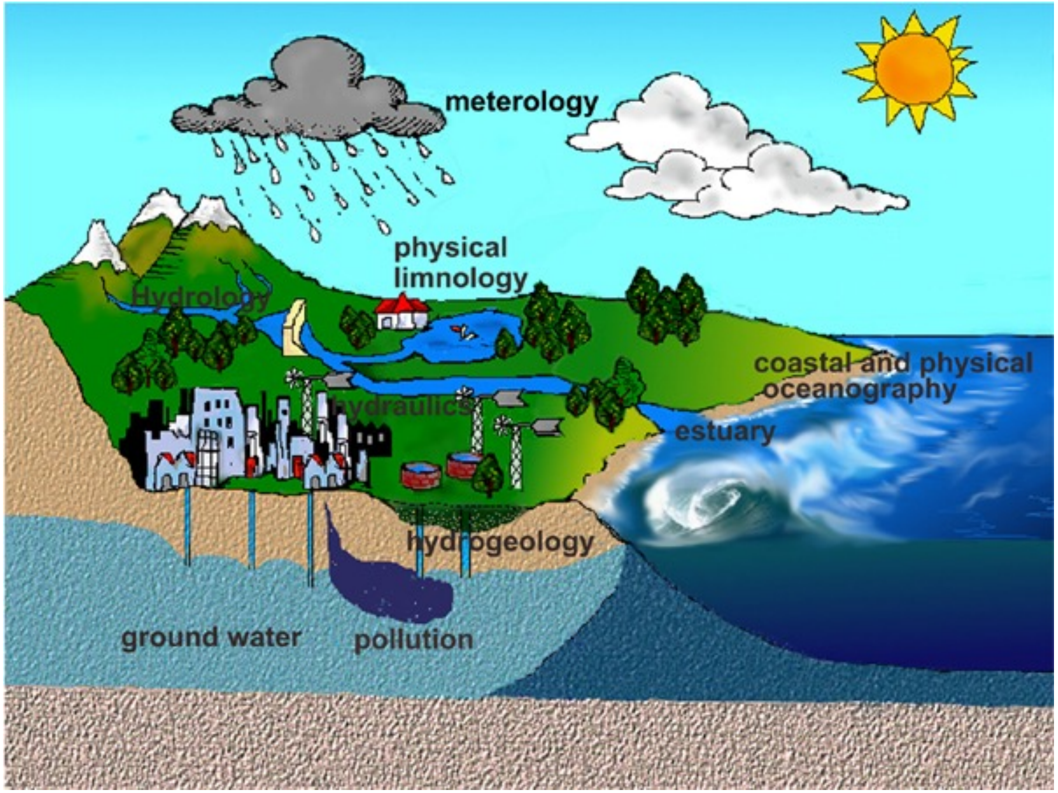
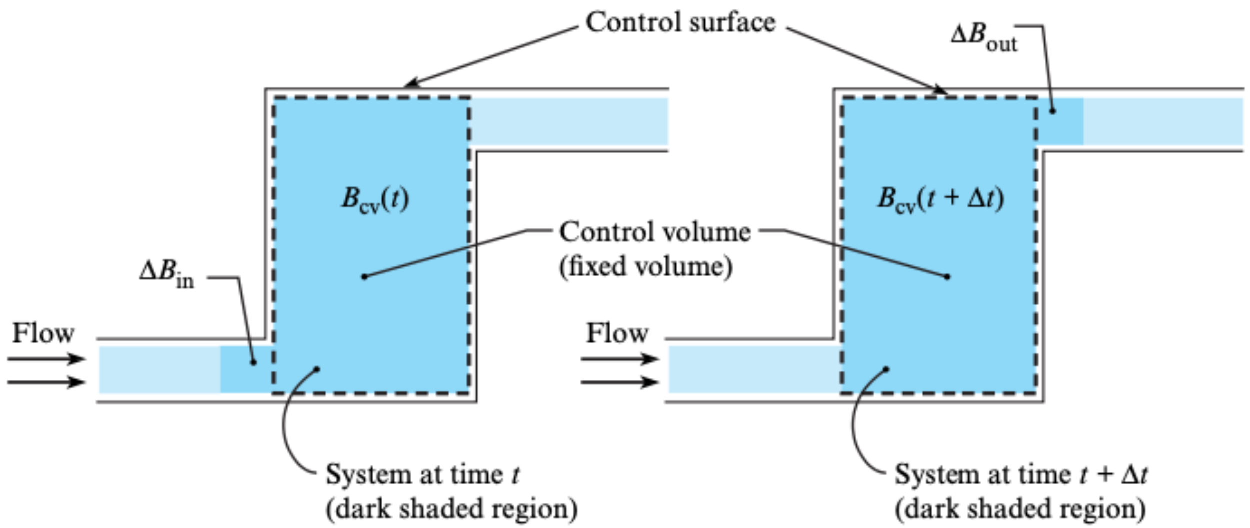
Κινηματική και Δυναμική των Ρευστών



Θεώρημα Μεταφοράς του Reynolds

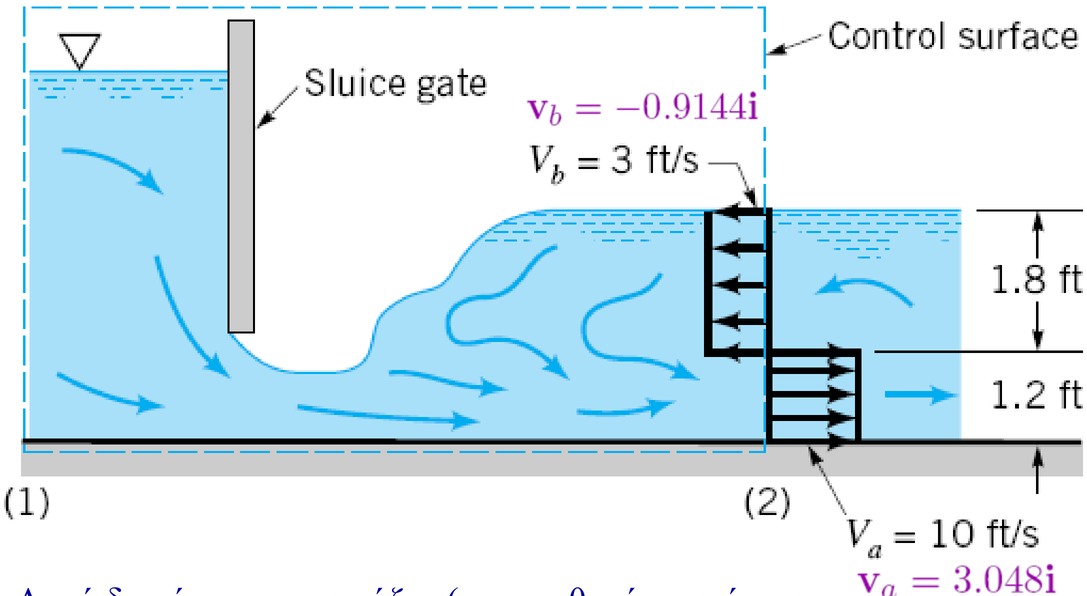


Εξέλιξη ενός κλειστού συστήματος μέσα από ένα όγκο ελέγχου

$$\underbrace{\frac{dB_{\text{closed system}}}{dt}}_{\text{Lagrangian}} = \underbrace{\frac{d}{dt}\int_{cv} b\rho\, d\forall + \int_{cs} b\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}}_{\text{Eulerian}}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Rate of change}\\ \text{of property } B\\ \text{in closed system}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{Rate of change}\\ \text{of property } B\\ \text{in control volume}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{Net outflow}\\ \text{of property } B\\ \text{through control surface}\end{array}\right\}$$

Reynolds Transport Theorem
Παράδειγμα (αντίστροφη ροή κατάντι θυρίδας)



$3.0\text{ft/s} \rightarrow 0.9144 \text{ m/s}$

$10.0\text{ft/s} \rightarrow 3.048 \text{ m/s}$

$1.2\text{ft} \rightarrow 0.3658 \text{ m}$

$1.8\text{ft} \rightarrow 0.5486 \text{ m}$

πλάτος $20.0\text{ft} \rightarrow 6.096 \text{ m}$

$$\underbrace{\frac{dB_{\text{closed system}}}{dt}}_{\text{Lagrangian}} = \underbrace{\frac{d}{dt}\int_{cv} b\rho\, d\forall + \int_{cs} b\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}}_{\text{Eulerian}}$$

Αρχή διατήρησης της μάζας (για σταθερή πυκνότητα και για τη μονάδα χρόνου διατήρηση μάζας = διατήρηση ροής)

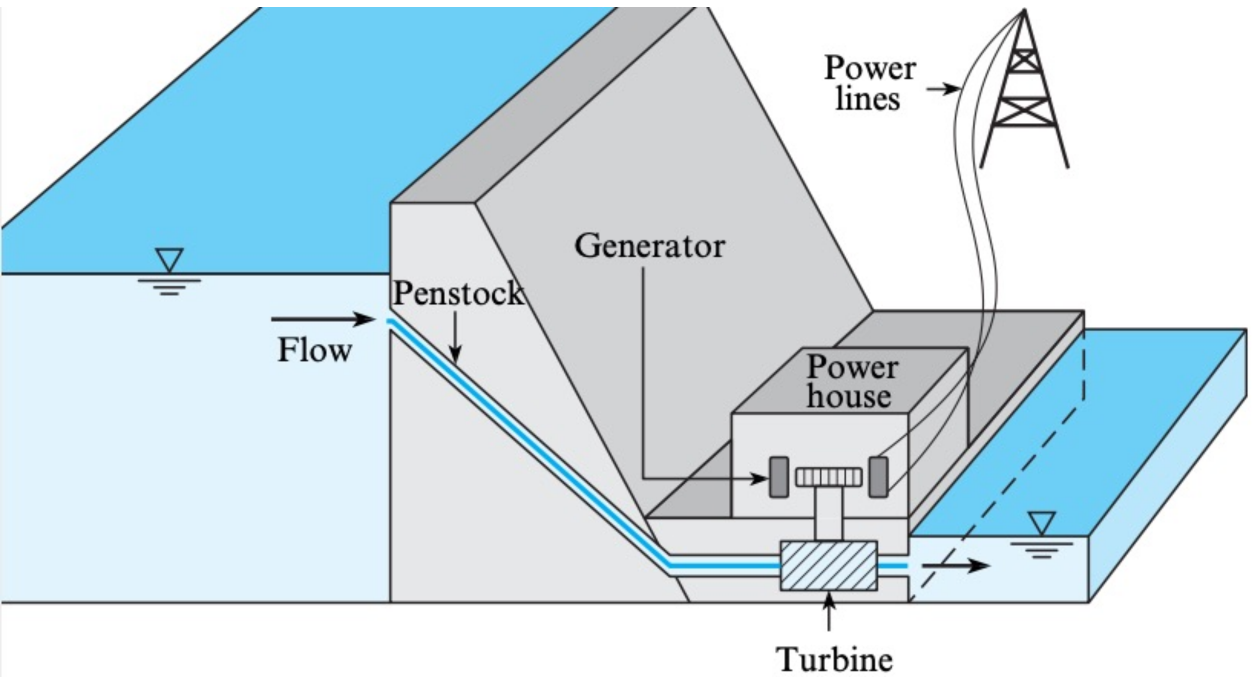
Μεταβολή της μάζας στον όγκο ελέγχου μηδενική

$$\begin{aligned}
\text{Flow}_{(2)v_a} &= \iint_{v_a} \rho(\mathbf{v}_a\cdot\hat{\mathbf{n}})dA \\
&= 10^3 \times 3.048\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} \times (0.3658 \times 6.096) \\
&= 6.797 \times 10^3 \text{ kg/s} \\
\text{Flow}_{(2)v_b} &= \iint_{v_b} \rho(\mathbf{v}_b\cdot\hat{\mathbf{n}})dA \\
&= 10^3 \times (-0.9144\mathbf{i})\cdot\mathbf{i} \times (0.5486 \times 6.096) \\
&= -3.058 \times 10^3 \text{ kg/s}
\end{aligned}$$

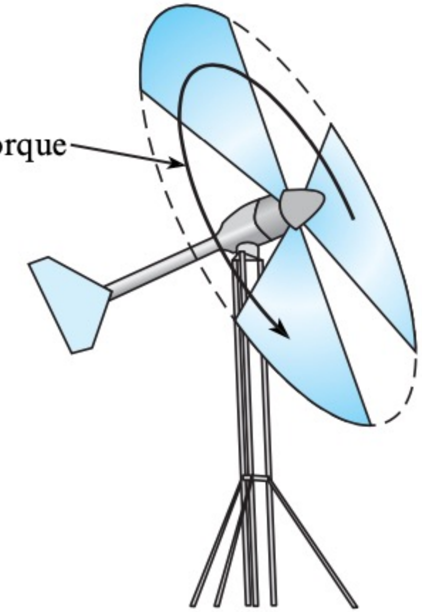
Καθαρή εκροή από την επιφάνεια

$$\boxed{(6.797 - 3.058) \times 10^3 = 3.739 \times 10^3 \text{ kg/s}}$$

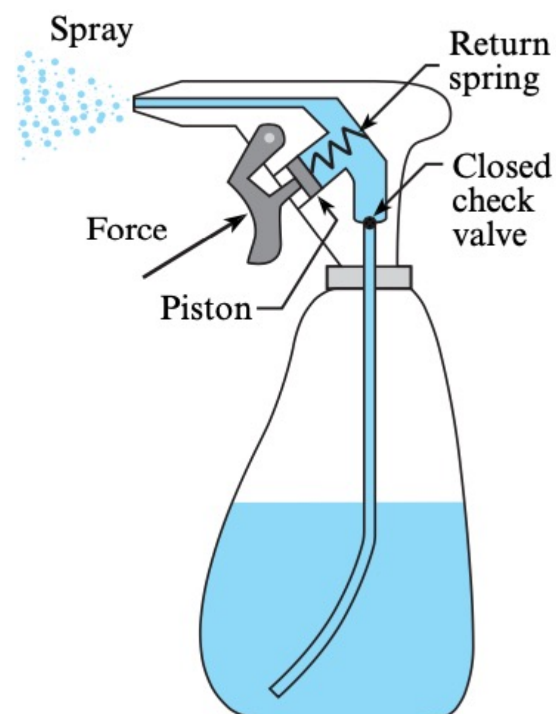
Ενέργεια



Power
lines
Generator
Penstock
Flow
Power
house
Turbine



Torque

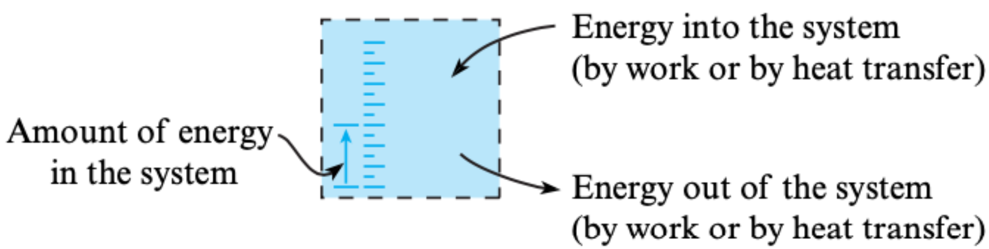


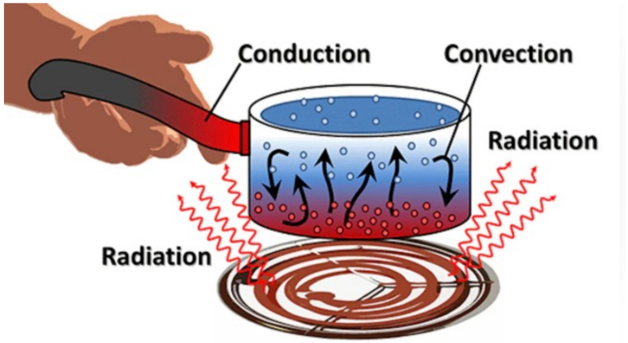
Spray
Return
spring
Closed
check
valve
Force
Piston

Διατήρηση της ενέργειας

Joule recognized that the energy of a *closed system* can be changed in only two ways:

- **Work.** The energy of the system can be changed by work interactions at the boundary.
- **Heat transfer.** The energy of the system can change by heat transfer across the boundary. **Heat transfer** can be defined as the transfer of thermal energy from hot to cold by mechanisms of conduction, convection, and radiation.





1ος Νόμος Θερμοδυναμικής

$$\Delta E = Q - W$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{increase in}\\ \text{energy stored}\\ \text{in the system}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{amount of energy}\\ \text{that entered system}\\ \text{by heat transfer}\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{amount of energy}\\ \text{that left system}\\ \text{due to work}\end{matrix}\right\}$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W}}$$

Μακροσκοπική εξίσωση της ενέργειας

$$e = \frac{u^2}{2} + gz + \hat{U}$$

Όταν ένα ρευστό ρέει από ένα σημείο 1 σε ένα σημείο 2, τότε η ενέργεια μετατρέπεται από μια μορφή σε άλλη. Όπως ήδη έχει αναφερθεί, μια μορφή ενέργειας που μας ενδιαφέρει, είναι και η **εσωτερική ενέργεια**. Ως εσωτερική ενέργεια ενός ρευστού, ορίζουμε τη συνολική ενέργεια που έχουν οι δομικές μονάδες σε δεδομένες συνθήκες. Οι δομικές μονάδες μπορεί να είναι μόρια, ή άτομα και η ενέργεια τους οφείλεται σε σχετικές κινήσεις (μεταφορά, περιστροφή, δόνηση), ενδομοριακά φαινόμενα (πυρηνικά, ηλεκτρονικά) και διαμοριακές αλληλεπιδράσεις. Η εσωτερική ενέργεια δεν είναι μετρήσιμο μέγεθος, αλλά ούτε και ενδιαφέρει να μετρηθεί. Εκείνο που ενδιαφέρει και μπορεί να μετρηθεί είναι οι μεταβολές της. Έτσι ορίζεται μια **κατάσταση αναφοράς** με εσωτερική ενέργεια μηδέν, σε σχέση με την οποία, υπολογίζεται η εσωτερική ενέργεια σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση.

Έργο – 3 κατηγορίες

- **Αξονικό Έργο (Ws, shaft work)**: το έργο που παράγεται από το ρευστό (ή προσφέρεται στο ρευστό) του ΟΕ, διαμέσου τμήματος της ΕΕ από την οποία δεν συμβαίνει ροή ρευστού από τον ΟΕ
  - **W_s (+)** : παράγει έργο στο περιβάλλον, π.χ. στρόβιλος κινούμενος από ρευστό
  - **W_s (-)** : καταναλώνει έργο από το περιβάλλον και το προσφέρει στο ρευστό (π.χ. αντλία)

- **Έργο Ροής ή Ενέργεια Πίεσης (Wπ, flow work)**: είναι το έργο που απαιτείται για να τεθεί το ρευστό σε κίνηση χωρίς να μεταβληθεί ο όγκος του

$$dW_\pi = F \cdot dl = p \cdot dA \cdot dl \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dW_\pi}{dt} = p\frac{dl}{dt}dA = pudA \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W_\pi = \int_{EE} p\bar{u} \cdot d\bar{A}$$

- **Έργο διάτμησης (Wτ, shear work)**: είναι το έργο που απαιτείται για να υπερνικηθούν οι διατμητικές τάσεις – μετατρέπεται σε μορφή ενέργειας που δεν είναι ικανή να παράγει χρήσιμο έργο

$$W = W_s + W_\pi + W_\tau$$

Αρχή διατήρησης της … ενέργειας

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\vartheta}{\vartheta t}\int_{OE} \rho\, dV + \int_{EE} \rho\, \bar{u} dA$$

Αρχή Διατήρησης της Μάζας

$$\Sigma F = \frac{d(mu)}{dt} = \frac{\vartheta}{\vartheta t}\int_{OE} u\rho\, dV + \int_{EE} u\rho\, \bar{u} dA$$

Αρχή Διατήρησης της Ορμής

$$\begin{bmatrix} \text{Ρυθμός αύξησης} \\ \text{της ιδιότητας } N \\ \text{του συστήματος} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Ρυθμός αύξησης} \\ \text{της ιδιότητας } N \\ \text{μέσα στον } OE \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Ρυθμός συνολικής} \\ \text{εκροής της } N \\ \text{δια της } EE \end{bmatrix}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\vartheta}{\vartheta t}\int_{OE} n\rho\, dV + \int_{EE} n\rho\, \bar{u} dA$$

N: ιδιότητα

n: τιμή της N ανά μονάδα μάζας

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\vartheta}{\vartheta t}\int_{OE} e\rho\, dV + \int_{EE} e\rho\, \bar{u} dA$$

e: Ενέργεια/ μονάδα μάζας

Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας

Γενική εξίσωση της ενέργειας

$$\begin{array}{ccccc} \Delta E & = & Q & - & W \\ \left\{\begin{array}{c}\text{increase in}\\ \text{energy stored}\\ \text{in the system}\end{array}\right\} & = & \left\{\begin{array}{c}\text{amount of energy}\\ \text{that entered system}\\ \text{by heat transfer}\end{array}\right\} & - & \left\{\begin{array}{c}\text{amount of energy}\\ \text{that left system}\\ \text{due to work}\end{array}\right\} \end{array}$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W}}$$

$$W = W_s + W_\pi + W_\tau$$

$$\frac{dQ_H}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt} \Rightarrow \frac{dQ_H}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{\vartheta}{\vartheta t}\int_{OE} e\rho\, dV + \int_{EE} e\rho\, \bar{u} d\bar{A}$$

$$\Rightarrow \frac{dQ_H}{dt} - \frac{dW_S}{dt} - \frac{dW_T}{dt} = \frac{\vartheta}{\vartheta t}\int_{OE} e\rho\, dV + \int_{EE} e\rho\, \bar{u} d\bar{A} + \int_{EE} p\, \bar{u} d\bar{A}$$

$$= \frac{\vartheta}{\vartheta t}\int_{OE} e\rho\, dV + \int_{EE} \left(e + \frac{p}{\rho}\right) \rho \bar{u} d\bar{A}$$

$$\begin{bmatrix} \text{Ρυθμός ροής} \\ \text{θερμότητας} \\ \text{από το περιβάλλον} \\ \text{στον όγκο ελέγχου} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Ρυθμός παραγωγής} \\ \text{έργου από τον} \\ \text{όγκο ελέγχου} \\ \text{στο περιβάλλον} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Ρυθμός} \\ \text{συσσώρευσης} \\ \text{ενέργειας} \\ \text{στον όγκο ελέγχου} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Ρυθμός καθαρής εκροής} \\ \text{ενέργειας από} \\ \text{τον όγκο ελέγχου} \\ \text{στο περιβάλλον} \end{bmatrix}$$

Ειδικές μορφές της εξίσωσης ενέργειας

$$\frac{dQ_H}{dt}-\frac{dW}{dt}=\frac{dE}{dt}\Rightarrow\frac{dQ_H}{dt}-\frac{dW}{dt}=\frac{\vartheta}{\vartheta t}\int_{OE}e\rho\,dV+\int_{EE}e\rho\,\bar{u}d\bar{A}$$

$$\Rightarrow\frac{dQ_H}{dt}-\frac{dW_S}{dt}-\frac{dW_T}{dt}=\frac{\vartheta}{\vartheta t}\int_{OE}e\rho\,dV+\int_{EE}e\rho\,\bar{u}d\bar{A}+\int_{EE}p\,\bar{u}d\bar{A}$$

$$=\frac{\vartheta}{\vartheta t}\int_{OE}e\rho\,dV+\int_{EE}\left(e+\frac{P}{\rho}\right)\rho\bar{u}d\bar{A}$$

Υπόθεση

- Μόνιμη ροή και ομοιόμορφη
- $W_T = 0$ (έργο διάτμησης)
- Είσοδος u_1, A_1: Έξοδος u_2, A_2

$$\frac{dQ}{dt}=\dot{Q}\qquad\frac{\vartheta}{\vartheta t}\int_{OE}e\rho\,dV=0$$

$$\frac{dW_s}{dt}=\dot{W}_s\qquad e=\frac{u^2}{2}+gz+U$$

$$\Rightarrow$$

$$\dot{Q}-\dot{W}_s=\rho_2u_2A_2\left(\frac{u_2^2}{2}+gz_2+U_2+\frac{P_2}{\rho_2}\right)-\rho_1u_1A_1\left(\frac{u_1^2}{2}+gz_1+U_1+\frac{P_1}{\rho_1}\right)$$

Επειδή **(1)** Ενθαλπία / μονάδα μάζας: $h=U+pV$, $\rho=\frac{m=1}{V}$ $\Rightarrow$ $h=U+\frac{P}{\rho}$

(2) $\rho_1u_1A_1=\rho_2u_2A_2=\rho Q=\dot{m}$

$$\Rightarrow$$

$$\dot{Q}-\dot{W}_s=\dot{m}\left[(h_2-h_1)+\frac{u_2^2-u_1^2}{2}+g(z_2-z_1)\right]\Rightarrow\begin{pmatrix}\delta\iota\alpha\ \tau o\upsilon\\ \rho\upsilon\theta\mu o\acute{\upsilon}\\ \rho o\acute{\eta}\varsigma\ \mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{q-w_s=\Delta h+\frac{\Delta u^2}{2}+g\Delta z}$$

Ποσό θερμότητας / μονάδα μάζας

Ποσό παραγόμενου έργου / μονάδα μάζας

Έργο απωλειών

Έργο Απωλειών : Η μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε μη εκμεταλλεύσιμη μορφή ενέργειας, δηλ. θερμότητα, η οποία: (1) είτε απάγεται από το σύστημα
(2) είτε αυξάνει την εσωτερική ενέργεια του συστήματος

Το W_L χαρακτηρίζει μη αντιστρεπτές διεργασίες

Ισόθερμη ροή: $W_L \longrightarrow$ θερμότητα

$W_L \longrightarrow$ U (εσωτ. ενέργεια)

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{d}W = pdV \\ \Gamma\iota\alpha\ m = 1\ \ \rho = \dfrac{m}{V} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Έργο αντιστρεπτής διεργασίας

$$\mathrm{d}W = pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

Έργο Μη - αντιστρεπτής διεργασίας

$$\mathrm{d}W = pd\left(\frac{1}{\rho}\right) - dW_L$$

Είναι μειωμένο κατά το έργο απωλειών dW_L

Έργο απωλειών (για μια μη αντιστρεπτή διεργασία – 1ος νόμος)

$$dq - dW = dU \Rightarrow dq = dU + dW \Rightarrow dq = dU + [\, pd\left({}^{1}/_{\rho}\right) - dW_L \,]$$

$$h = U + \frac{p}{\rho} \Rightarrow U = h - \frac{p}{\rho} \Rightarrow dU = dh - d\left(\frac{p}{\rho}\right) \Rightarrow dU = dh - pd\left({}^{1}/_{\rho}\right) - \frac{1}{\rho}dp$$

$$\Rightarrow dq = \left(dh - pd\left({}^{1}/_{\rho}\right) - {}^{1}/_{\rho}\, dp\right) + pd\left({}^{1}/_{\rho}\right) - dW_L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dq = dh - {}^{1}/_{\rho}\, dp - dW_L$$

ρευστό ασυμπίεστο: ρ = σταθ.

(ολοκλήρωση) $\boxed{q = \Delta h - \frac{\Delta p}{\rho} - W_L}$

$$\boxed{q - W_S = \Delta h + \frac{\Delta u^2}{2} + g\Delta z}$$

$$\Rightarrow \Delta h - \frac{\Delta p}{\rho} - W_L - W_S = \Delta h + \frac{\Delta u^2}{2} + g\Delta z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta u^2}{2} + g\Delta z + \frac{\Delta p}{\rho} + W_L + W_S = 0 \Rightarrow$$

Διαιρώντας με το g

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta u^2}{2g} + \Delta z + \frac{\Delta p}{\gamma} + \frac{W_L}{g} + \frac{W_S}{g} = 0}$$

Διαστάσεις Μήκους
οι όροι της εξίσωσης

Ύψος Ταχύτητας

Πιεζομετρικό Ύψος

Ύψος Πίεσης

Ύψος Απωλειών

$$h_L = \frac{W_l}{g}$$

Συντελεστής διόρθωσης κινητικής ενέργειας

- Στην περίπτωση ανομοιόμορφης ροής χρησιμοποιούμε το συντελεστή διόρθωσης κινητικής ενέργειας α που ορίζεται :

$$a\frac{1}{2}\dot{m}\overline{\upsilon}^{2} = a\frac{1}{2}\rho\overline{\upsilon}\mathrm{A}\overline{\upsilon}^{2} = a\frac{1}{2}\rho\mathrm{A}\overline{\upsilon}^{3} = \int_{A}\frac{1}{2}\rho\upsilon^{3}dA \Rightarrow$$

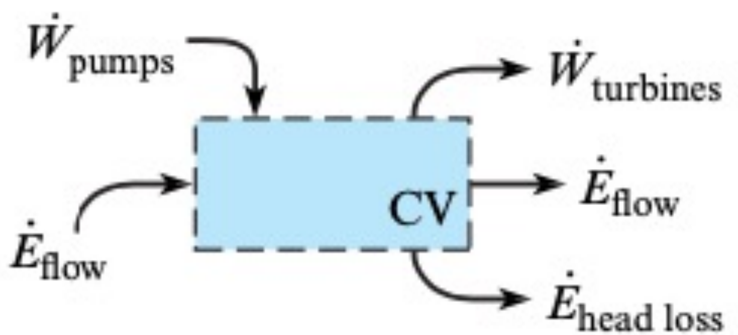
- $$a = \frac{1}{A}\int_{A}\left(\frac{\upsilon}{\overline{\upsilon}}\right)^{3}dA$$ Ολοκληρώνοντας το προφίλ ταχυτήτων
- Επίπονο, οπότε για ευκολία, προσέγγιση
- Τυρβώδης ροή: α = (1,01 – 1,10)
- Στρωτή ροή σε κυλινδρικό αγωγό: α = 2

Φυσική ερμηνεία της εξίσωσης ενέργειας

$$\frac{\Delta u^2}{2g} + \Delta z + \frac{\Delta p}{\gamma} + \frac{W_L}{g} + \frac{W_S}{g} = 0$$

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{\overline{V}_1^2}{2g} + z_1\right) + h_p = \left(\frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{\overline{V}_2^2}{2g} + z_2\right) + h_t + h_L$$

$$\begin{pmatrix}\text{pressure head}\\ \text{velocity head}\\ \text{elevation head}\end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix}\text{pump}\\ \text{head}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{pressure head}\\ \text{velocity head}\\ \text{elevation head}\end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix}\text{turbine}\\ \text{head}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{head}\\ \text{loss}\end{pmatrix}$$



$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{\text{Energy into}\\ \text{CV by flow}\\ \text{and pumps}}} = \underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{\text{Energy out of CV}\\ \text{by flow, turbines,}\\ \text{and head loss}}}$$

Σύνοψη της εξίσωσης ενέργειας

Description	Equation	Terms
The energy equation has only one form. Major assumptions: • Steady state; no energy accumulation in CV. • The CV has one inlet and one outlet. • Constant density flow. • All thermal energy terms (except for head loss) can be neglected. • Streamlines are straight and parallel at each section. • Temperature is constant across each section.	$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{\overline{V}_1^2}{2g} + z_1\right) + h_p =$ $\left(\frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{\overline{V}_2^2}{2g} + z_2\right) + h_t + h_L$ Eq. (7.29)	$\left(\frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{\overline{V}^2}{2g} + z\right) = \left(\begin{array}{c}\text{energy/weight transported}\\ \text{into or out of cv}\\ \text{by fluid flow}\end{array}\right) = \text{total head}$ p/γ = pressure head at cs (m) $\alpha \frac{\overline{V}^2}{2g}$ = velocity head at cs (m) (α = kinetic energy (KE) correction factor at cs) ($\alpha \approx 1.0$ for turbulent flow) ($\alpha \approx 1.0$ for nozzles) ($\alpha \approx 2.0$ for full-developed laminar flow in round pipe) z = elevation head at cs (m) h_p = head added by a pump (m) h_t = head removed by a turbine (m) h_L = head loss (m) (to predict head loss, apply Eq. (10.45))

Απόδοση αντλίας και ανεμογεννήτριας

$$\text{Electric grid} \xrightarrow{1000\ \text{J/s}} \text{Electric motor} \xrightarrow{750\ \text{J/s}} \text{Pump} \xrightarrow{450\ \text{J/s}} \text{Moving fluid}$$

$$\text{Moving air} \xrightarrow{1000\ \text{J/s}} \text{Wind turbine} \xrightarrow{360\ \text{J/s}} \text{Electrical generator} \xrightarrow{324\ \text{J/s}} \text{Electric grid}$$

In this example, the efficiency of the electric motor is

$$\eta_{\text{motor}} = (750\ \text{J/s})/(1000\ \text{J/s}) = 0.75 = 75\%$$

Similarly, the efficiency of the pump is

$$\eta_{\text{pump}} = (450\ \text{J/s})/(750\ \text{J/s}) = 0.60 = 60\%$$

and the combined efficiency is

$$\eta_{\text{combined}} = (450\ \text{J/s})/(1000\ \text{J/s}) = 0.45 = 45\%$$

The efficiency of the wind turbine is

$$\eta_{\text{wind turbine}} = (360\ \text{J/s})/(1000\ \text{J/s}) = 0.36 = 36\%$$

The efficiency of the electric generator is

$$\eta_{\text{electric generator}} = (324\ \text{J/s})/(360\ \text{J/s}) = 0.90 = 90\%$$

The combined efficiency is

$$\eta_{\text{combined}} = (324\ \text{J/s})/(1000\ \text{J/s}) = 0.324 = 32.4\%$$

Description	Equation	Terms
Pump	$P_{\text{pump}} = \eta_{\text{pump}} P_{\text{shaft}}$ (7.33a)	P_{pump} = power that the pump supplies to the fluid (W) $[P_{\text{pump}} = \dot{m} g h_p = \gamma Q h_p]$ η_{pump} = efficiency of pump () P_{shaft} = power that is supplied to the pump shaft (W)
Turbine	$P_{\text{shaft}} = \eta_{\text{turbine}} P_{\text{turbine}}$ (7.33b)	P_{turbine} = power that the fluid supplies to a turbine (W) $[P_{\text{turbine}} = \dot{m} g h_t = \gamma Q h_t]$ η_{turbine} = efficiency of turbine () P_{shaft} = power that is supplied by the turbine shaft (W)

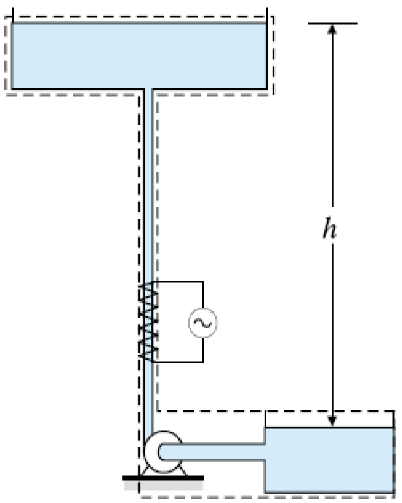
Παράδειγμα 3.21

Νερό αντλείται από πηγάδι με την βοήθεια αντλίας και διαβιβάζεται σε δεξαμενή. Η υψομετρική διαφορά του νερού είναι $z = 96$ m. Η αντλία λειτουργεί με κινητήρα ισχύος $P = 3800$ W και συντελεστή απόδοσης $n = 40$ %. Η παροχή της αντλίας είναι 1,89 m^3/h. Η θερμοκρασία του νερού στο πηγάδι είναι $\theta_1 = 15\,^\circ$C και με τη βοήθεια μιάς αντίστασης θερμαίνεται σε θερμοκρασία $\theta_2 = 20\,^\circ$C φτάνοντας στη δεξαμενή. Να υπολογισθεί το καθαρό ποσό θερμότητας που προσφέρει η αντίσταση σε χρόνο $t = 1$h. Όλες οι σωληνώσεις έχουν την ίδια διατομή. Η πυκνότητα του νερού είναι $\varrho = 1000$ kg/m^3 και η ειδική θερμότητα είναι $c_p = 4200$ J/kg·K.

$$\boxed{q - w_s = \Delta h + \frac{\Delta u^2}{2} + g\Delta z}$$

Λύση

Τα όρια του συστήματος στο οποίο θα εφαρμοσθεί η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας ορίζονται με τη διακεκομένη γραμμή του παραπλεύρως Σχήματος. Ως βάση των υπολογισμών χρησιμοποιείται μία ώρα λειτουργίας, οπότε ο όγκος του αντλούμενου νερού είναι 1,89 m^3. Πιθανές απώλειες ενέργειας λόγω τριβών περιλαμβάνονται στο υπολογιζόμενο ποσό θερμότητας. Σε 1 h η μάζα του αντλούμενου νερού είναι



$$m = \varrho V = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 1{,}89 \text{ m}^3 = 1890 \text{ kg}.$$

Το ποσό θερμότητας υπολογίζεται με τη βοήθεια της εξίσωσης (3.125), αφού όλοι οι όροι της εξίσωσης πολλαπλασιασθούν με την μάζα του υγρού. Κάθε όρος υπολογίζεται χωριστά ως εξής:

α. *Υπολογισμός της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας*

$$mgz = 1890\text{kg} \times 10 \text{ m/s}^2 \times 96 \text{ m} = 1814 \text{ kJ}.$$

$$q - w_S = \Delta h + \frac{\Delta u^2}{2} + g\Delta z$$

β. *Υπολογισμός της μεταβολής της κινητικής ενέργειας*

Οι ταχύτητες και στις δύο θέσεις είναι μηδέν και συνεπώς η μεταβολή κινητικής ενέργειας είναι μηδέν.

γ. *Υπολογισμός του προσφερόμενου έργου*

$$W_s = Ptn = 3800 \text{ W} \times 3600 \text{ s} \times 0{,}4 = 5472 \text{ kJ}.$$

δ. *Υπολογισμός μεταβολής ενθαλπίας*

$$\Delta H = mc_p(T_2 - T_1) = 1890 \text{ kg} \times 4200 \text{ J/kg} \cdot \text{K} \times 5 \text{ K} = 39690 \text{ kJ}.$$

Επομένως, η θερμότητα που προσφέρουν οι αντιστάσεις είναι

$$Q = 1814 + 39690 + 0 - 5472 = 36032 \text{ kJ}.$$

W_s (+) : παράγει ενέργεια στο περιβάλλον, π.χ. στρόβιλος κινούμενος από ρευστό

W_s (-) : αντλία που καταναλώνει έργο από το περιβάλλον και το προσφέρει στο ρευστό

Παράδειγμα 3.22

Η ελεύθερη επιφάνεια του νερού σε μία ανοιχτή δεξαμενή ευρίσκεται σε ύψος $z_1=100$ m. Σε ύψος $z_2=0{,}5$ m από τον πυθμένα της δεξαμενής υπάρχει οριζόντιος αγωγός απορροής νερού διαμέτρου $d=20$ cm. Εάν οι απώλειες ενέργειας λόγω τριβών μέσα στον αγωγό είναι $h_L=2{,}0$ m, να υπολογισθεί ο ρυθμός εκροής μάζας νερού από το άκρο του αγωγού. Η πυκνότητα του νερού είναι $\varrho=1000$ kg/m³ και η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_{atm}=100$ kN/m².

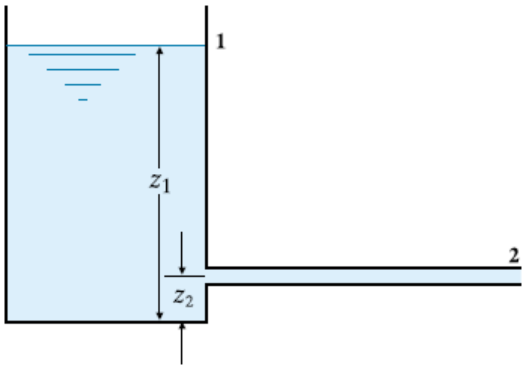
$$\frac{\Delta u^2}{2g}+\Delta z+\frac{\Delta p}{\gamma}+\frac{W_L}{g}+\cancel{\frac{W_s}{g}}=0$$

Λύση

Η εσωτερική ενέργεια του νερού δεν μεταβάλλεται, εάν υποθέσουμε αμελητέα τη διαφορά θερμοκρασίας της μάζας του νερού στην έξοδο. Η εξίσωση της ενέργειας μεταξύ της ελεύθερης επιφάνειας του νερού στη δεξαμενή και του άκρου του αγωγού είναι

$$\left(\frac{p_1}{\gamma}+\alpha_1\frac{\overline{V}_1^2}{2g}+z_1\right)+h_p=\left(\frac{p_2}{\gamma}+\alpha_2\frac{\overline{V}_2^2}{2g}+z_2\right)+h_t+h_L$$

$$\cancel{\frac{p_1}{\gamma}}+\cancel{\frac{u_1^2}{2g}}+z_1=\cancel{\frac{p_2}{\gamma}}+\frac{u_2^2}{2g}+z_2+h_L$$



Η ταχύτητα του νερού στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού της δεξαμενής είναι αμελητέα και η πίεση στο σημείο αυτό είναι η ατμοσφαιρική, άρα $u_1=0$ και $p_1=p_{atm}$. Η μάζα του νερού που εκχύνεται από το άκρο του αγωγού ευρίσκεται επίσης υπό ατμοσφαιρική πίεση, $p_2=p_{atm}$. Έτσι η προηγούμενη εξίσωση απλοποιείται στη μορφή

$$z_1=\frac{u_2^2}{2g}+z_2+h_L\Rightarrow u_2=\sqrt{2g\,(z_1-z_2-h_L)}$$

$$=\sqrt{2\times 9{,}81\ \text{m/s}^2\times(100-0{,}5-2{,}0)\ \text{m}}=43{,}7\ \text{m/s}$$

Ο ρυθμός ροής μάζας του νερού υπολογίζεται από την εξίσωση της συνέχειας:

$$\dot{m}=\varrho uA=\varrho u\pi\cdot\frac{d^2}{4}=1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\times 43{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\times 3{,}14\times\frac{0{,}02^2\,\text{m}^2}{4}=13{,}72\ \text{kg/s}.$$

Παράδειγμα 3.23

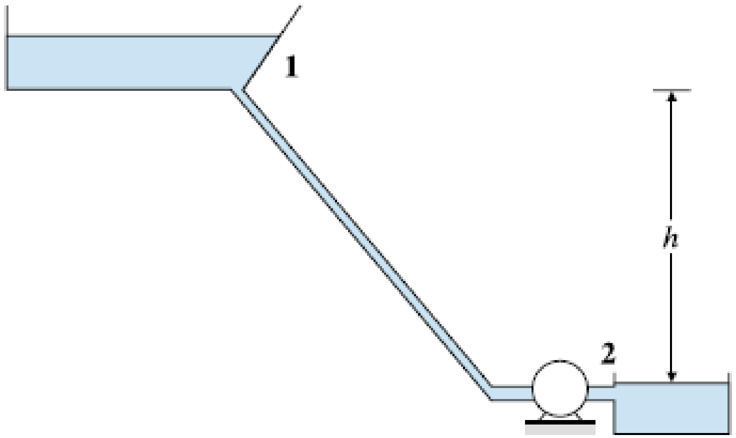
Τεχνητή λίμνη παρέχει νερό με ρυθμό $\dot{m}=103$ kg/s και κινεί υδροστρόβιλο. Οι αγωγοί μεταφοράς του νερού έχουν την ίδια διατομή. Η κατακόρυφη απόσταση του στροβίλου από τον πυθμένα της λίμνης είναι $h=500$ m. Η πίεση στον πυθμένα της λίμνης είναι $p_1=500$ kPa και αμέσως μετά τον στρόβιλο είναι $p_2=120$ kPa. Οι απώλειες ενέργειας λόγω τριβών μεταξύ των παραπάνω θέσεων είναι $W_L=80$ kW. Να υπολογισθούν: (α) Η αξονική ισχύς του στροβίλου και (β) Η αύξηση της θερμοκρασίας του νερού ΔT. Η πυκνότητα του νερού είναι $\varrho=1000$ kg/m^3 και η ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση είναι $c_p=4200$ J/kgK.

Λύση

α. Ο όγκος ελέγχου περιλαμβάνει τον αγωγό μέχρι τη θέση (1) και τον στρόβιλο μέχρι τη θέση (2). Εφαρμογή της εξίσωσης (3.129) μεταξύ των θέσεων (1) και (2) και με δεδομένο ότι η ταχύτητα δεν αλλάζει λόγω σταθερής διατομής, δίνει:

$$\boxed{\frac{\Delta u^2}{2} + g\Delta z + \frac{\Delta p}{\varrho} + w_L + w_s = 0}$$

$$\boxed{\frac{\Delta u^2}{2} + \Delta z + \frac{\Delta p}{\gamma} + \frac{w_L}{g} + \frac{w_s}{g} = 0}$$



$$\boxed{\cancel{\frac{\Delta u^2}{2}} + g\Delta z + \frac{\Delta p}{\varrho} + w_L + w_s = 0}$$

$$g\Delta z + \frac{p_2 - p_1}{\varrho} + w_L + w_s = 0$$

Αν η προηγούμενη εξίσωση πολλαπλασιασθεί με τον ρυθμό ροής μάζας προκύπτει

$$\dot{W}_s = \dot{m}\left[\frac{p_1 - p_2}{\varrho} - g\Delta z\right] - \dot{W}_L$$

W_s (+) : παράγει ενέργεια στο περιβάλλον, π.χ. στρόβιλος κινούμενος από ρευστό

W_s (-) : αντλία που καταναλώνει έργο από το περιβάλλον και το προσφέρει στο ρευστό

Αριθμητική αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση δίνει:

$$\dot{W}_s = 10^3 \times \left[\frac{(500 - 120) \times 10^3}{10^3} - 9{,}81 \times (-500)\right] - 80 \times 10^3 = 5{,}2\ \text{MW}$$

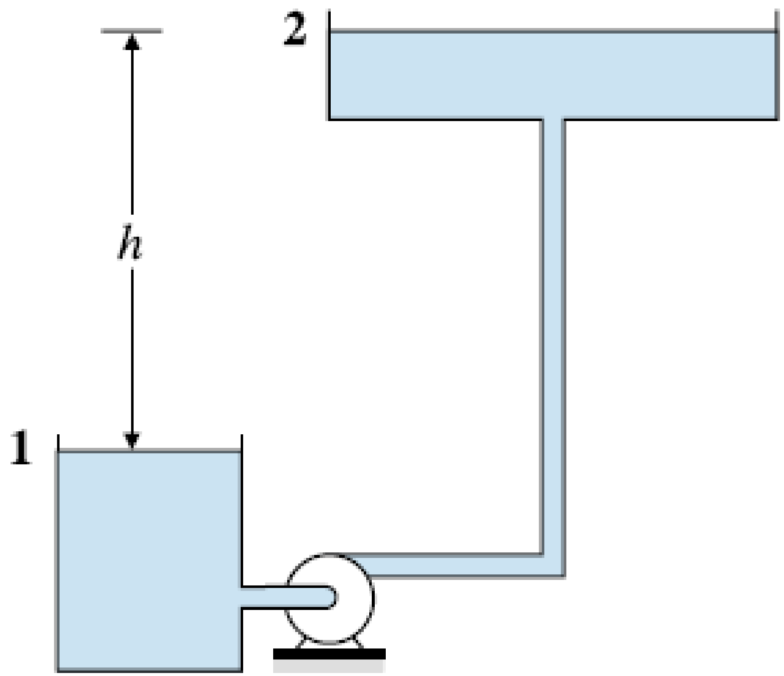
β. Αν υποθέσουμε ότι η ροή είναι αδιαβατική, όλες οι απώλειες ενέργειας μετατρέπονται σε θερμότητα με αποτέλεσμα την ανύψωση της θερμοκρασίας του νερού. Επομένως έχουμε

$$\dot{W}_L = \dot{m}c_p \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{\dot{W}_L}{\dot{m}c_p} = \frac{80 \times 10^3 \text{kW}}{10^3 \text{kg/s} \times 4200\ \text{J/kg}\cdot\text{K}} = 0{,}019\ \text{K}$$

Παράδειγμα 3.24

Να υπολογισθεί η ισχύς αντλίας που λειτουργεί με απόδοση $n=80\%$ έτσι ώστε να παρέχει νερό με ρυθμό $\dot{V}=30$ lt/s από την ανοιχτή δεξαμενή (1) στην ανοιχτή δεξαμενή (2) όπως φαίνεται στο διπλανό Σχήμα. Οι απώλειες του συστήματος εκτός της αντλίας είναι $12\ u^2/2g$. Η υψομετρική διαφορά της ελεύθερης στάθμης του νερού στις δύο δεξαμενές είναι $h=12$ m. Οι αγωγοί είναι της ιδίας διατομής με διάμετρο $d=15$ cm και η πυκνότητα του νερού είναι $\rho=1000$ kg/m^3.

Λύση



Λύση

Θεωρούμε ως όγκο ελέγχου, τον όγκο που περιλαμβάνει όλο το νερό των δύο δεξαμενών. Η ταχύτητα ροής του νερού στους σωλήνες είναι

$$\bar{u} = \frac{\dot{V}}{S} = \frac{4\dot{V}}{\pi d^2} = \frac{4 \times 30 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3/s}}{3{,}14 \times 0{,}15^2\,\mathrm{m^2}} = 1{,}7\ \mathrm{m/s}$$

Οι απώλειες ενέργειας σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος δίδονται σε ύψος ρέοντος ρευστού. Αν πολλαπλασιασθούν με g γίνονται απώλειες ανα μονάδα μάζας. ´Ετσι έχουμε

$$h_L = \frac{w_L}{g} \Rightarrow w_L = h_L \cdot g \qquad w_L = \frac{12\,\bar{u}^2}{2} = 17{,}34\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$$

$$\boxed{\cancel{\frac{\Delta u^2}{2}} + g\Delta z + \cancel{\frac{\Delta p}{\varrho}} + w_L + w_s = 0}$$

Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση (3.129) μεταξύ των θέσεων (1) και (2) και με δεδομένο ότι στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού ισχύει $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0$ και $p_1 = p_2 = p_{atm}$, έχουμε

$$w_s = -w_L - gh \Rightarrow \dot{m}w_s = -\dot{m}\,(w_L + gh) \Rightarrow P_s = -\varrho\dot{V}\,(w_L + gh)$$

$$= -10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \times 30 \times 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{s}} \times \left(17{,}34\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} + 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \times 12\ \mathrm{m}\right) = -4{,}05\ \mathrm{kW}$$

W_s (+) : παράγει ενέργεια στο περιβάλλον, π.χ. στρόβιλος κινούμενος από ρευστό

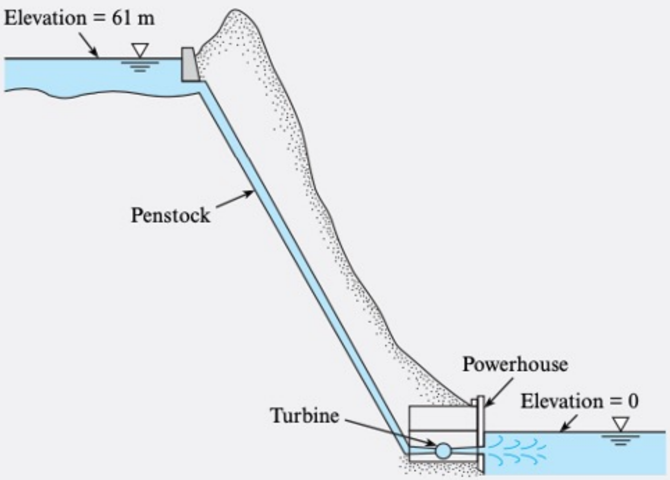
Το αρνητικό σημείο δηλώνει ότι ισχύς προσφέρεται από την αντλία στο νερό. Επειδή η απόδοση της αντλίας είναι 80 % ισχύει

W_s (-) : αντλία που καταναλώνει έργο από το περιβάλλον και το προσφέρει στο ρευστό

$$\frac{P_{\omega\varphi.}}{P_{\delta\alpha\pi.}} = 0{,}8 \Rightarrow P_{\delta\alpha\pi.} = \frac{P_{\omega\varphi.}}{0{,}8} = \frac{4{,}05\ \mathrm{kW}}{0{,}8} = 5{,}06\ \mathrm{kW}$$

Problem Statement

At the maximum rate of power generation, a small hydroelectric power plant takes a discharge of 14.1 m^3/s through an elevation drop of 61 m. The head loss through the intakes, penstock, and outlet works is 1.5 m. The combined efficiency of the turbine and electrical generator is 87%. What is the rate of power generation?

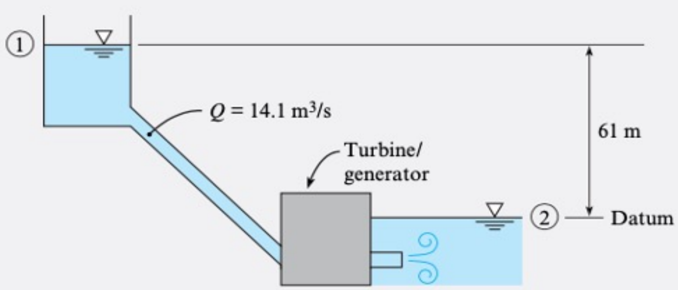


Define the Situation

A small hydroelectric plant is producing electrical power:

- Combined head loss: $h_L = 1.5$ m
- Combined efficiency (turbine/generator): $\eta = 0.87$

Properties: Water (10°C, 1 atm, Table A.5): $\gamma = 9810\ \text{N/m}^3$



Take Action (Execute the Plan)

1. Energy equation (general form):

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{\overline{V}_1^2}{2g} + z_1 + h_p = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{\overline{V}_2^2}{2g} + z_2 + h_t + h_L$$

2. Term-by-term analysis:
   - Velocity heads are negligible because $V_1 \approx 0$ and $V_2 \approx 0$.
   - Pressure heads are zero because $p_1 = p_2 = 0$ gage.
   - $h_p = 0$ because there is no pump in the system.
   - Elevation head terms are given.

3. Combine steps 1 and 2:

$$\begin{aligned} h_t &= (z_1 - z_2) - h_L \\ &= (61\ \text{m}) - (1.5\ \text{m}) = 59.5\ \text{m} \end{aligned}$$

   Physics: Head supplied to the turbine (59.5 m) is equal to the net elevation change of the dam (61 m) minus the head loss (1.5 m).

4. Power equation:

$$\begin{aligned} P_{\text{input to turbine}} &= \gamma Q h_t = (9810\ \text{N/m}^3)(14.1\ \text{m}^3/\text{s})(59.5\ \text{m}) \\ &= 8.23\ \text{MW} \end{aligned}$$

5. Efficiency equation:

$$\begin{aligned} P_{\text{output from generator}} &= \eta P_{\text{input to turbine}} = 0.87(8.23\ \text{MW}) \\ &= \boxed{7.16\ \text{MW}} \end{aligned}$$

EXAMPLE 7.5

Applying the Energy and Momentum Equations to Find Force on a Pipe Contraction

Problem Statement

A pipe 30 cm in diameter carries water (10°C, 250 kPa) at a rate of 0.707 m^3/s. The pipe contracts to a diameter of 20 cm. The head loss through the contraction is given by

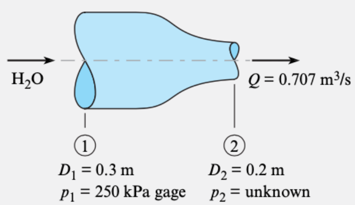
$$h_L = 0.1\frac{V_2^2}{2g}$$

where V_2 is the velocity in the 20 cm pipe. What horizontal force is required to hold the transition in place? Assume the kinetic energy correction factor is 1.0 at both the inlet and exit.

Define the Situation

Water flows through a contraction.

- $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.0$
- $h_L = 0.1\ (V_2^2/(2g))$



Properties: Water (10°C, 1 atm, Table A.5): $\gamma = 9810\ N/m^3$

State the Goal

F_x(N) ⬅ horizontal force acting on the contraction

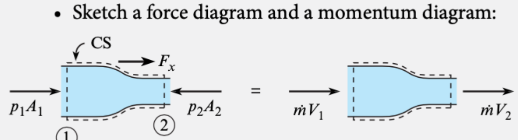
Generate Ideas and Make a Plan

Because force is the goal, start with the momentum equation. To solve the momentum equation, we need p_2. Find this with the energy equation. The step-by-step plan is as follows:

1. Derive an equation for F_x by applying the momentum equation.
2. Derive an equation for p_2 by applying the energy equation.
3. Calculate p_2.
4. Calculate F_x.

Take Action (Execute the Plan)

1. Momentum equation:
   - Sketch a force diagram and a momentum diagram:



   - Write the x direction momentum equation:

$$p_1A_1 - p_2A_2 + F_x = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1$$

   - Rearrange to give

$$F_x = \rho Q(V_2 - V_1) + p_2A_2 - p_1A_1$$

2. Energy equation (from section 1 to section 2):
   - Let $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $z_1 = z_2$, and $h_p = h_t = 0$.
   - Eq. (7.29) simplifies to

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_L$$

   - Rearrange to give

$$p_2 = p_1 - \gamma\left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} + h_L\right)$$

3. Pressure at section 2:
   - Find velocities using the flow rate equation:

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.707\ m^3/s}{(\pi/4)\times(0.3\ m)^2} = 10\ m/s$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.707\ m^3/s}{(\pi/4)\times(0.2\ m)^2} = 22.5\ m/s$$

   - Calculate head loss:

$$h_L = \frac{0.1\ V_2^2}{2g} = \frac{0.1\times(22.5\ m/s)^2}{2\times(9.81\ m/s^2)} = 2.58\ m$$

   - Calculate pressure:

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 - \gamma\left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} + h_L\right) \\ &= 250\ kPa - 9.81\ kN/m^3 \\ &\quad\times\left(\frac{(22.5\ m/s)^2}{2(9.81\ m/s^2)} - \frac{(10\ m/s)^2}{2(9.81\ m/s^2)} + 2.58\ m\right) \\ &= 21.6\ kPa \end{aligned}$$

4. Calculate F_x:

$$\begin{aligned} F_x &= \rho Q(V_2 - V_1) + p_2A_2 - p_1A_1 \\ &= (1000\ kg/m^3)(0.707\ m^3/s)(22.5 - 10)(m/s) \\ &\quad + (21{,}600\ Pa)\left(\frac{\pi(0.2\ m)^2}{4}\right) - (250{,}000\ Pa) \\ &\quad \times\left(\frac{\pi(0.3\ m)^2}{4}\right) \\ &= (8837 + 677 - 17{,}670)N = -8.16\ kN \end{aligned}$$

$$\boxed{F_x = 8.16\ kN\ \text{acting to the left}}$$

Υδραυλική γραμμή και γραμμή ενέργειας

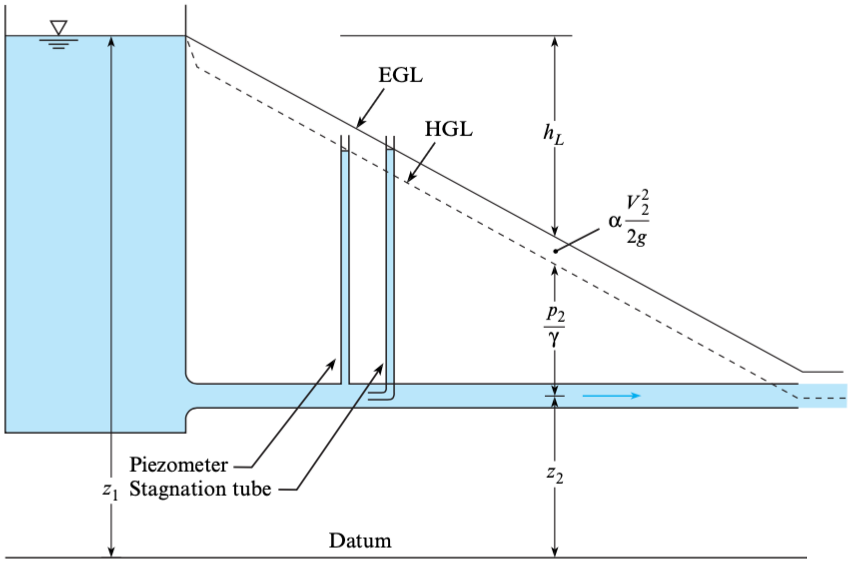
The Hydraulic and Energy Grade Lines

$$\text{EGL} = \begin{pmatrix}\text{velocity}\\ \text{head}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{pressure}\\ \text{head}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{elevation}\\ \text{head}\end{pmatrix} = \alpha\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \begin{pmatrix}\text{total}\\ \text{head}\end{pmatrix}$$

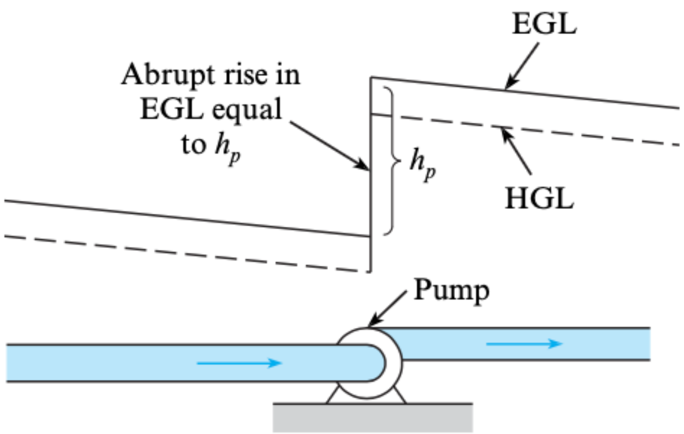
$$\text{HGL} = \begin{pmatrix}\text{pressure}\\ \text{head}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{elevation}\\ \text{head}\end{pmatrix} = \frac{p}{\gamma} + z = \begin{pmatrix}\text{piezometric}\\ \text{head}\end{pmatrix}$$

1. In a lake or reservoir, the HGL and EGL will coincide with the liquid surface. Also, both the HGL and EGL will indicate piezometric head.
2. A pump causes an abrupt rise in the EGL and HGL by adding energy to the flow. For example, see Figure 7.12.
3. For steady flow in a pipe of constant diameter and wall roughness, the slope ($\Delta h_L/\Delta_L$) of the EGL and the HGL will be constant. For examples, see Figures 7.11 to 7.13.
4. Locate the HGL below the EGL by a distance of the velocity head ($\alpha V^2/2g$).
5. The height of the EGL decreases in the flow direction unless a pump is present.

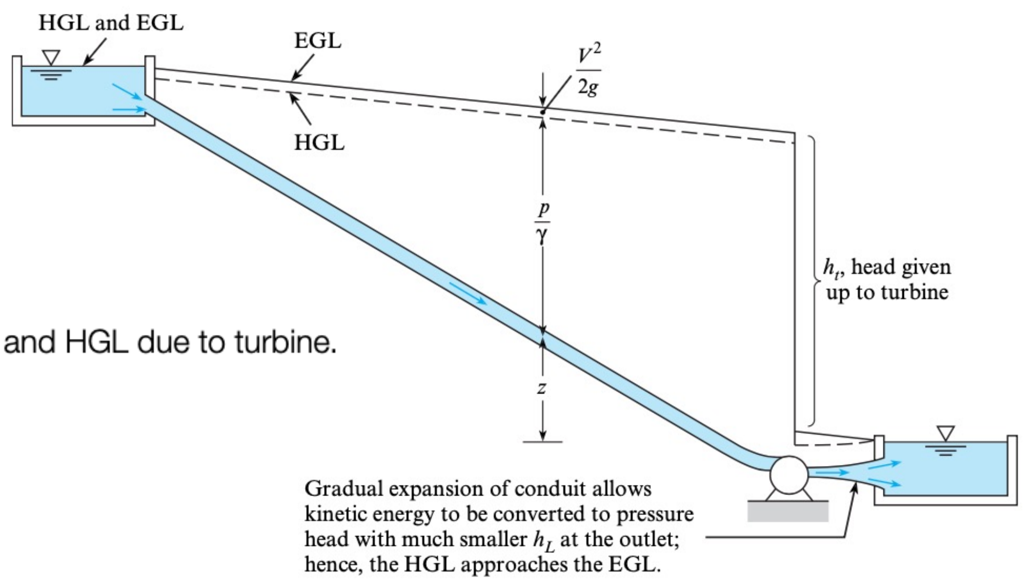
Υδραυλική γραμμή και γραμμή ενέργειας
Παραδείγματα



EGL and HGL in a straight pipe.

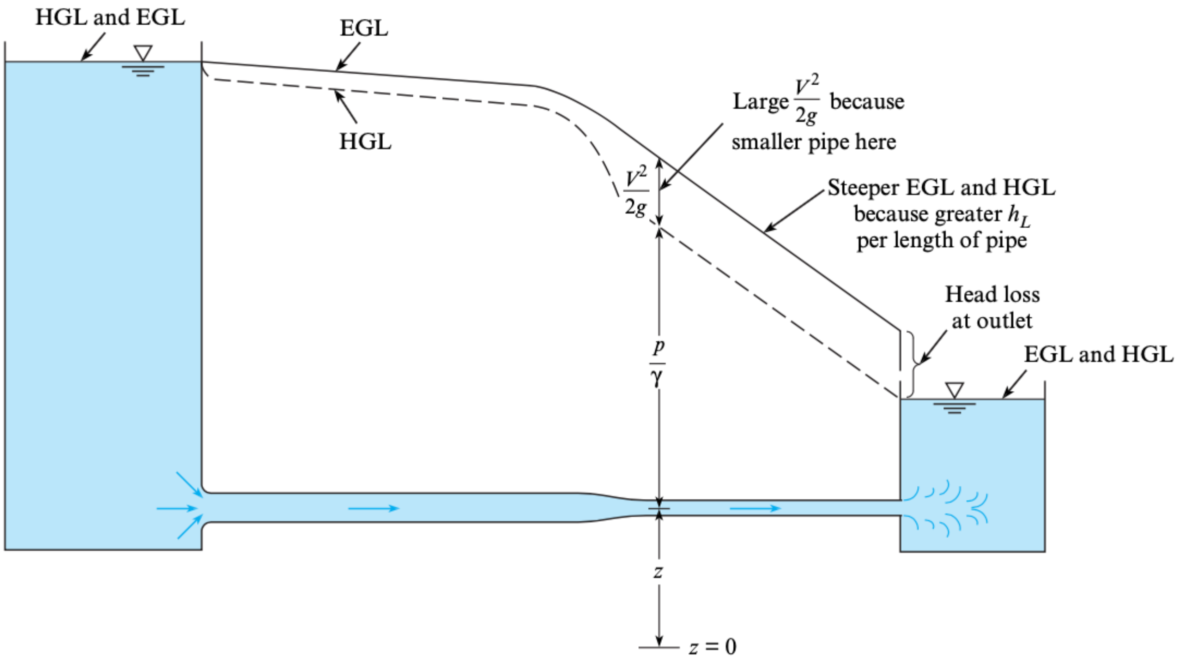


Rise in EGL and HGL due to pump.

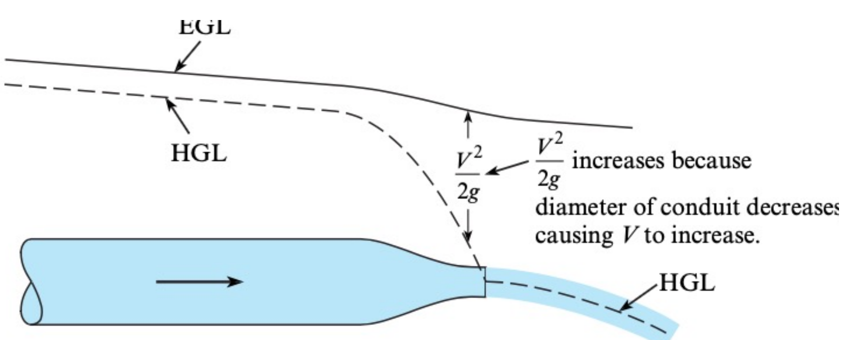


Drop in EGL and HGL due to turbine.

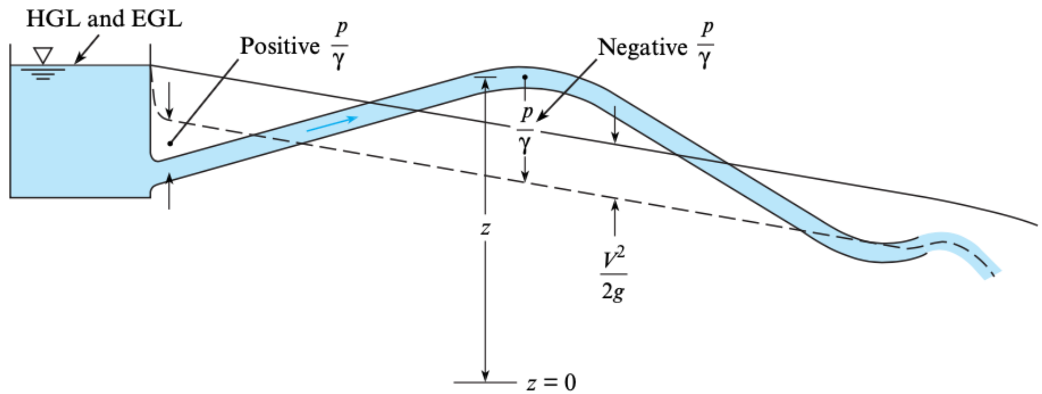
Υδραυλική γραμμή και γραμμή ενέργειας
Παραδείγματα



Change in EGL and HGL due to change in diameter of pipe.



Change in HGL and EGL due to flow through a nozzle.



Subatmospheric pressure when pipe is above HGL.

EXAMPLE 7.6

Sketching the EGL and HGL for a Piping System

Problem Statement

A pump draws water (50°F) from a reservoir, where the water surface elevation is 520 ft, and forces the water through a pipe 5000 ft long and 1 ft in diameter. This pipe then discharges the water into a reservoir with water surface elevation of 620 ft. The flow rate is 7.85 cfs, and the head loss in the pipe is given by

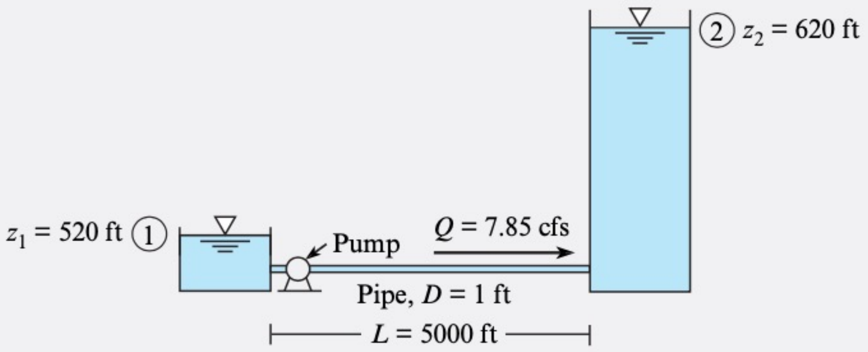
$$h_L = 0.01\left(\frac{L}{D}\right)\left(\frac{V^2}{2g}\right)$$

Determine the head supplied by the pump, h_p, and the power supplied to the flow, and draw the HGL and EGL for the system. Assume that the pipe is horizontal and is 510 ft in elevation.

Define the Situation

Water is pumped from a lower reservoir to a higher reservoir.

- $h_L = 0.01\left(\frac{L}{D}\right)\left(\frac{V^2}{2g}\right)$
- **Properties:** Water (50°F, 1 atm, Table A.5): $\gamma = 62.4\ \text{lbf/ft}^3$



State the Goals

1. h_p(ft) ⬅ pump head
2. P(hp) ⬅ power supplied by the pump
3. Draw the HGL and the EGL.

Generate Ideas and Make a Plan

Because pump head and power are goals, apply the energy equation and the power equation, respectively. The step-by-step plan is as follows:

1. Locate section 1 and section 2 at the top of the reservoirs (see sketch). Then, apply the energy equation (7.29).
2. Calculate terms in the energy equation.
3. Calculate power using the power equation (7.30a).
4. Draw the HGL and EGL.

Take Action (Execute the Plan)

1. Energy equation (general form):

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + z_1 + h_p = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + z_2 + h_t + h_L$$

- Velocity heads are negligible because $V_1 \approx 0$ and $V_2 \approx 0$.
- Pressure heads are zero because $p_1 = p_2 = 0$ gage.
- $h_t = 0$ because there are no turbines in the system.

$$h_p = (z_2 - z_1) + h_L$$

Interpretation: Head supplied by the pump provides the energy to lift the fluid to a higher elevation plus the energy to overcome head loss.

2. Calculations:

- Calculate V using the flow rate equation:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{7.85\ \text{ft}^3/\text{s}}{(\pi/4)(1\ \text{ft})^2} = 10\ \text{ft/s}$$

- Calculate head loss:

$$h_L = 0.01\left(\frac{L}{D}\right)\left(\frac{V^2}{2g}\right) = 0.01\left(\frac{5000\ \text{ft}}{1.0\ \text{ft}}\right)\left(\frac{(10\ \text{ft/s})^2}{2 \times (32.2\ \text{ft/s}^2)}\right)$$

$$= 77.6\ \text{ft}$$

- Calculate h_p:

$$h_p = (z_2 - z_1) + h_L = (620\ \text{ft} - 520\ \text{ft}) + 77.6\ \text{ft} = \boxed{178\ \text{ft}}$$

3. Power:

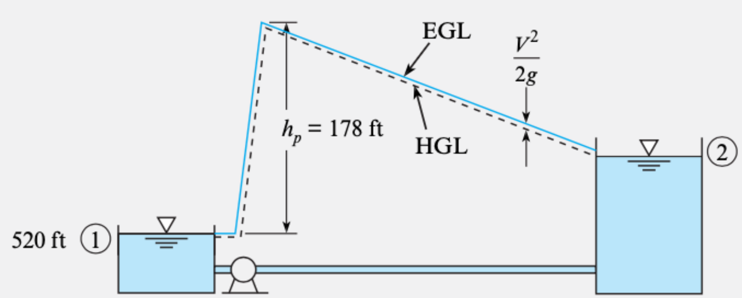
$$\dot{W}_p = \gamma Q h_p = \left(\frac{62.4\ \text{lbf}}{\text{ft}^3}\right)\left(\frac{7.85\ \text{ft}^3}{\text{s}}\right)(178\ \text{ft})\left(\frac{\text{hp} \cdot \text{s}}{550\ \text{ft} \cdot \text{lbf}}\right)$$

$$= \boxed{159\ \text{hp}}$$

4. HGL and EGL:

- From Tip 1 in the preceding section, locate the HGL and EGL along the reservoir surfaces.
- From Tip 2, sketch in a head rise of 178 ft corresponding to the pump.
- From Tip 3, sketch the EGL from the pump outlet to the reservoir surface. Use the fact that the head loss is 77.6 ft. Also, sketch EGL from the reservoir on the left to the pump inlet. Show a small head loss.
- From Tip 4, sketch the HGL below the EGL by a distance of $V^2/2g \approx 1.6$ ft.
- From Tip 5, check the sketches to ensure that EGL and HGL are decreasing in the direction of flow (except at the pump).

The sketch follows. The HGL is shown as a dashed black line. The EGL is shown as a solid blue line.



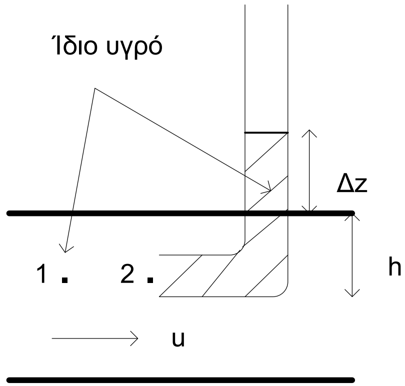
Επαναληπτικές ασκήσεις

Μέτρηση της ταχύτητας ενός υγρού

Σημείο 2: Σημείο ανακοπής u = *0*

Πίεση κρούσης – Δυναμική πίεση

ανεβάζει το υγρό κατά *Δz*

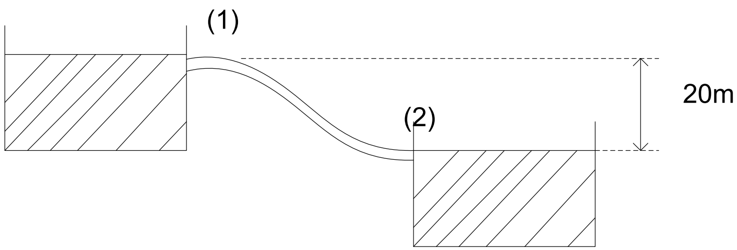


Όχι τριχοειδή φαινόμενα – μεγάλη διατομή σωλήνα

$$\frac{u_1}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{u_2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2$$

$$\frac{u_1}{2g} + h = h + \Delta z \Rightarrow \boxed{u_1 = \sqrt{2g\Delta z}} \quad \Leftarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = z_2 \\ \dfrac{P_1}{\gamma} = h \\ \dfrac{P_2}{\gamma} = h + \Delta_z \\ u_2 = 0 \end{array} \right.$$

Επαναληπτικές ασκήσεις



Σωλήνας μεταφέρει νερό από την πάνω στην κάτω δεξαμενή. Αν η παροχή είναι 1 lit/sec, να υπολογιστούν οι απώλειες σε m και Watt

$$\cancelto{0}{\frac{\Delta u^2}{2g}} + \Delta z + \cancelto{0}{\frac{\Delta p}{\gamma}} + \frac{W_L}{g} + \cancelto{0}{\frac{W_S}{g}} = 0$$

$$\Delta z = H_L = \frac{W_L}{g} \Rightarrow H_L = 20m$$

$$\boxed{W_L = H_L \cdot g} = 196{,}2\ Watt$$

$$\text{ή } \dot{W}_L = W_L \cdot \dot{m} = W_L \cdot \rho \cdot Q$$

$$= H_L \cdot g \cdot \rho \cdot Q \boxed{= \gamma \cdot Q \cdot H_L}$$

$$= (20m) \cdot \left(9{,}81\ {}^{m}/_{s^2}\right) \cdot 1000 \left({}^{kg}/_{m^3}\right) \cdot \left(0{,}001\ {}^{m^3}/_{s}\right)$$

$$= 196{,}2\ Watt$$

$$p_1 = p_2 = p_{atm} \Rightarrow \Delta p = 0$$

$$\Delta z = 20\ m$$

$A_1 = A_2$ επειδή $Q = u_1 A_1 = u_2 A_2 \Rightarrow$

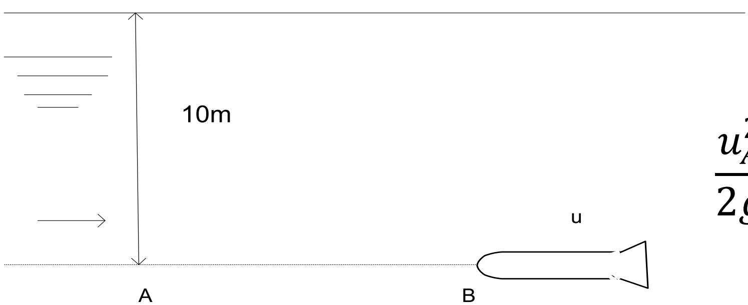
$$\Rightarrow u_1 = u_2 \Rightarrow \frac{\Delta u^2}{2} = 0$$

Επαναληπτικές ασκήσεις

Να υπολογιστεί η πίεση σε Atm στον επικρουστήρα τορπίλης, η οποία κινείται με 40m/sec σε 10m βάθος

γ νερού θαλ.=1,100 kp/m^3

P_{atm} = πίεση στήλης νερού 10 m



$$\frac{u_A^2}{2g} + z_A + \frac{P_A}{\gamma} = \frac{u_B^2}{2g} + z_B + \frac{P_B}{\gamma} \Rightarrow$$ πολλαπλασιάζω με γ

$$z_A = z_B$$

$$u_B = 0, u_A = 40\, {}^{m}/_{s}$$

$$P_{atm} = 10\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{1}{10} P_{atm}$$

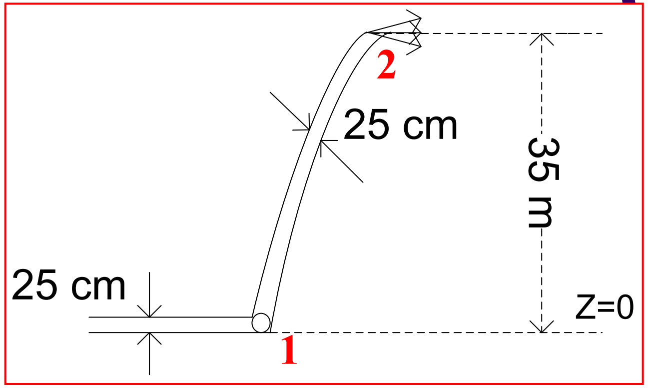
$$P_A = P_{atm} + 10\gamma = P_{atm} + 10 \frac{1}{10} P_{atm} = 2P_{atm}$$

$$\frac{\gamma 40^2}{2g} + P_A = P_B \Rightarrow$$

$$\frac{1}{10} P_{atm} \frac{40^2}{2g} + 2P_{atm} = P_B$$

$$\boxed{P_B = 10{,}15 P_{atm}}$$

Επαναληπτικές ασκήσεις



Αντλία παρέχει ύψος H_A=50m σε νερό που μεταφέρεται με αγωγό ίδιας διαμέτρου από το (1) στο (2).

Πίεση στο (1) = 60cm Hg

Απώλειες από (1) στο (2): $H_L = 8\dfrac{u^2}{2g}$

Να υπολογιστεί **<u>η Παροχή</u>**

$$P_{atm} = 76\ cm\ Hg$$

$$\gamma = 1000\ {}^{kp}/_{m^3}$$

$$\gamma_{Hg} = 13600\ {}^{kp}/_{m^3}$$

$$\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma_{H_2O}} = 13{,}6$$

$$\boxed{\frac{\Delta u^2}{2} + \Delta z + \frac{\Delta p}{\gamma} + \frac{w_L}{g} + \frac{w_S}{g} = 0}$$

$$\frac{u_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + H_A = \frac{u_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + H_L$$

$$Επειδή\ Q = u_1 A_1 = u_2 A_2 \qquad \Rightarrow u_1 = u_2 = u$$

$$A_1 = A_2$$

$$Επίσης\ p_2 = p_{atm} = 76\ cm\ Hg$$

$$z_1 = 0, z_2 = 35\ m$$

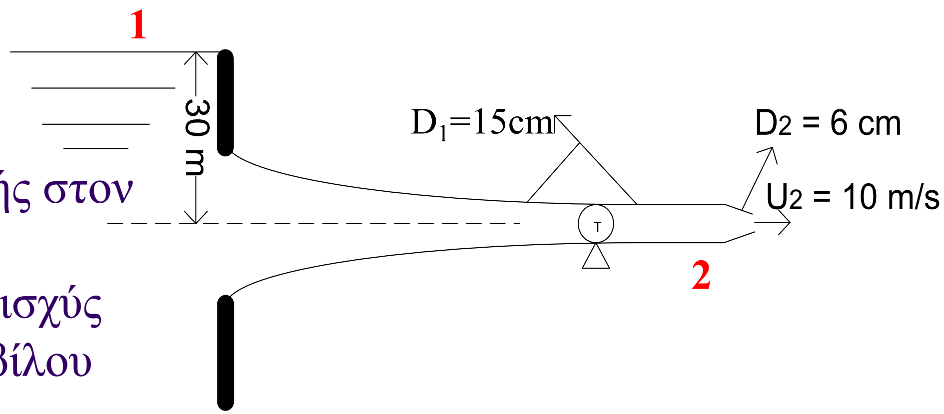
$$\Rightarrow \frac{p_1}{\gamma} + 50 = 35 + \frac{p_2}{\gamma} + 8\frac{u^2}{2g} \quad \Rightarrow \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + 15 = \frac{4u^2}{g} \quad \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{4}\left(\left(\frac{p_1 - p_2}{\gamma}\right) + 15\right)} = u$$

$$\Rightarrow \boxed{u = 5{,}61\ {}^{m}/_{s}} \qquad Παροχή\ Q = A \cdot u = \pi R^2 \cdot u = 0{,}275\ {}^{m^3}/_{s}$$

Επαναληπτικές ασκήσεις

Παράδειγμα

Αγνοώντας τις απώλειες τριβής στον αγωγό, να υπολογιστεί η ισχύς του υδροστροβίλου



Εξίσωση Ενέργειας

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{u_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{u_2^2}{2g} + H_T$$

$$p_1 = p_2 = p_{atm}$$

$$z_2 = 0$$

$$u_1 = 0$$

$$H_T = z_1 - \frac{u_2^2}{2g} = 30 - \frac{10^2}{2 \times 9{,}81} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H_T = 24{,}9\ m}$$

$$1000\ {}^{kp}/_{m^3} = 9810\ {}^{N}/_{m^3}$$

$$W_T = \gamma Q H_T \Rightarrow W_T = 9810 \cdot 0{,}0283 \cdot 24{,}9 = 6{,}9\ kW$$

$$Q = u_2 A_2 = 10\ {}^{m}/_{s} \cdot \pi(0{,}03)^2 = 0{,}0283\ {}^{m^3}/_{s}$$

Ισχύς ανά μονάδα μάζας

$$\boxed{W_T = H_T \cdot g \Rightarrow \dot{W}_T = H_T \cdot g \cdot \dot{m} = H_T \cdot g \cdot \rho \cdot Q = H_T \cdot g \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot Q \Rightarrow \dot{W}_T = \gamma Q H_T}$$