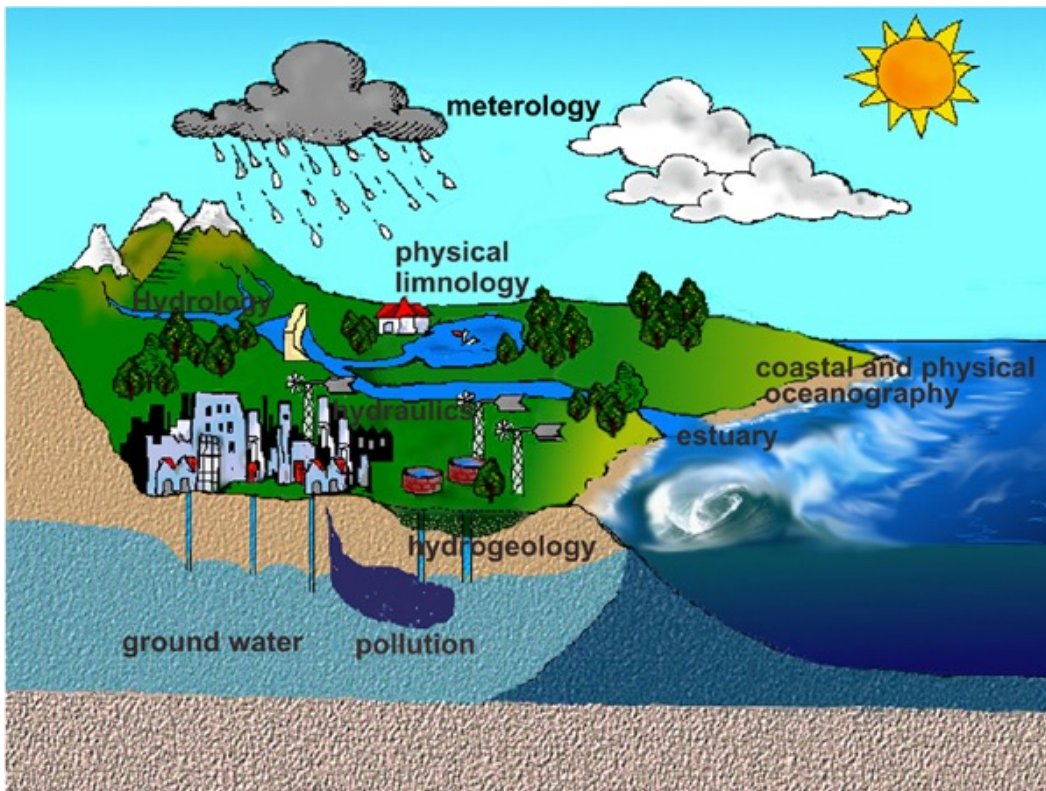


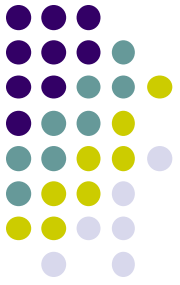
Κινηματική των Ρευστών



Κινηματική των Ρευστών

van Gogh – starry night





Kolmogorov scaling in impassioned van Gogh paintings

J.L. Aragón

Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada, Universidad Nacional Autónoma de México,
Apartado Postal 1-1010, Querétaro 76000, México.

Gerardo G. Naumis

Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México,
Apartado Postal 20-364, 01000 México, Distrito Federal.

M. Bai

Laboratorio de Física de Sistemas Pequeños y Nanotecnología,
Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Serrano 144, 28006 Madrid, Spain.

M. Torres

Instituto de Física Aplicada, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Serrano 144, 28006 Madrid, Spain.

P.K. Maini

Centre for Mathematical Biology, Mathematical Institute, 24-29 St Giles Oxford OX1 3LB, U.K.

We show that some impassioned van Gogh paintings display scaling properties similar to the observed in turbulent fluids, suggesting that these paintings reflect the fingerprint of turbulence with such a realism that is even consistent with the way that a mathematical model characterizes this phenomenon. Specifically, we show that the probability distribution function (PDF) of luminance fluctuations of points (pixels) separated by a distance R is consistent with the Kolmogorov scaling theory in turbulent fluids. We also show that the most turbulent paintings of van Gogh coincide with periods of prolonged psychotic agitation of this artist.

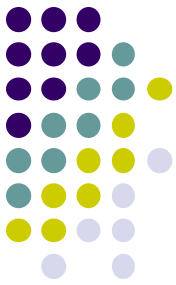
PACS numbers: 47.27.Jv, 01.50.fh, 42.68.Bz

Everything in the last period of Vincent van Gogh paintings transmit his own feelings about a figure or a landscape. It has *Starry Night*, vividly transmits the sense of turbulence and was NASA/ESA Hubble Space Telescope, where eddies probably cut is the purpose of this paper to show that some impassioned van psychotic agitation of this artist, reflect the fingerprint of turbulence the Kolmogorov scaling theory in turbulent fluids. Specifically (PDF) of luminance fluctuations (δu) of points (pixels) separate Gogh paintings, is the same as the PDF of the velocity difference in a turbulent flow as predicted by the statistical theory of Kol behavior is observed in a field far different from fluid mechanics; of the foreign exchange markets time series [2].

We mainly study van Gogh's *Starry Night* (June 1889), which Also, as samples of another turbulent pictures, we analyze *Road with Cypress and Star* (May 1890) and *Wheat Field with Crows* (July 1890, just before van Gogh shot himself). By considering the analogy with the Kolmogorov scaling theory, from our results we can conclude that Vincent van Gogh was capable of capturing the fingerprint of turbulence. Our results also reinforce the idea that scientific objectivity may help to determine the fundamental content of artistic paintings, as was already done with Jackson Pollock's fractal paintings [3, 4]. Along this same ideas, it is also worthy to mention that another notable ability of van Gogh was recently remarked with an experiment with bumblebees that had never seen natural flowers; insects were more attracted by van Gogh's *Sunflowers* than by other paintings containing flowers [5]. From this observation, Chittka and Walker suggest that van Gogh's flower paintings have captured the essence of floral features from a bee's point of view.

The statistical model of Kolmogorov [6, 7] is a foundation for modern turbulence theory. The main idea is that at very large Reynolds numbers, between the large scale of energy input (L) and the dissipation scale (η), at which viscous frictions become dominant, there is a myriad of small scales where turbulence displays universal properties independent of initial and boundary conditions. In particular, in the inertial range Kolmogorov predicts a famous scaling property of the second order structure function, $S_2(\mathbf{R}) = \langle (\delta v)^2 \rangle$, where $\delta v = \langle (v(\mathbf{r} + \mathbf{R}) - v(\mathbf{r}))^2 \rangle$ is the velocity increment

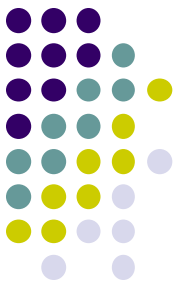
We show that some impassioned van Gogh paintings display scaling properties similar to the observed in turbulent fluids, suggesting that these paintings reflect the fingerprint of turbulence with such a realism that is even consistent with the way that a mathematical model characterizes this phenomenon. Specifically, we show that the probability distribution function (PDF) of luminance fluctuations of points (pixels) separated by a distance R is consistent with the Kolmogorov scaling theory in turbulent fluids. We also show that the most turbulent paintings of van Gogh coincide with periods of prolonged psychotic agitation of this artist.



Πρόβλημα	Γενική αντιμετώπιση	Πως	Με τι	Δηλαδή	
Ροή ρευστών	Κίνηση σωματιδίων ρευστών	Νόμοι Μηχανικής	Δύναμη	Διατμητικές τάσεις, πιέσεις	Δυναμική ρευστών
			ταχύτητα, επιτάχυνση		Κινηματική ρευστών
Μελέτη ροής ρευστών	Μακροσκοπική ανάλυση	Μελέτη όγκων ελέγχου ρευστού (πεπερασμένων διαστάσεων)	Εξισώσεις συνέχειας-μάζας	Μέσες τιμές παραμέτρων	
			Εξισώσεις ορμής		
			Εξισώσεις ενέργειας		
	Διαφορική Ανάλυση	Όγκοι ελέγχου απειροστών διαστάσεων	Αρχή Διατήρησης μάζας	Διαφορικές εξισώσεις Μάζας, Ορμής, Ενέργειας (κατανομή και μέσες τιμές)	
Αρχή Διατήρησης ορμής					
Αρχή Διατήρησης ενέργειας					
Διαστατική Ανάλυση	Θεωρητική η/και μαθηματική επίλυση (όχι ευχερής)	Πειραματική μελέτη (φυσικά και γεωμετρικά μεγέθη) σε αριθμό αδιάστατων ομάδων για συσχέτιση			

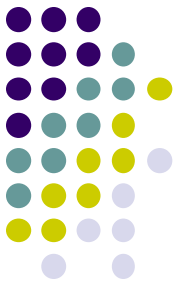


Διαφορές μεταξύ μακροσκοπικών και διαφορικών εξισώσεων ροής



ΜΑΚΡΟΣΚΟΠΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
1 Εκφράζουν τους νόμους διατήρησης της μάζας, ορμής και ενέργειας για μία περιοχή του χώρου.	Εκφράζουν τους νόμους της διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας σε ένα σημείο του χώρου.
2 Περιγράφουν γενικά το πεδίο ροής και ενδιαφέρουν τους ασχολούμενους με πρακτικά προβλήματα ροής ρευστών.	Περιγράφουν αναλυτικά το πεδίο ροής και ενδιαφέρουν τους ασχολούμενους με τη θεωρητική μελέτη της ροής ρευστών.
3 Εφαρμόζονται σε όγκους πεπερασμένου μεγέθους και δίνουν μέσες τιμές των μεγεθών.	Εφαρμόζονται σε όγκους απειροστού μεγέθους και δίνουν ακριβείς τιμές των μεταβλητών.

Ορισμοί



Πεδίο : Συγκεκριμένη περιοχή του χώρου, σε κάθε σημείο της οποίας κάθε φυσικό μέγεθος έχει μια ορισμένη τιμή (σταθερή ή μεταβλητή).

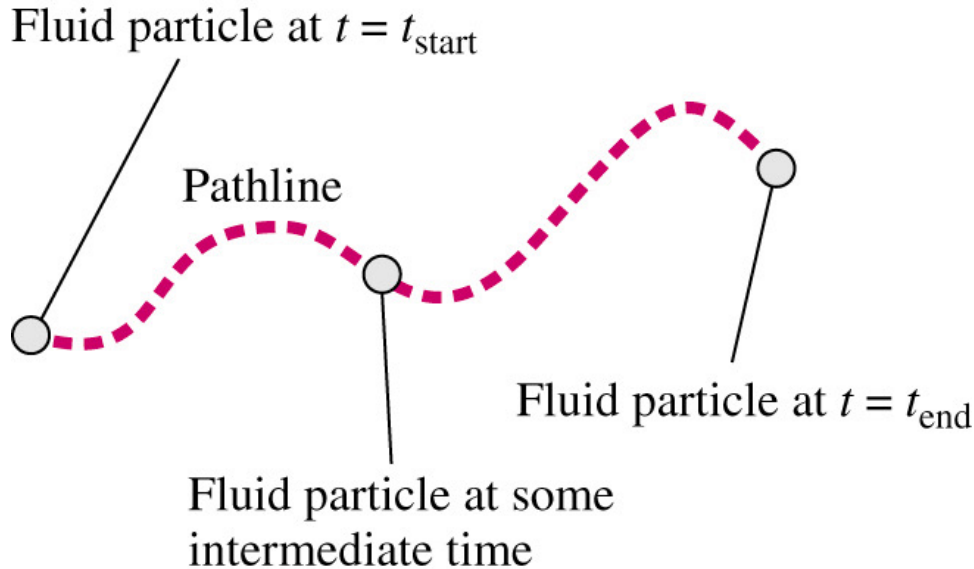
Έστω φυσικό μέγεθος $A \Rightarrow$ το πεδίο των A είναι μια συνάρτηση της μορφής $A(x, y, z, t)$

Βαθμωτό Πεδίο π.χ. το πεδίο της πυκνότητας $\rho = \rho(x, y, z, t)$ (μέτρο)

Διανυσματικό πεδίο π.χ. το πεδίο της ταχύτητας
 $U = U(x, y, z, t)$ (μέτρο, δ / νση, φορά)

Πεδίο ροής : Ο χώρος μέσα στον οποίο κινείται ένα ρευστό. Είναι καθορισμένο όταν δίνονται οι τιμές των μεταβλητών του (πυκνότητα, ταχύτητα) σε κάθε σημείο του και σε κάθε στιγμή.

Τροχιά – Pathline



- A **Pathline** is the actual path traveled by an individual fluid particle over some time period.

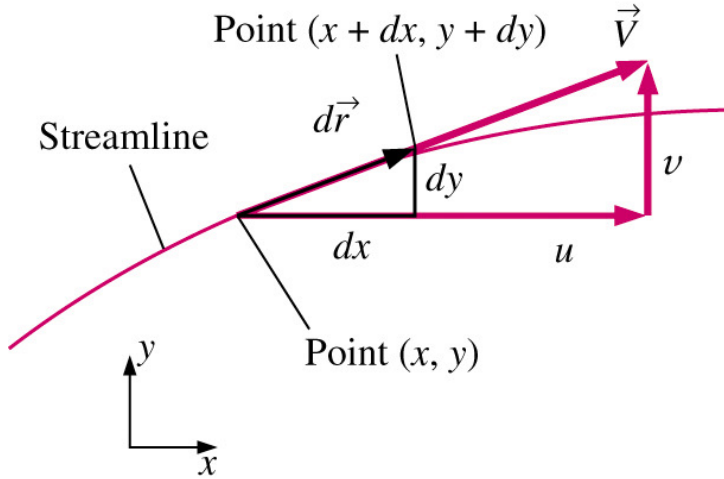
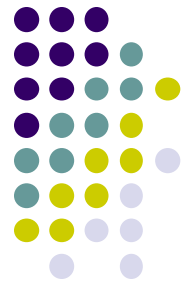
- Same as the fluid particle's material position vector

$$\left(x_{\text{particle}}(t), y_{\text{particle}}(t), z_{\text{particle}}(t) \right)$$

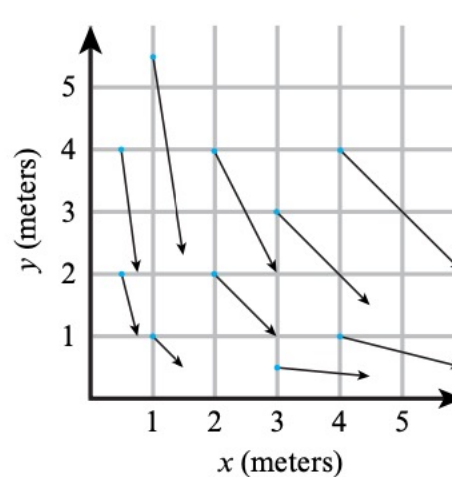
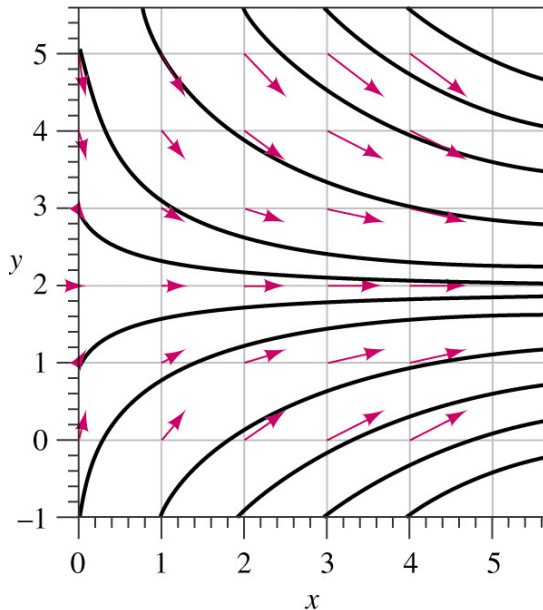
- Particle location at time t :

$$\vec{x} = \vec{x}_{\text{start}} + \int_{t_{\text{start}}}^t \vec{V} dt$$

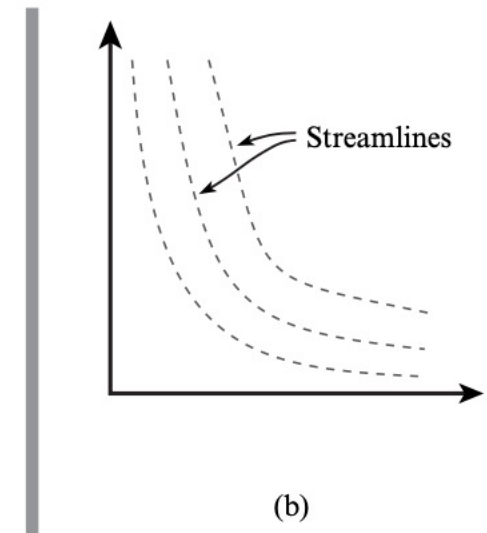
Γραμμή Ροής - Streamline



- A **Streamline** is a curve that is everywhere tangent to the *instantaneous* local velocity vector.
- Intersection of two path lines are possible whereas two streamlines can never intersect each other
- Path line consider single fluid particle whereas streamline shows multiple fluid particles directions

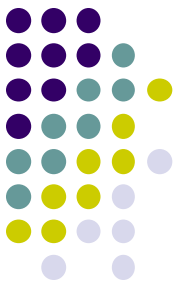


(a)



(b)

Γραμμές Ροής - Streamlines

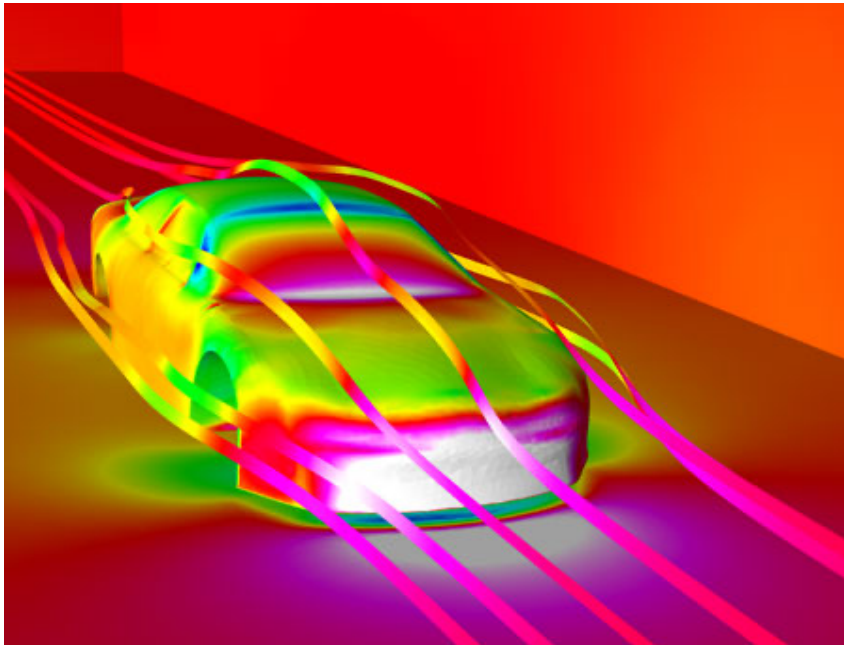


Stream lines give the instantaneous picture of a particle in a fluid flow.

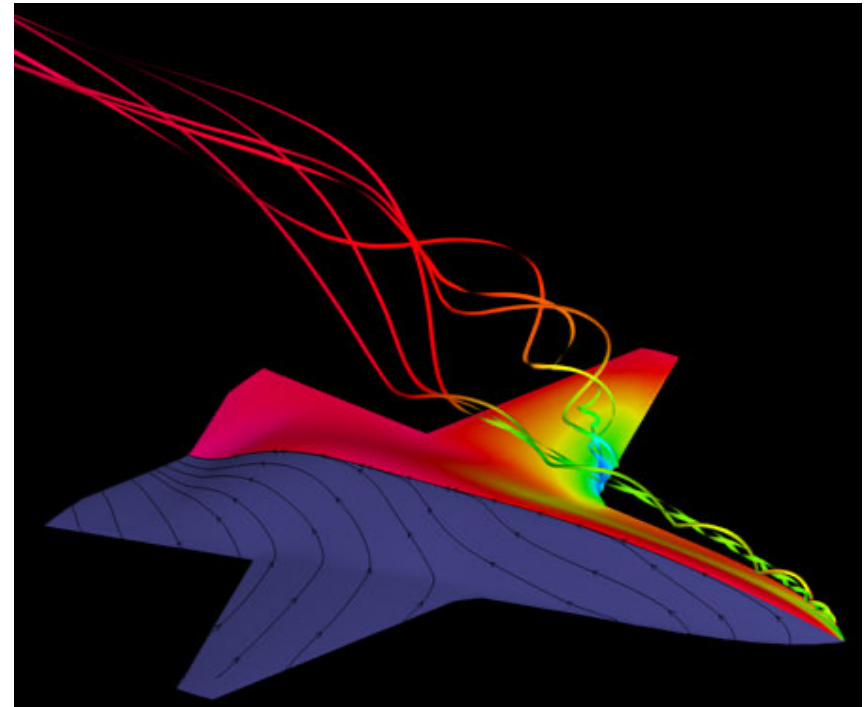
Streak lines and path lines give the particle motion in a particular period of time.

In steady flow of the fluid all streamline, streak line and path lines coincide with each other.

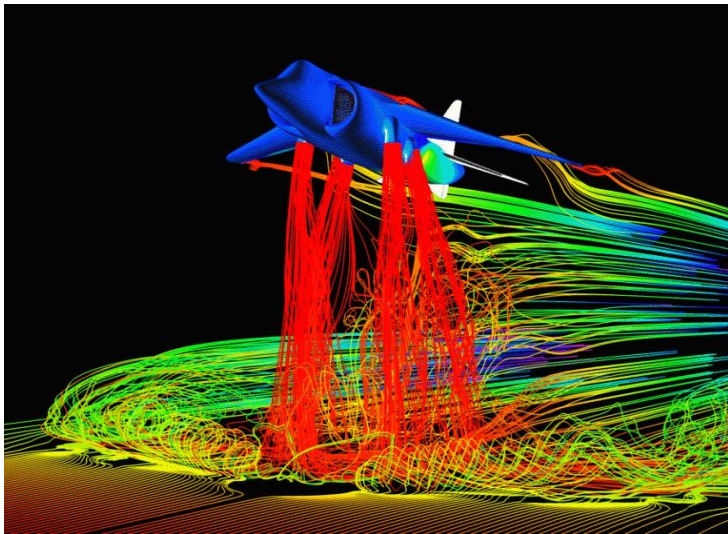
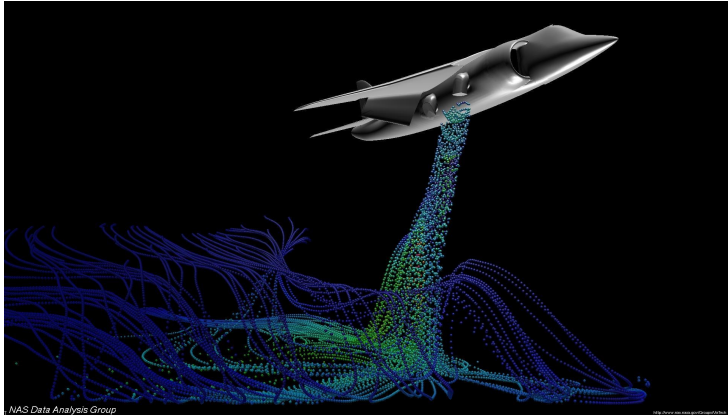
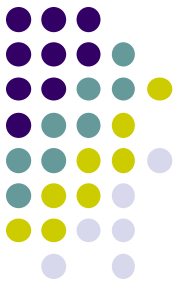
NASCAR surface pressure contours and streamlines



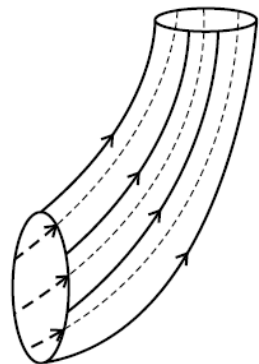
Airplane surface pressure contours, and streamlines



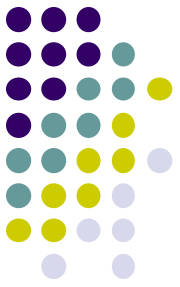
Γραμμή Διέλευσης ή Ινώδης φλέβα- Streakline



- Γραμμή που δημιουργείται από ένα ρευστό που αφήνει ίχνη όπως είναι μια βαφή που εκχύεται συνεχώς σε ένα πεδίο ροής σε κάποιο σημείο του
- Ινώδης φλέβα ή γραμμή διέλευσης είναι ο τύπος των σωματιδίων ρευστού που έχουν περάσει διαδοχικά από ένα σημείο της ροής.
- Εμφανής σε πειράματα : βαφή σε ροή νερού ή καπνός σε ροή αέρα.
- **Ροϊκός σωλήνας:** Κάθε κλειστή επιφάνεια που σχηματίζεται από ένα άπειρο αριθμό ροϊκών γραμμών.

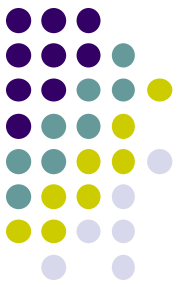


Συγκρίσεις



- Για **σταθερή ροή**, τροχιά, γραμμή ροής και ινώδης φλέβα είναι ίδιες
- Για **μη σταθερή ροή** μπορεί να είναι πολύ διαφορετικές.
 - Οι **γραμμές ροής** (streamlines) είναι μια στιγμιαία φωτογραφία του πεδίου ροής
 - Οι **τροχιές** (pathlines) και η ινώδης φλέβα (streaklines) είναι η μορφή και το αχνάρι της ροής συνδεδεμένα με τη χρονική τους ιστορία
 - **Ινώδης φλέβα**: στιγμιαία απεικόνιση μιας ροής ολοκληρωμένης χρονικά (instantaneous snapshot of a time-integrated flow pattern)
 - **Τροχιά**: εκτεθειμένη στο χρόνο διαδρομή ροής ενός μεμονωμένου σωματιδίου

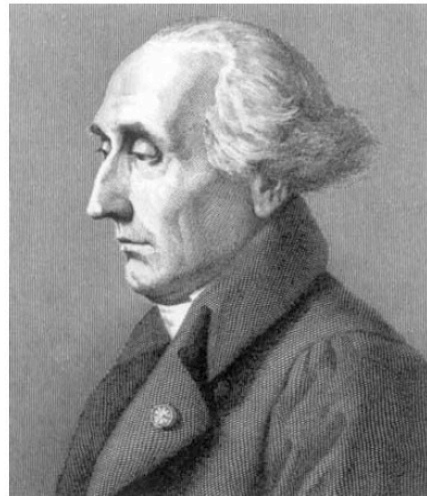
2 μέθοδοι



2 μέθοδοι για την περιγραφή του πεδίου ροής :

Μέθοδος Lagrange : Ο παρατηρητής παρακολουθεί την κίνηση ενός συγκεκριμένου στοιχείου του ρευστού καθώς αυτό κινείται στο πεδίο ροής.

Μέθοδος Euler : Ο παρατηρητής καταγράφει τις ιδιότητες του ρευστού σε μια συγκεκριμένη στοιχειώδη περιοχή του χώρου, καθώς το ρευστό διέρχεται από αυτήν.



Joseph Lagrange (1736-1813)



Leonhard Euler (1707-1783)

Analysis Approaches



- Lagrangian (system approach)
 - Describes a defined mass (position, velocity, acceleration, pressure, temperature, etc.) as functions of time
 - Παρακολουθεί τη θέση ενός μετακινούμενου πουλιού
- Eulerian
 - Describes the flow field (velocity, acceleration, pressure, temperature, etc.) as functions of position and time
 - Μετρά τα πουλιά που περνούν από μια συγκεκριμένη θέση

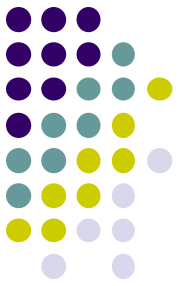
Αν μελετούσατε νερό που ρέει μέσα σε έναν αγωγό ποια προσέγγιση θα υιοθετούσατε? Eulerian

Μέθοδος Lagrange



- Named after Italian mathematician Joseph Louis Lagrange (1736-1813).
- Lagrangian description of fluid flow tracks the position and velocity of individual particles.
- Based upon Newton's laws of motion.
- **Difficult to use for practical flow analysis.**
 - Fluids are composed of *billions* of molecules.
 - Interaction between molecules hard to describe/model.
- However, **useful for specialized applications**
 - Sprays, particles, bubble dynamics, rarefied gases.
 - Coupled Eulerian-Lagrangian methods.

Μέθοδος Euler



- Eulerian description of fluid flow: a **flow domain** or **control volume** is defined by which fluid flows in and out.
- We define **field variables** which are functions of space and time.
 - Pressure field, $P=P(x,y,z,t)$
 - Velocity field, $\vec{V} = \vec{V}(x,y,z,t) \quad \vec{V} = u(x,y,z,t)\vec{i} + v(x,y,z,t)\vec{j} + w(x,y,z,t)\vec{k}$
 - Acceleration field, $\vec{a} = \vec{a}(x,y,z,t) \quad \vec{a} = a_x(x,y,z,t)\vec{i} + a_y(x,y,z,t)\vec{j} + a_z(x,y,z,t)\vec{k}$
 - These (and other) field variables define the **flow field**.
- Named after Swiss mathematician Leonhard Euler (1707-1783).

Σύγκριση των 2 μεθόδων

(βλ. Πίνακας 4.1)



Feature	Lagrangian Approach	Eulerian Approach
Basic idea	Observe or describe the motion of matter of fixed identity.	Observe or describe the motion of matter at spatial locations.
Solid mechanics (application)	Used in dynamics.	Used in elasticity. Can be used to model the flow of materials.
Fluid mechanics (application)	Fluid mechanics uses many Eulerian ideas (e.g., fluid particle, streakline, acceleration of a fluid particle). Equations in fluid mechanics are often derived from an Lagrangian viewpoint.	Nearly all mathematical equations in fluid mechanics are written using the Eulerian approach.
Independent variables	Initial position (x_0, y_0, z_0) and time (t) .	Spatial location (x, y, z) and time (t) .
Mathematical complexity	Simpler.	More complex; for example, partial derivatives and nonlinear terms appear.
Field concept	Not used in the Lagrangian approach.	The field is an Eulerian concept. When fields are used, the mathematics often includes the divergence, gradient, and curl.
Types of systems used	Closed systems, particles, rigid bodies, system of particles.	Control volumes.

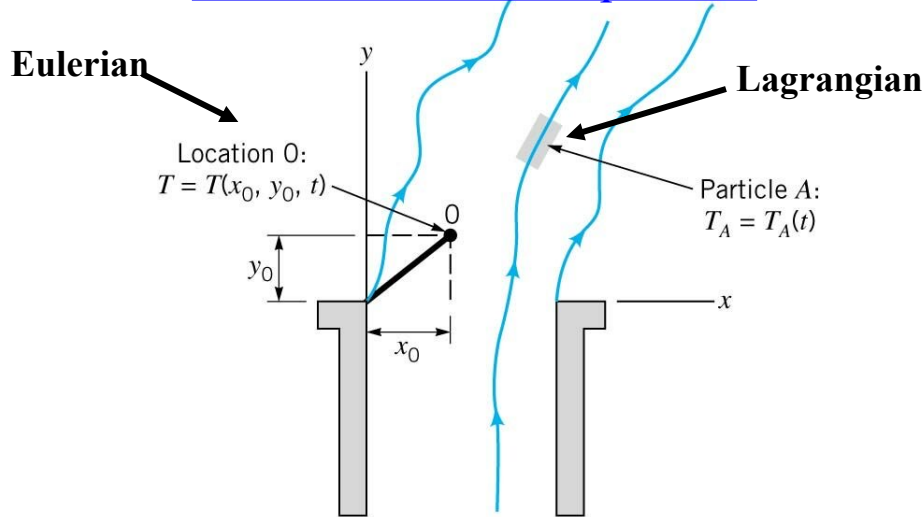
π.χ. Πεδίο Ταχύτητας: Eulerian and Lagrangian



Eulerian: the fluid motion is given by completely describing the necessary properties as a function of space and time. We obtain information about the flow by **noting what happens at fixed points**.

Lagrangian: following individual fluid particles as they move about and determining **how the fluid properties of these particles change** as a function of time.

Measurement of Temperature

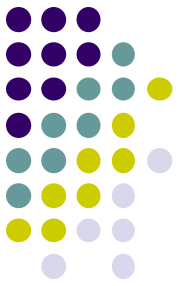


If we have enough information, we can obtain Eulerian from Lagrangian or vice versa.

Eulerian methods are commonly used in fluid experiments or analysis—a probe placed in a flow

Lagrangian methods can also be used if we “tag” fluid particles in a flow

Σύγκριση των 2 μεθόδων



Lagrangian: Select a body and describe its motion.

Eulerian: Describe the motion at spatial locations.

For example, for this particle the equations are

$$v = gt$$

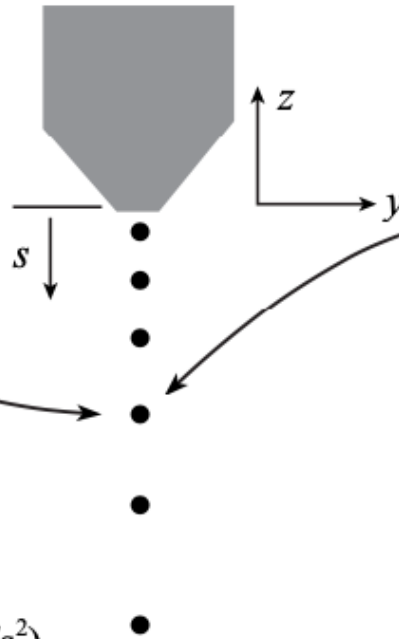
$$s = \frac{gt^2}{2}$$

v = speed of particle (m/s)

s = position from origin (m)

t = time to fall a distance s (s)

g = gravitational constant (9.81 m/s²)



For example, at any location in space, the speed of a particle is given by

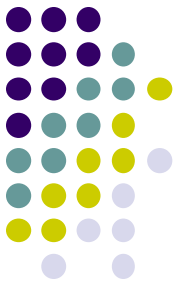
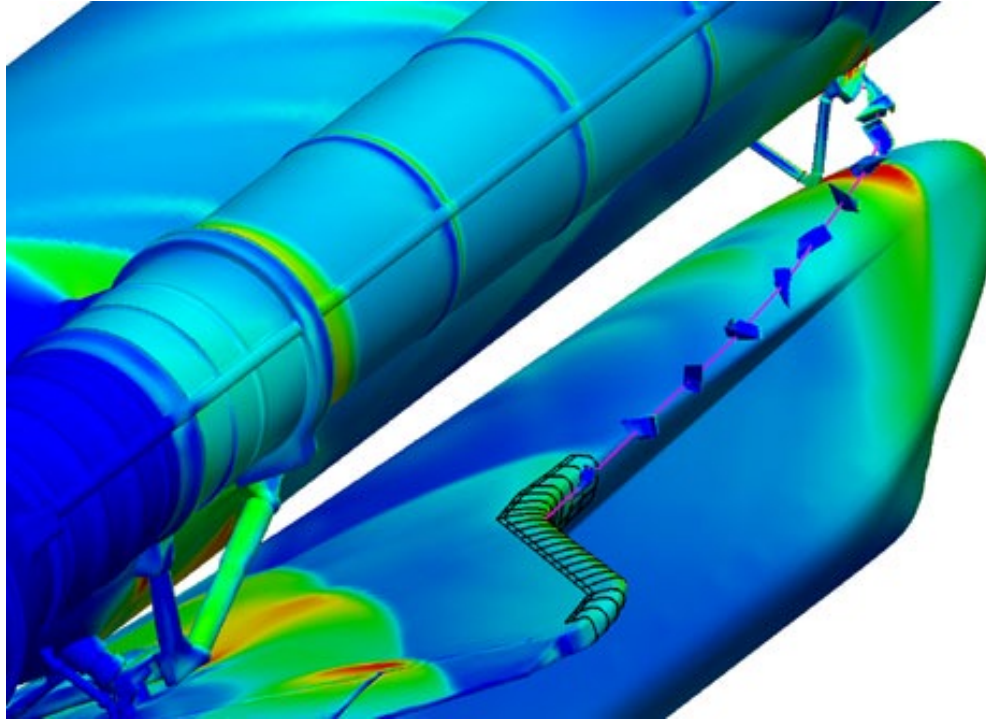
$$v = \sqrt{2g|z|}$$

v = speed at location z (m/s)

z = vertical location (m)

Παράδειγμα

Συνδυασμένη Eulerian-Lagrangian Method



Ιατροδικαστική ανάλυση του ατυχήματος Columbia:

Προσομοίωση της τροχιάς των συντριμμιών σαΐτας χρησιμοποιώντας

- τη μέθοδο Euler για το πεδίο ροής και
- τη μέθοδο Lagrange για τα συντρίμια.

Είδη ροής



Ασυμπίεστη ροή : Όταν η πυκνότητα του ρευστού σε κάθε σημείο του παραμένει σταθερή με το χρόνο (μεταβολή $< 1\%$)

Συμπιεστή ροή : Όταν οι μεταβολές της πυκνότητας με το χρόνο είναι σημαντικές ($> 1\%$). Συμπιεστότητα στα αέρια σημαντική σε υψηλές πιέσεις & υψηλές ταχύτητες.

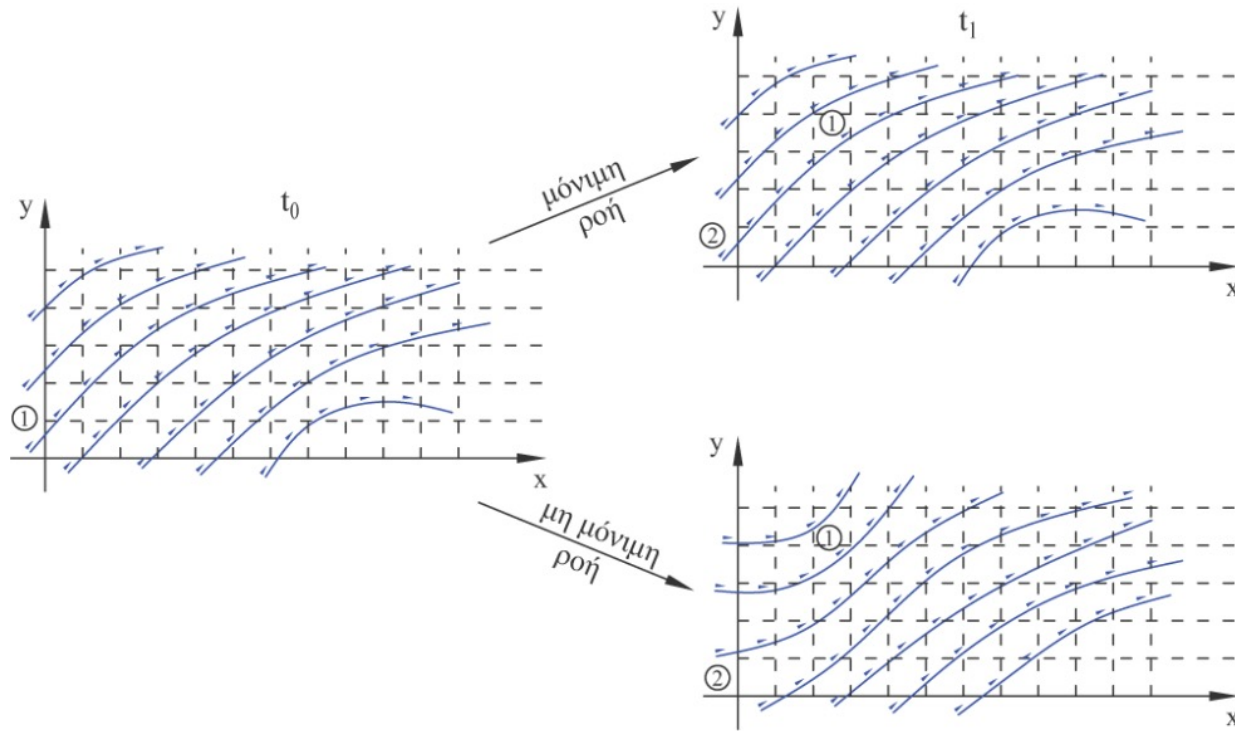
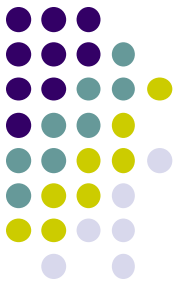
Αν $\text{Mach} = \frac{u}{c}$ $u \rightarrow$ ταχύτητα ρευστού και $u < 0,3 \text{ Mach} \Rightarrow$ ασυμπίεστη ροή
 $c \rightarrow$ ταχύτητα ήχου $u > 0,3 \text{ Mach} \Rightarrow$ συμπιεστή ροή

Μόνιμη ροή : όταν $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ για κάθε σημείο του πεδίου ροής

(τα περισσότερα προβλήματα μηχανικού, σταθερή σε συγκεκριμένο σημείο , μπορεί να μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο)

Μη μόνιμη ροή : Το διάνυσμα της ταχύτητας σε ένα τυχαίο σημείο μεταβάλλεται με το χρόνο. (π.χ. κίνηση ρευστού σε σωλήνα με μεταβαλλόμενη παροχή).

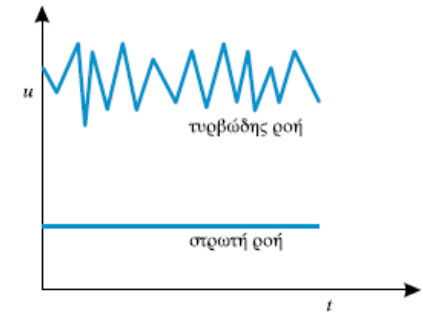
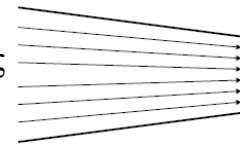
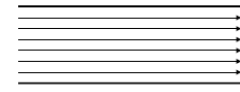
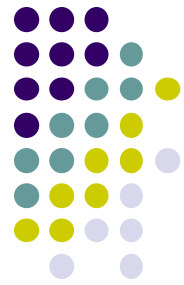
Μόνιμη – μη μόνιμη ροή



Για την οπτική αναπαράσταση του πεδίου μιας μόνιμης (χρονικά ανεξάρτητης) ροής χρησιμοποιούμε την εμπειρία μας σε ηλεκτρικά ή μαγνητικά πεδία και εισάγουμε τις γραμμές ροής για το πεδίο ταχύτητας, οι οποίες έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

- Η εφαπτομένη σε κάθε σημείο μιας γραμμής ροής είναι στην κατεύθυνση της ταχύτητας ροής στο σημείο αυτό
- Η πυκνότητα των γραμμών ροής είναι ανάλογη του μέτρου της ταχύτητας στο σημείο αυτό
- Οι γραμμές ροής δεν τέμνονται, εκτός από σημεία όπου η ταχύτητα μηδενίζεται (σημεία ηρεμίας). Σε αντίθετη περίπτωση, η ταχύτητα δεν μπορεί να οριστεί μοναδικά σε αυτό το σημείο.

Είδη ροής



Ομοιόμορφη ροή : Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι το αυτό σε οποιοδήποτε σημείο μιας γραμμής ροής του ρευστού (**ταχύτητα σταθερή κατά μέτρο και κατά διεύθυνση**) σε μια τυχαία χρονική στιγμή (οι γραμμές ροής ευθείες και παράλληλες μεταξύ τους) .

Ανομοιόμορφη ροή : **Αν μεταβάλλεται κατά μήκος μιας γραμμής ροής η ταχύτητα** (είτε ως προς μέτρο, είτε ως προς διεύθυνση)

Στρωτή ροή : Όταν τα σωματίδια του ρευστού κινούνται με σταθερή ταχύτητα κατά στρώματα. Όλα τα σωματίδια του ρευστού του ίδιου στρώματος κινούνται με την ίδια ταχύτητα κατά τη διεύθυνση της ροής και μόνο.

ΟΧΙ ανάμιξη των γειτονικών στρωμάτων.

Ανταλλαγή ορμής μόνο σε μοριακό επίπεδο με διάχυση.

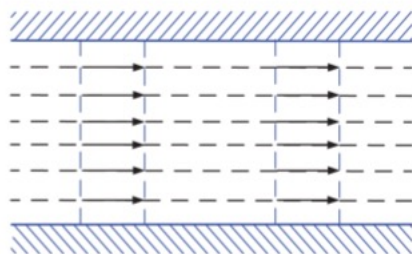
Τάσεις για αστάθεια & στροβιλισμούς εξισορροπούνται από ιξώδεις / διατμητικές τάσεις.

Τυρβώδης ροή : Η ιξώδης ροή με ακανόνιστες & τυχαίες κινήσεις των σωματιδίων του ρευστού προς όλες τις κατευθύνσεις \Rightarrow ακανόνιστη & τυχαία μεταφορά ορμής
 \Rightarrow Συνεχής μεταβολή των ιδιοτήτων του ρευστού
 \Rightarrow Στατιστική περιγραφή φυσικών ιδιοτήτων (μέσες τιμές)

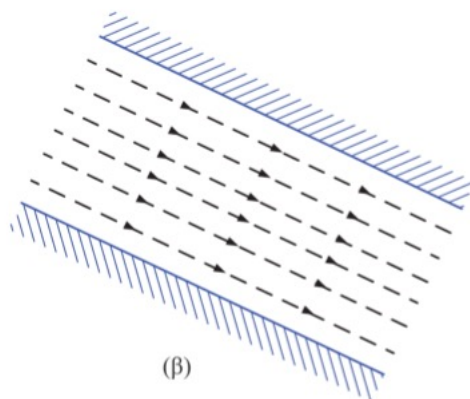
Μεταβατική ροή : Ενδιάμεσο τμήμα ροής από την στρωτή στην τυρβώδη



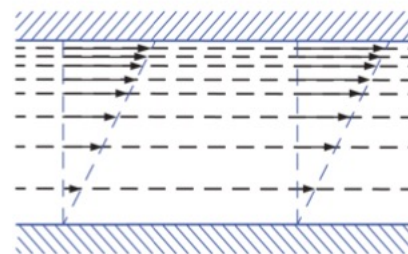
Ομοιόμορφη – ανομοιόμορφη ροή



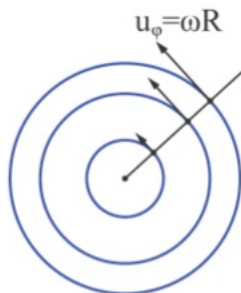
(α)



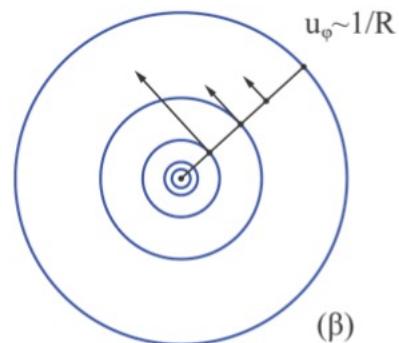
(β)



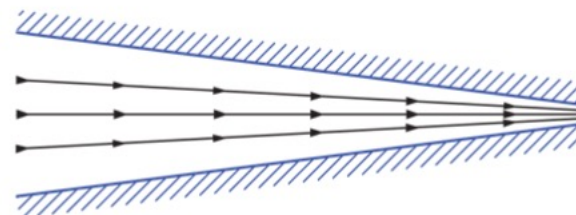
(γ)



(α)



(β)



(γ)

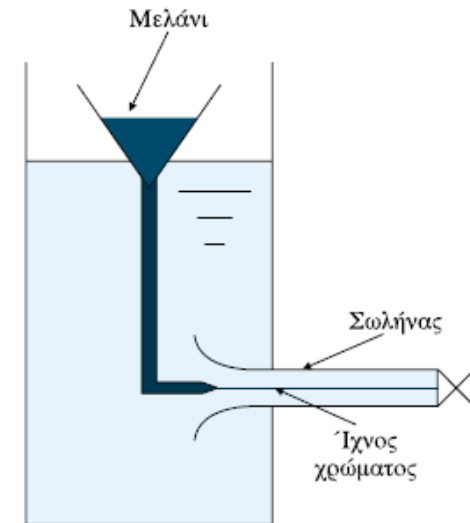
Είδος της ροής: εξάρτηση από αριθμό Reynolds



Ο Reynolds χρησιμοποιώντας σωλήνες διαφόρων διαμέτρων και νερό διαφόρων θερμοκρασιών, βρήκε ότι το είδος της ροής εξαρτάται από την τιμή που έχει μια αδιάστατη παράμετρος, γνωστή προς τιμήν του ως αριθμός Reynolds, η οποία δίνεται από τον τύπο:

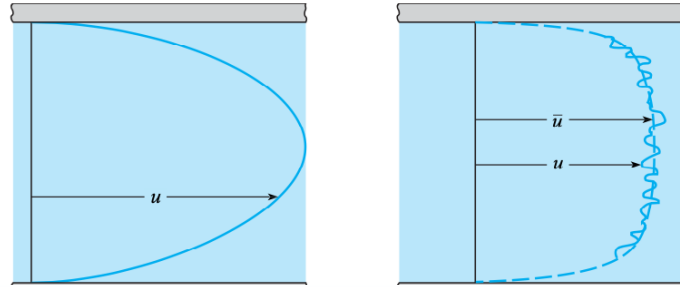
$$\frac{\text{Δυνάμεις αδράνειας}}{\text{δυνάμεις τριβής}} \quad \text{Re} = \frac{\rho u d}{\mu}$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του υγρού, u είναι η ταχύτητα του υγρού, d είναι η εσωτερική διάμετρος του σωλήνα και μ είναι το ιξώδες του υγρού. Η ροή μέσα σε ένα σωλήνα θεωρείται στρωτή εάν $\text{Re} < 2.300$, ενώ εάν ο αριθμός $\text{Re} > 4.000$, τότε η ροή είναι τυρβώδης. Για ενδιάμεσες τιμές του αριθμού Reynolds, έχουμε μεταβατική ροή.



Στρωτή και τυρβώδης ροή – Σύγκριση

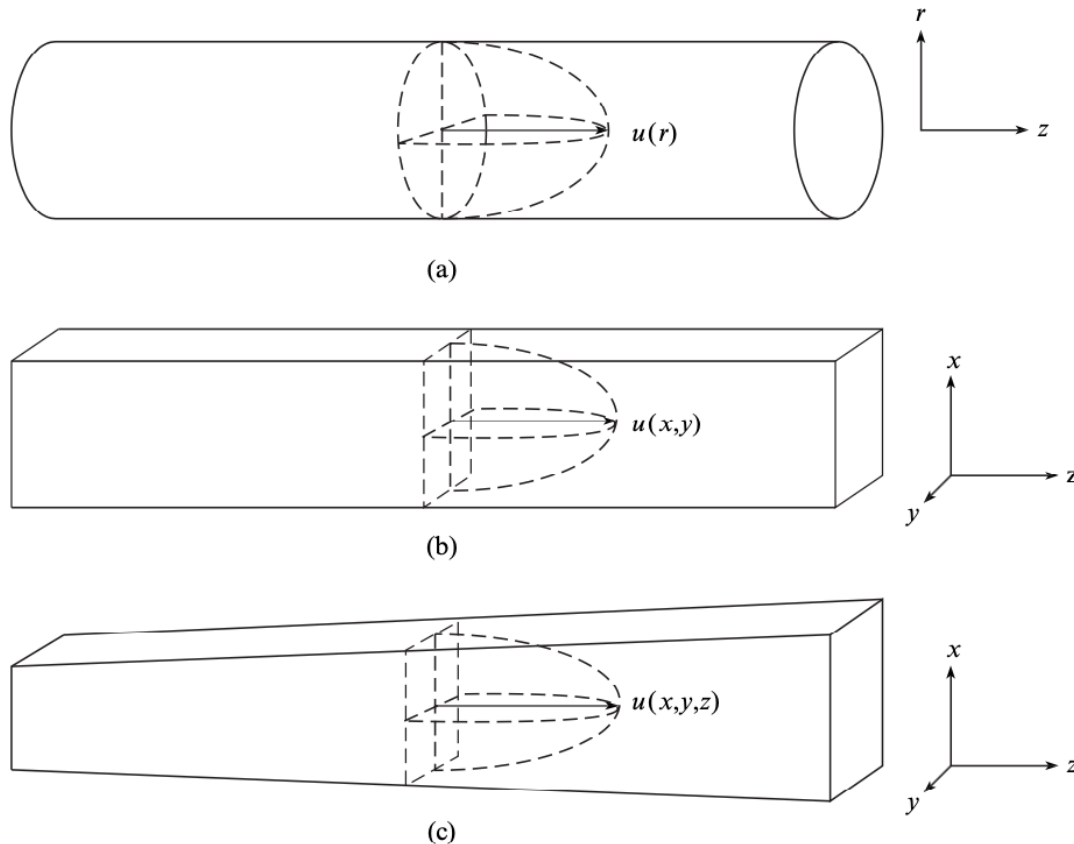
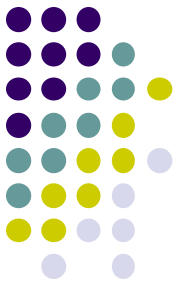
(βλ. Πίνακα 4.2)



Feature	Laminar Flow	Turbulent Flow
Basic description	Smooth flow in layers (laminae).	The flow has many eddies of various sizes. The flow appears random, chaotic, and unsteady.
Velocity profile in a pipe	Parabolic; ratio of mean velocity to centerline velocity is 0.5 for fully developed flow.	Pluglike; ratio of mean velocity to centerline velocity is between 0.8 and 0.9.
Mixing of materials added to the flow	Low levels of mixing. Difficult to get a material to mix with a fluid in laminar flow.	High levels of mixing. Easy to get a material to mix; for example, visualize cream mixing with coffee.
Variation with time	Can be steady or unsteady.	Always unsteady.
Dimensionality of flow	Can be 1-D, 2-D, or 3-D.	Always 3-D.
Availability of mathematical solutions	In principle, any laminar flow can be solved with an analytical or computer solution. There are many existing analytical solutions. Solutions are very close to what would be measured with an experiment.	There is no complete theory of turbulent flow. There are a limited number of semiempirical solution approaches. Many turbulent flows cannot be accurately predicted with computer models or analytical solutions. Engineers often rely on experiments to characterize turbulent flow.
Practical importance	A small percentage of practical problems involve laminar flow.	The majority of practical problems involve turbulent flow. Typically, the flow of air and water in piping systems is turbulent. Most flows of water in open channels are turbulent.
Occurrence (Reynolds number)	Occurs at lower values of Reynolds numbers. (The Reynolds number is introduced in Chapter 8.)	Occurs at higher values of Reynolds numbers.

Διαστατικότητα ροής

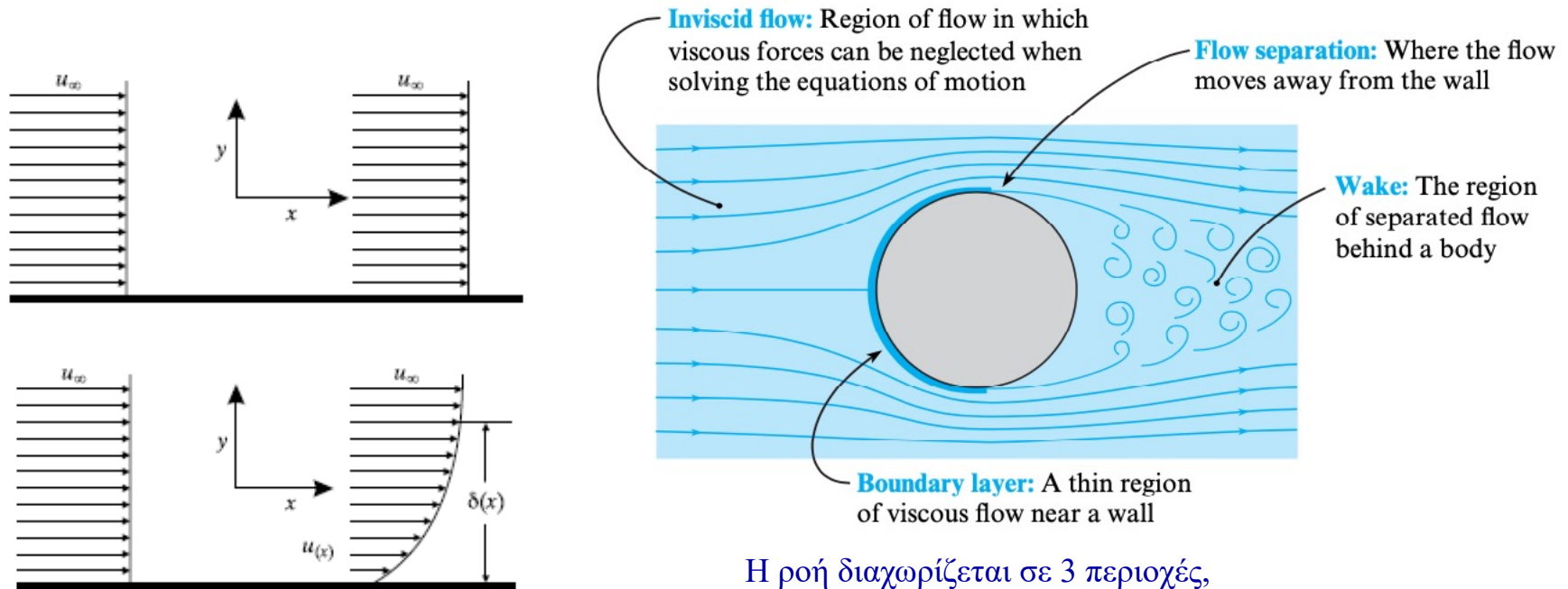
- Μονοδιάστατη
- Δισδιάστατη
- Τρισδιάστατη ($u=u(x,y,z,t)$) π.χ. καπνός καμινάδας



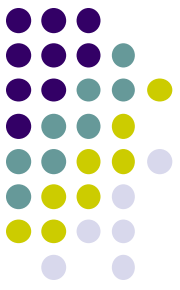
Είδη ροής

- Ατριβή ροή (ιζώδες ρευστού=0, ιδανικά ρευστά)
- Ιζώδης ροή (ροή των πραγματικών ρευστών, το ιζώδες έχει τιμή)

Οριακό στρώμα: Η περιοχή του ρευστού εντός της οποίας παρατηρείται μεταβολή της ταχύτητας από $u = 0$ έως $u = 0.99u$



- Η ροή διαχωρίζεται σε 3 περιοχές,
1. ατριβούς ροής (inviscid flow)
 2. οπισθορεύματα (wake)
 3. οριακό στρώμα (boundary layer)



Πλήρως ανεπτυγμένη ροή

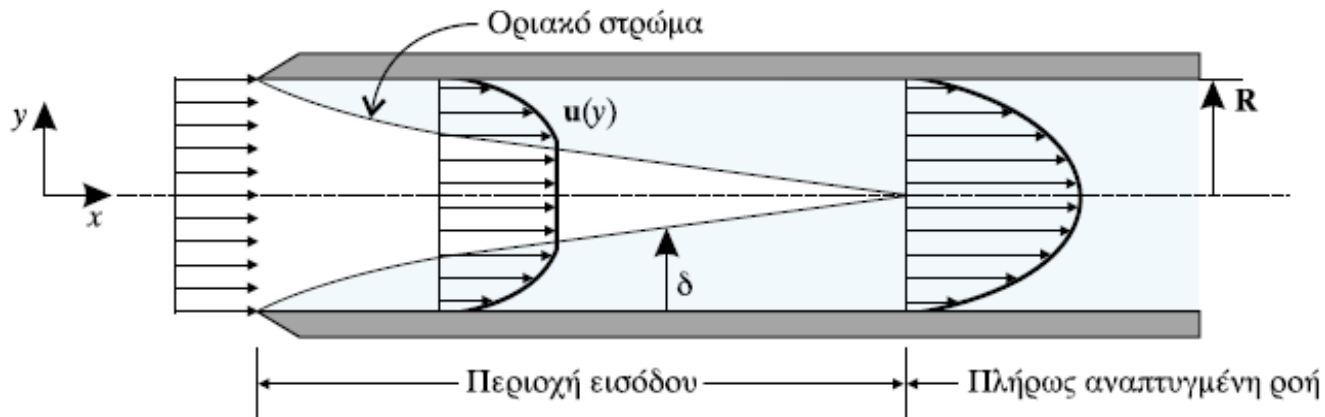
Περιοχή εισόδου: Αυξάνει συνεχώς το οριακό στρώμα σε πάχος, μέχρις ότου η ροή να καταστεί πλήρως αναπτυγμένη.

Πλήρως αναπτυγμένη: οπότε τα ιξώδη φαινόμενα επικρατούν σε όλη τη διατομή του σωλήνα και η κατανομή ταχυτήτων δεν μεταβάλλεται κατά μήκος της ροής.

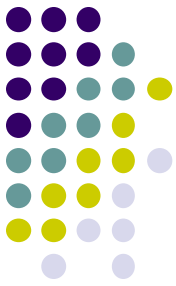
κριτήριο : $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ή $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{σταθ.}$

Μήκος περιοχή εισόδου (X) = $\frac{x}{d} = 0,05 \text{ Re}$ (Στρωτή ροή)

$X > 10d$ (Τυρβώδης ροή) π.χ. δειγματοληψία αερίων καμινάδας



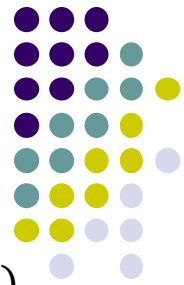
Πως οι μηχανικοί περιγράφουν τη ροή (βλ. Πίνακα 4.4)



Description	Key Knowledge
Engineers classify flows as <i>uniform</i> or <i>nonuniform</i> .	<ul style="list-style-type: none"> Uniform and nonuniform flow describe how velocity varies spatially. <i>Uniform flow</i> means that the velocity at each point on a given streamline is the same. Uniform flow requires rectilinear streamlines (straight and parallel). <i>Nonuniform flow</i> means that velocity at various points on a given streamline differs.
Engineers classify flows as <i>steady</i> or <i>unsteady</i> .	<ul style="list-style-type: none"> <i>Steady flow</i> means the velocity is constant with respect to time at every point in space. <i>Unsteady flow</i> means the velocity is changing with time at some or all points in space. Engineers often idealize unsteady flows as steady flow. For example, draining tank of water is commonly assumed to be a steady flow.
Engineers classify flows as <i>laminar</i> or <i>turbulent</i> .	<ul style="list-style-type: none"> <i>Laminar flow</i> involves flow in smooth layers (laminae), with low levels of mixing between layers. <i>Turbulent flow</i> involves flow that is dominated by eddies of various size. Flow is chaotic, unsteady, and 3-D. There are high levels of mixing. Occasionally, engineers describe a flow as <i>transitional</i>. This means that the flow is changing from a laminar flow to a turbulent flow.
Engineers classify flows as <i>1-D</i> , <i>2-D</i> , or <i>3-D</i> .	<ul style="list-style-type: none"> <i>One-dimensional (1-D) flow</i> means the velocity depends on one spatial variable; for example, velocity depends on radius r only. <i>Three-dimensional (3-D) flow</i> means the velocity depends on three spatial variables; for example, velocity depends on three position coordinates: $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z)$.
Engineers classify flows as <i>viscous flow</i> or <i>inviscid flows</i> .	<ul style="list-style-type: none"> In a <i>viscous flow</i>, the forces associated with viscous shear stresses are significant. Thus, viscous terms are included when solving the equations of motion. In an <i>inviscid flow</i>, the forces associated with viscous shear stresses are insignificant. Thus, viscous terms are neglected when solving the equations of motion. The fluid behaves as if its viscosity were zero.
Engineers describe flows by describing an <i>inviscid flow region</i> , a <i>boundary layer</i> , and a <i>wake</i> .	<ul style="list-style-type: none"> In the <i>inviscid flow region</i>, the streamlines are smooth, and the flow can be analyzed with Euler's equation. The <i>boundary layer</i> is a thin region of fluid next to wall. Viscous effects are significant in the boundary layer. The <i>wake</i> is the region of separated flow behind a body.
Engineers describe flows as separated or attached.	<ul style="list-style-type: none"> <i>Flow separation</i> occurs when fluid particles move away from the wall. <i>Attached flow</i> occurs when fluid particles are moving along a wall or boundary. The region of separated flow inside a pipe or duct is often called a <i>recirculation zone</i>.

Ρυθμός ροής μάζας και όγκου
Ογκομετρική Παροχή, Μέση Ταχύτητα

$$\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho V}{\Delta t} = \frac{\rho A u \Delta t}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\dot{m} = \rho A u}$$

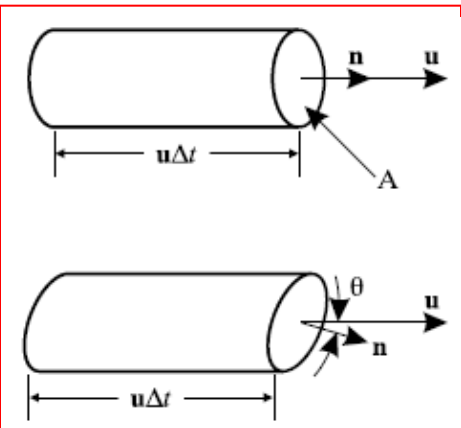


Αν η ταχύτητα δεν είναι κάθετη στην επιφάνεια:

$$\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho V}{\Delta t} = \frac{\rho A u \cos \theta \Delta t}{\Delta t} \Rightarrow \dot{m} = \rho A u \cos \theta = \rho A (\vec{u} \cdot \vec{n})$$

\vec{n} μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια A

$\vec{u} \cdot \vec{n}$ εσωτερικό γινόμενο



Αν η ταχύτητα δεν παραμένει σταθερή σε όλα τα σημεία της επιφάνειας A \Rightarrow

$$d\dot{m} = \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA \Rightarrow \boxed{\dot{m} = \iint_A \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA}$$

ροή μάζας \nearrow

① \vec{u}, \vec{n} ομόρροπα: $0 \leq \theta \leq \pi/2 \Rightarrow 0 \leq \cos \theta \leq 1 \Rightarrow$
 εσωτ. γινόμενο θετικό \Rightarrow ρευστό εκρέει από την επιφ. A

② \vec{u}, \vec{n} αντίρροπα: $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2 \Rightarrow -1 \leq \cos \theta < 0 \Rightarrow$
 \Rightarrow εσωτ. γινόμενο αρνητικό \Rightarrow ρευστό εισρέει στην επιφ. A

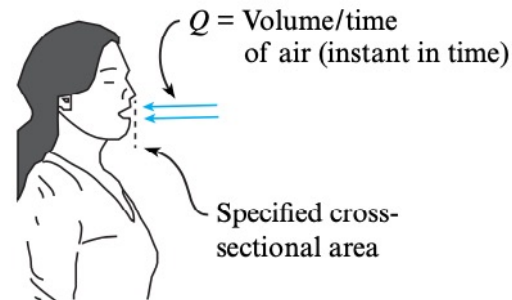
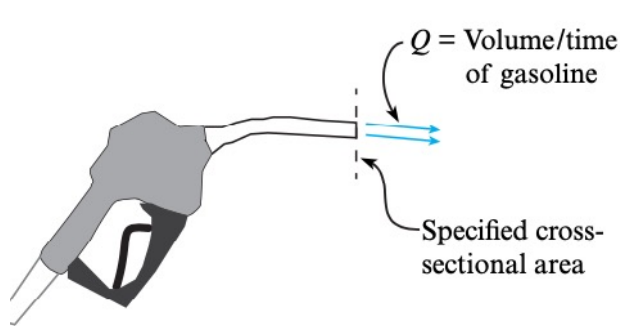
Ογκομετρική παροχή = $\frac{\text{ροή μάζας } (\dot{m})}{\text{πυκνότητα } (\rho)} = \frac{\rho \dot{V}}{\rho} \Rightarrow \boxed{\dot{V} = \iint_A (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA}$

Μέση Ταχύτητα Ρευστού = $\frac{\dot{V}}{A} \Rightarrow \boxed{\bar{u} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{1}{A} \iint_A (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA}$

Πόση είναι η μέση ταχύτητα ?



Situation	Equation for Mean Velocity
Fully developed laminar flow in a round pipe . For more information, see §10.5.	$\bar{V}/V_{\max} = 0.5$, where V_{\max} is the value of the maximum velocity in the pipe. Note that V_{\max} is the value of the velocity at the center of the pipe.
Fully developed laminar flow in a rectangular channel (channel has infinite width).	$\bar{V}/V_{\max} = 2/3 = 0.667$.
Fully developed turbulent flow in a round pipe . For more information, see §10.6.	$\bar{V}/V_{\max} \approx 0.79$ to 0.86 , where the ratio depends on the Reynolds number.



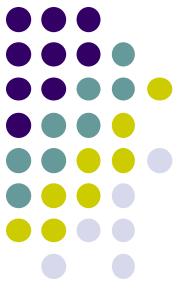
Σύνοψη των εξισώσεων παροχής



Description	Equation	Terms
Volume flow rate equation	$Q = \bar{V}A = \frac{\dot{m}}{\rho} = \int_A V dA = \int_A \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} \quad (5.10)$ <div style="border: 1px solid red; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\dot{V} = \iint_A (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA$ </div>	<p>Q = volume flow rate = discharge (m³/s) \bar{V} = mean velocity = area averaged velocity (m/s) A = cross-sectional area (m²) \dot{m} = mass flow rate (kg/s) V = speed of a fluid particle (m/s) dA = differential area (m²) \mathbf{V} = velocity of a fluid particle (m/s) $d\mathbf{A}$ = differential area vector (m²) (points outward from the control surface)</p>
Mass flow rate equation	$\dot{m} = \rho A \bar{V} = \rho Q = \int_A \rho V dA = \int_A \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} \quad (5.11)$	<p>\dot{m} = mass flow rate (kg/s) ρ = mass density (kg/m³)</p>

$$\dot{m} = \iint_A \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA$$

Υπολογίζοντας την παροχή αέρα σε σωλήνα



EXAMPLE 5.1

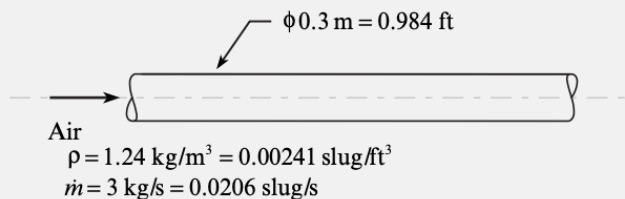
Applying the Flow Rate Equations to a Flow of Air in a Pipe

Problem Statement

Air that has a mass density of 1.24 kg/m^3 ($0.00241 \text{ slugs/ft}^3$) flows in a pipe with a diameter of 30 cm (0.984 ft) at a mass rate of flow of 3 kg/s (0.206 slugs/s). What are the mean velocity and discharge in this pipe for both systems of units?

Define the Situation

Air flows in a pipe.



State the Goal

Q (m^3/s and ft^3/s) ← volume flow rate (discharge)

\bar{V} (m/s and ft/s) ← mean velocity

Generate Ideas and Make a Plan

Because Q is the goal and \dot{m} and ρ are known, apply the mass flow rate equation (Eq. 5.11):

$$\dot{m} = \rho Q \quad (\text{a})$$

To find the last goal (\bar{V}), apply the volume flow rate equation (Eq. 5.10):

$$Q = \bar{V}A \quad (\text{b})$$

The plan is as follows:

1. Calculate Q using Eq. (a).
2. Calculate \bar{V} using Eq. (b).

Take Action (Execute the Plan)

1. Mass flow rate equation:

$$Q = \frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{3 \text{ kg/s}}{1.24 \text{ kg/m}^3} = 2.42 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q = 2.42 \text{ m}^3/\text{s} \times \left(\frac{35.31 \text{ ft}^3}{1 \text{ m}^3} \right) = 85.5 \text{ cfs}$$

2. Volume flow rate equation:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{2.42 \text{ m}^3/\text{s}}{(\frac{1}{4}\pi) \times (0.30 \text{ m})^2} = 34.2 \text{ m/s}$$

$$V = 34.2 \text{ m/s} \times \left(\frac{1 \text{ ft}}{0.3048 \text{ m}} \right) = 112 \text{ ft/s}$$

Υπολογίζοντας την παροχή όγκου με εσωτερικό γινόμενο

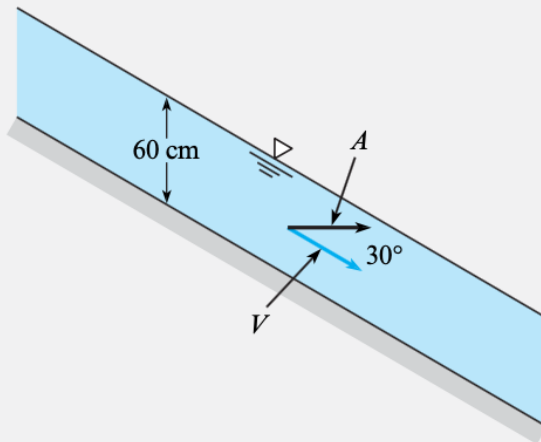


EXAMPLE 5.2

Calculating the Volume Flow Rate by Applying the Dot Product

Problem Statement

Water flows in a channel that has a slope of 30° . If the velocity is assumed to be constant, 12 m/s, and if a depth of 60 cm is measured along a vertical line, what is the discharge per meter of width of the channel?



Define the Situation

Water flows in an open channel.

State the Goal

Q (m^3/s) ← discharge per meter of width of the channel

Generate Ideas and Make a Plan

Because V and A are not at right angles, apply

$Q = \mathbf{V} \cdot \mathbf{A} = VA \cos \theta$. Because all variables are known except Q , the plan is to substitute in values.

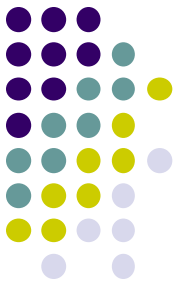
Take Action (Execute the Plan)

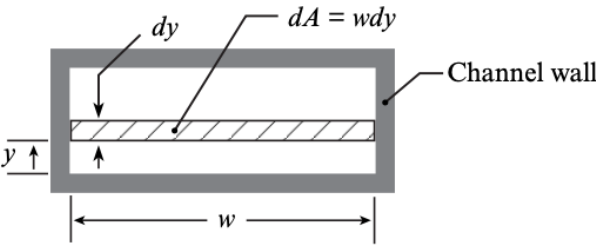
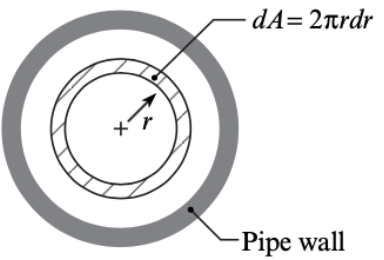
$$\begin{aligned} Q &= \mathbf{V} \cdot \mathbf{A} = V(\cos 30^\circ)A \\ &= (12 \text{ m/s})(\cos 30^\circ)(0.6 \text{ m}) \\ &= \boxed{6.24 \text{ m}^3/\text{s per meter}} \end{aligned}$$

Review the Solution and the Process

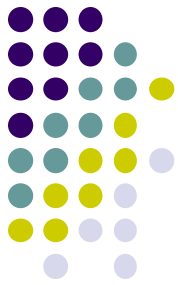
1. *Knowledge.* This example involves a channel flow. A flow is a *channel flow* when a liquid (usually water) flows with an open surface exposed to air under the action of gravity.
2. *Knowledge.* The discharge per unit width is usually designated as q .

Διαφορικές επιφάνειες για τον υπολογισμό παροχών (βλ. Πίνακας 5.3)



Label	Sketch	Description
Channel flow	 <p>The sketch shows a cross-section of a rectangular channel. A horizontal line represents the channel wall. A vertical arrow labeled y points upwards from the bottom wall. A horizontal arrow labeled w points to the right, indicating the width of the channel. A small rectangular area element is shaded with diagonal lines, with a vertical arrow labeled dy indicating its height. A label $dA = w dy$ points to this area element. The text 'Channel wall' is also present with a line pointing to the right wall.</p>	When velocity varies as $V = V(y)$ in a rectangular channel, use a differential area dA , given by $dA = w dy$, where w is the width of the channel and dy is a differential height.
Pipe flow	 <p>The sketch shows a cross-section of a round pipe. A central point is marked with a '+' and a radius r is shown as an arrow from the center to the inner boundary of a shaded annular area element. A label $dA = 2\pi r dr$ points to this area element. The text 'Pipe wall' is also present with a line pointing to the outer boundary of the pipe.</p>	When velocity varies as $V = V(r)$ in a round pipe, use a differential area dA , given by $dA = 2\pi r dr$, where r is the radius of the differential area and dr is a differential radius.

Υπολογίζοντας την παροχή με ολοκλήρωση

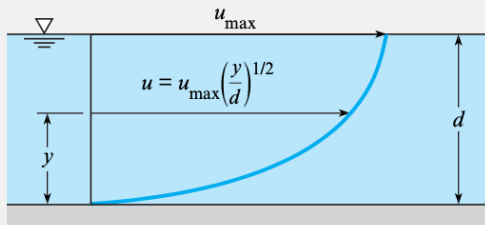


EXAMPLE 5.3

Determining Flow Rate by Integration

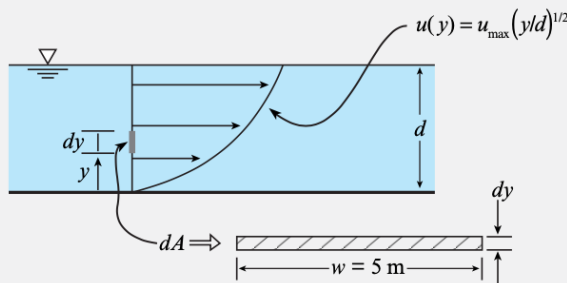
Problem Statement

The water velocity in the channel shown in the accompanying figure has a velocity distribution across the vertical section equal to $u/u_{\max} = (y/d)^{1/2}$. What is the discharge in the channel if the water is 2 m deep ($d = 2$ m), the channel is 5 m wide, and the maximum velocity is 3 m/s?



Define the Situation

Water flows in a channel.



State the Goal

$Q(\text{m}^3/\text{s}) \leftarrow$ discharge (volume flow rate)

Generate Ideas and Make a Plan

Because velocity is varying over the cross-sectional area, apply Eq. (5.10):

$$\dot{V} = \iint_A (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA \quad Q = \int_A V dA \quad (\text{a})$$

Because Eq. (a) has two unknowns (V and dA), find equations for these unknowns. The velocity is given:

$$V = u(y) = u_{\max}(y/d)^{1/2} \quad (\text{b})$$

From Table 5.3, the differential area is

$$dA = w dy \quad (\text{c})$$

Notice that the differential area is sketched in the situation diagram. Substitute Eqs. (b) and (c) into Eq. (a):

$$Q = \int_0^d u_{\max}(y/d)^{1/2} w dy \quad (\text{d})$$

The plan is to integrate Eq. (d) and then plug numbers in.

Take Action (Execute the Plan)

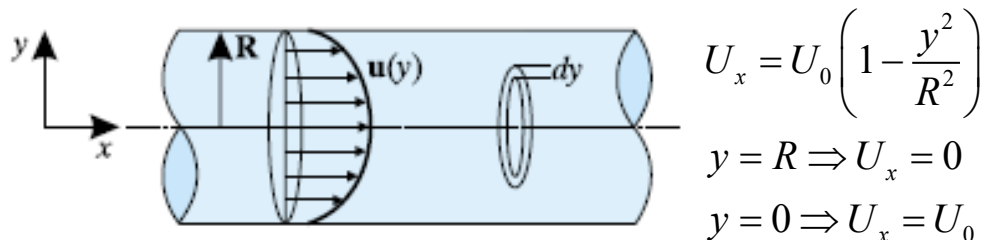
$$\begin{aligned} Q &= \int_0^d u_{\max}(y/d)^{1/2} w dy \\ &= \frac{w u_{\max}}{d^{1/2}} \int_0^d y^{1/2} dy \\ &= \frac{w u_{\max}}{d^{1/2}} \frac{2}{3} y^{3/2} \Big|_0^d = \frac{w u_{\max}}{d^{1/2}} \frac{2}{3} d^{3/2} \\ &= \frac{(5 \text{ m})(3 \text{ m/s})}{(2 \text{ m})^{1/2}} \times \frac{2}{3} \times (2 \text{ m})^{3/2} = \boxed{20 \text{ m}^3/\text{s}} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.1

Η ταχύτητα του ρευστού που διαρρέει ένα κυλινδρικό αγωγό μεταβάλλεται σε μια τομή του αγωγού κάθετη προς την διεύθυνση ροής σύμφωνα με την εξίσωση:

$$u_x = u_0 \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right),$$

όπου u_0 είναι η μέγιστη ταχύτητα, R είναι η ακτίνα του αγωγού και y είναι η απόσταση από τον άξονα του αγωγού. Να υπολογισθεί η μέση ταχύτητα του ρευστού στη διατομή.



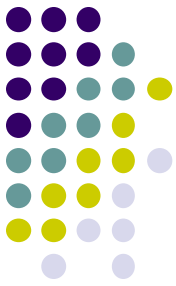
$$\vec{u} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{1}{A} \iint_A (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA$$

$$\left. \begin{aligned} dA &= 2\pi y dy \\ \vec{u} &= \frac{1}{A} \iint_A \vec{u} n dA \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{\pi R^2} \iint u_x dA \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

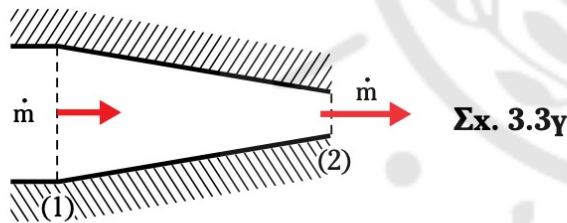
$$\vec{u} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R U_0 \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right) 2\pi y dy = \frac{2\pi U_0}{\pi R^2} \int_0^R \left(y - \frac{y^3}{R^2} \right) dy = \frac{2U_0}{R^2} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4R^2} \right) \Big|_0^R = \frac{U_0}{2}$$



Μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού - Παράδειγμα



Στο ακροφύσιο του σχήματος 3.3γ, στο οποίο καταλήγει σωλήνας διαμέτρου 18 cm, θέλουμε να έχουμε ταχύτητα εξόδου νερού 12 m/s. Αν η διάμετρος στην έξοδο είναι 6 cm, να υπολογισθούν: α) Η ταχύτητα που πρέπει να έχει το νερό μέσα στον σωλήνα. β) Πόσα kg νερού θα εκτοξεύονται σε 10 min και γ) το είδος ροής στον σωλήνα.



$$[\text{Επίσης: } \dot{V} = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot v_1 = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \Rightarrow v_1 = v_2 / 9 = 1,33 \text{ m/s}]$$

β) Για να υπολογίσουμε την ποσότητα (μάζα ή όγκο) που ρέει σε ορισμένο χρόνο, αξιοποιούμε τις σχέσεις ορισμού των παραχών:

$$V = \dot{V} \cdot t \Rightarrow V = 0,0339 \text{ m}^3/\text{s} \cdot 600 \text{ s} \Rightarrow V = 20,34 \text{ m}^3$$

Η πυκνότητα του νερού είναι $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

$$m = \rho \cdot V \Rightarrow m = 20.340 \text{ kg}$$

γ) Το είδος της ροής στο σωλήνα καθορίζεται από τον αριθμό Reynolds: $Re = v_1 \cdot d_1/\nu$.

Δεν αναφέρεται θερμοκρασία νερού και υποθέτουμε πως είναι η συνήθης του περιβάλλοντος, οπότε λαμβάνουμε (πίν. 1.2.3) $\mu = 10^{-3} \text{ kg/ms}$ και $\nu = \mu/\rho = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Αντικαθιστώντας: $Re = 2,4 \cdot 10^5$. Άρα η ροή είναι τυρβώδης.

Λύση.

Δεδομένα: $v_2 = 12 \text{ m/s}$,
 $d_1 = 18 \text{ cm} = 0,18 \text{ m}$, και
 $d_2 = 6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m}$

Ζητούμενα: v_1 , $\dot{m} = \text{kg}/10 \text{ min}$,
είδος ροής σωλήνα.

α) Εφαρμόζουμε την εξίσωση της συνέχειας στη διατομή 2:

$$V = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot v_2 \Rightarrow V = 0,0339 \text{ m}^3/\text{s} (=122 \text{ m}^3/\text{h})$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση της συνέχειας στη διατομή 1:

$$v_1 = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d_1^2} \Rightarrow v_1 = 1,33 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{\rho u d}{\mu}$$