Ρευστομηχανική

Ροή σε ανοιχτούς αγωγούς

Εισαγωγή

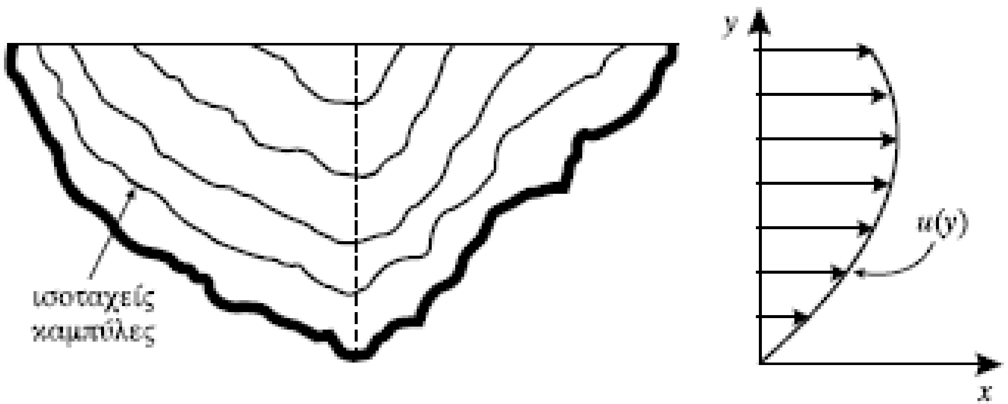
- Ροή σε ανοιχτούς αγωγούς (open channel flow) : ροή ρευστού σε φυσικό/τεχνητό αγωγό, του οποίου η ανώτερη επιφάνεια βρίσκεται ελεύθερη υπό την επίδραση της ατμοσφαιρικής πίεσης

- Πλέον σύνηθες φαινόμενο ροής στη φύση (ποτάμια, κανάλια, βροχή-στέγες, υπόνομοι, κτλ.)

- Επενέργεια δύο (2) δυνάμεων
  1. Βαρύτητα (επιτάχυνση της ροής)
  2. Ιξώδεις δυνάμεις (ρευστό-τοιχώματα, επιβράδυνση της ροής)

- Ανάλυση πολύπλοκη:
  - → Ροή σε 3 διαστάσεις
  - → Μη σταθερή διατομή αγωγού
  - → Μη σταθερό ύψος ελεύθερης επιφάνειας

Εισαγωγή

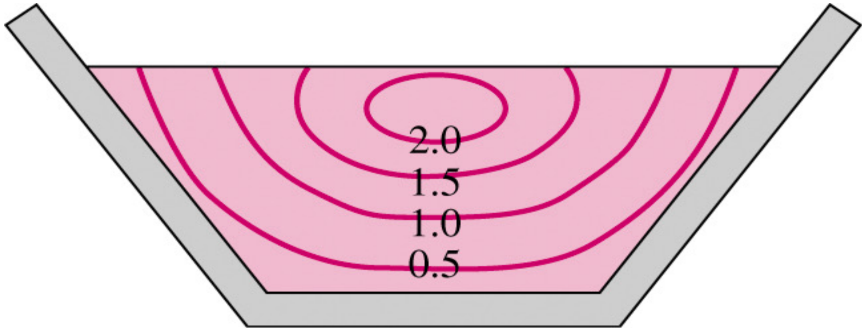


$$\upsilon_{\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta} = \frac{1}{\mathrm{A}} \int_A \upsilon dA = \frac{Q}{A}$$

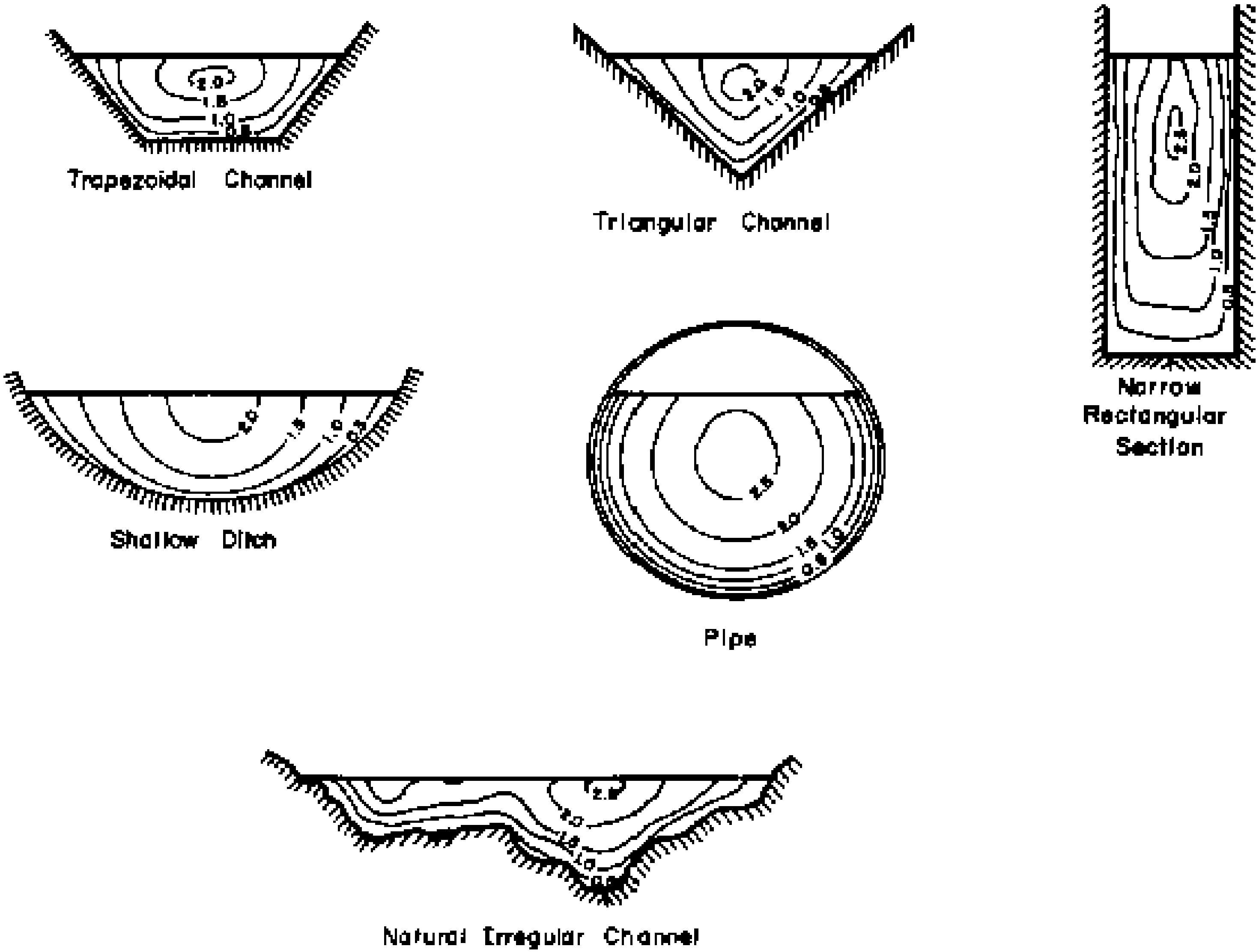
Σχήμα. Κατανομή ταχύτητας σε μια εγκάρσια διατομή ανοικτού καναλιού τυχαίας διατομής. Η μέγιστη ταχύτητα (υ_{max}) εμφανίζεται λίγο κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού.

Classification of Open-Channel Flows

- Open-channel flows are characterized by the presence of a liquid-gas interface called the *free surface.*
- Natural flows: rivers, creeks, floods, etc.
- Human-made systems: fresh-water aqueducts, irrigation, sewers, drainage ditches, etc.



- In an open channel,
  - the flow is 3D
  - u=0 on bottom and sides of channel due to no-slip condition
  - Velocity is maximum at the midplane of the free surface
  - In most cases, velocity also varies in the streamwise direction



Σχήμα. Κατανομή ταχυτήτων για διάφορα προφίλ καναλιών

Γενική Εξίσωση Ροής

$$Q = uA$$

Παροχή
(Flow rate)
(cfs, m^3/s)

Μέση ταχύτητα ροής από την επιφάνεια A
(ft/s, m/s)

Επιφάνεια – Διατομή
(ft^2, m^2)

Εισαγωγή

Για την εφαρμογή των μακροσκοπικών εξισώσεων στη μελέτη των φαινομένων ροής, οι συντελεστές διόρθωσης κινητικής ενέργειας α και ορμής β, θεωρούνται ότι είναι ίσοι με τη μονάδα, 1, υπόθεση που δεν είναι μακριά από την πραγματικότητα, σύμφωνα με σχετικές πειραματικές μετρήσεις.

Όπως αναφέρθηκε οι μόνες δυνάμεις που λαμβάνονται υπ' όψη στη μελέτη των φαινομένων ροής είναι οι δυνάμεις βαρύτητας και τριβής. Οι αδιάστατοι παράμετροι που παριστούν την επίδραση των δυνάμεων βαρύτητας και τριβής είναι ο **αριθμός Froude, Fr,** και ο **αριθμός Reynolds, Re**, αντίστοιχα.

Εισαγωγή

$$A\rho.Froude = \sqrt{\frac{\Delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\varepsilon\iota\varsigma\_\alpha\delta\rho\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma}{\Delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\varepsilon\iota\varsigma\_\mathrm{B}\alpha\rho\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha\varsigma}} =$$

$$\sqrt{\frac{\mathrm{M}\,\alpha}{\mathrm{M}'\alpha'}} = \sqrt{\frac{\rho L^3(\frac{L}{T^2})}{\rho L^3 g}} = \sqrt{\frac{\rho L^2(\frac{L^2}{T^2})}{\rho L^3 g}} =$$

$$\sqrt{\frac{L^2 u^2}{L^3 g}} = \sqrt{\frac{u^2}{L\,g}} \Rightarrow Fr = \frac{u}{\sqrt{hg}} = (\sqrt{Ri})$$

Ri = Richardson number

Fr>1 (μεγάλη ταχύτητα, χαμηλό βάθος) **υπερκρίσιμη ροή**

Fr=1 κρίσιμη ροή

Fr<1 (μικρή ταχύτητα, μεγάλο βάθος) **υποκρίσιμη ροή**

Γεωμετρία καναλιών

- **Κανονικής διατομής** (regular section)
  (η γεωμετρία της διατομής δεν μεταβάλλεται κατά μήκος του αγωγού)

- **Ακανόνιστης διατομής** (irregular section)

<u>Ορισμοί :</u>

- Υδραυλική διάμετρος $d_h = \frac{4A}{\Pi}$
- Υδραυλική ακτίνα $R_h = \frac{A}{\Pi}$

Α: βρεχόμενη διατομή Π: βρεχόμενη περίμετρος

Κατηγορίες ροής σε ανοιχτούς αγωγούς

- Η ροή μπορεί να είναι στρωτή, μεταβατική, ή τυρβώδης ανάλογα με την τιμή του αριθμού Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u R_h}{\mu}$$

- όπου
  - **ρ** = πυκνότητα, **μ** = ιξώδες, **u** = μέση ταχύτητα
  - ***R_h*** = Υδραυλική ακτίνα= **Α/Π**

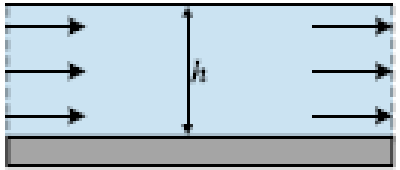
Α = βρεχόμενη διατομή

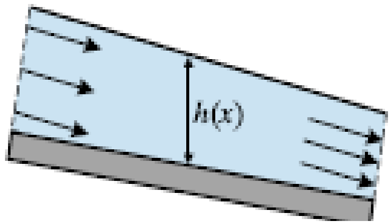
Π = βρεχόμενη διάμετρος

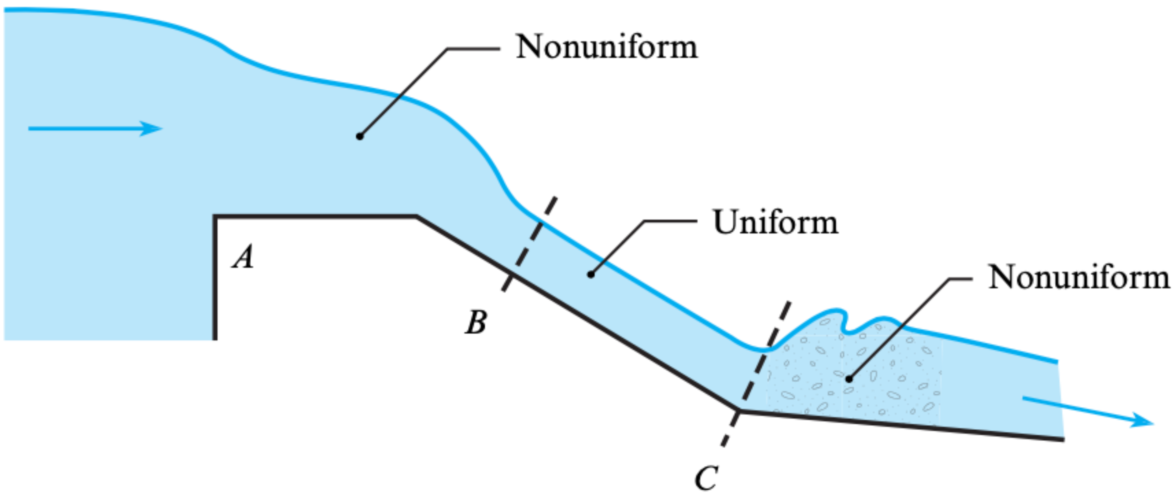
Προσοχή: **η υδραυλική διάμετρος είναι D_h = 4Α/Π = 4R_h**
(άρα για στρωτή ροή Re < 500, όχι <2000)
(δηλ. η D_h δεν είναι 2R_h)

Ταξινόμηση της ροής

- **Μόνιμη ροή** (steady flow): Η ταχύτητα και το βάθος του ρευστού σε κάθε σημείο παραμένουν σταθερά με το χρόνο.
- **Μη μόνιμη ροή** (non-steady flow): Ταχύτητα και βάθος μεταβάλλονται.
- **Ομοιόμορφη ροή** (uniform flow):Το βάθος του ρευστού δεν μεταβάλλεται κατά μήκος του αγωγού.
- **Ανομοιόμορφη ροή** (varied flow): Το βάθος του ρευστού μεταβάλλεται κατά μήκος του αγωγού.
- **Βαθμιαία ή ταχύτατα ανομοιόμορφη ροή** (gradually or rapidly varied flow)
- **Στρωτή ροή** (laminar flow) : **Re < 2000 (500 για R_h)**
- **Τυρβώδης ροή** (turbulent flow): **Re > 3000 (750 για R_h)**

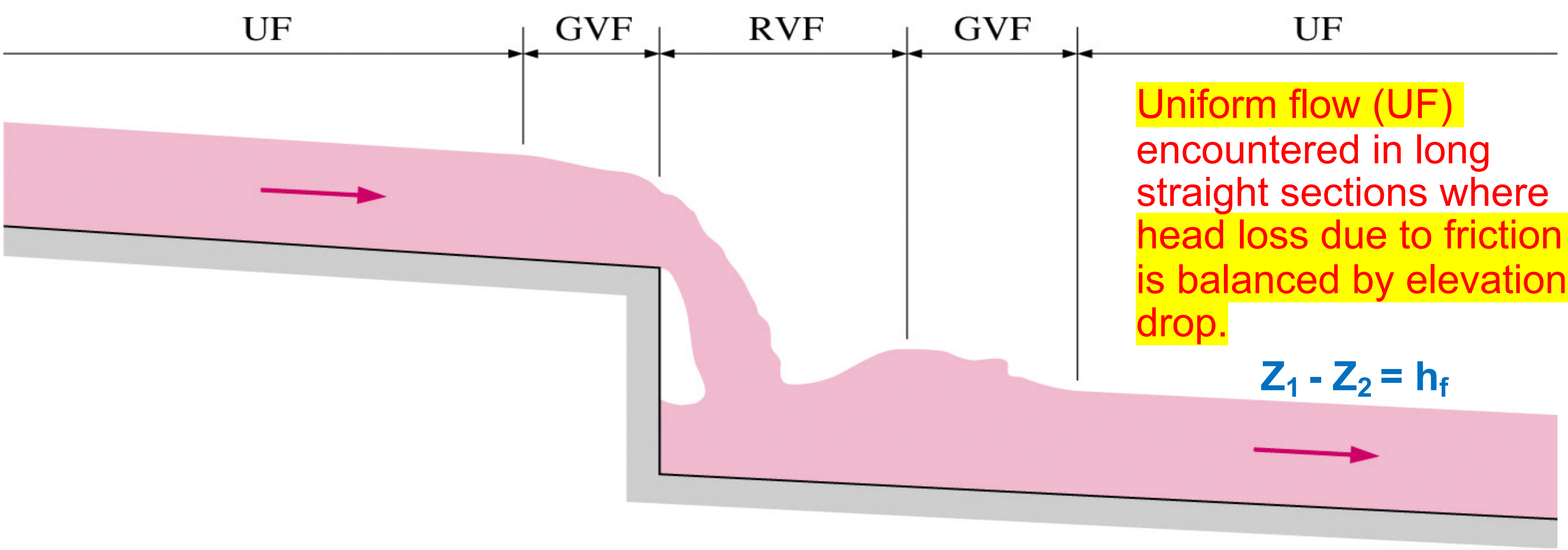






Classification of Open-Channel Flows

- Obstructions cause the flow depth to vary.
- Rapidly varied flow (RVF) occurs over a short distance near the obstacle.
- Gradually varied flow (GVF) occurs over larger distances and usually connects UF and RVF.



EXAMPLE 15.1

Calculating Reynolds Number and Classifying Flow for a Rectangular Open Channel

Problem Statement

Water (60 °F) flows in a 10 ft wide rectangular channel at a depth of 6 ft. What is the Reynolds number if the mean velocity is 0.1 ft/s? With this velocity, at what maximum depth can one be assured of having laminar flow?

Define the Situation

Water flows in a rectangular channel.

$$B = 10 \text{ ft}, y = 6 \text{ ft}, V = 0.1 \text{ ft/s}.$$

Properties:

Water (60 °F, 1 atm, Table A.5): $\nu = 1.22 \times 10^{-5}$ ft^2/s.

State the Goal

1. Re ⬅ Reynolds number
2. y_m(ft) ⬅ maximum depth for laminar flow

Generate Ideas and Make a Plan

To find Re, apply Eq. (15.4). To find y_m, apply the criteria that laminar flow occurs for Re < 500. The plan is as follows:

1. Calculate the hydraulic radius using Eq. (15.5).
2. Calculate the Reynolds number using Eq. (15.4).
3. Let Re = 500, solve for R_h, and then solve for y_m.

Take Action (Execute the Plan)

1. Hydraulic radius:

$$R_h = \frac{By}{B + 2y} = \frac{(10 \text{ ft})(6 \text{ ft})}{(10 \text{ ft}) + 2(6 \text{ ft})} = 2.727 \text{ ft}$$

2. Reynolds number:

$$\text{Re} = \frac{VR_h}{\nu} = \frac{(0.1 \text{ ft/s})(2.727 \text{ ft})}{(1.22 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s})} = \boxed{22{,}400}$$

3. Laminar flow criteria (Re < 500):

$$\text{Re} = VR_h/\nu = (0.10 \text{ ft/s})R_h/(1.22 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s}) = 500$$

$$R_h = (500)(1.22 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s})/(0.10 \text{ ft/s}) = 0.061 \text{ ft}$$

For a rectangular channel,

$$R_h = (By)/(B + 2y)$$

$$(By)/(B + 2y) = (10y)/(10 + 2y) = 0.061 \text{ ft}$$

$$y_m = \boxed{0.062 \text{ ft}}$$

Review the Solution and the Process

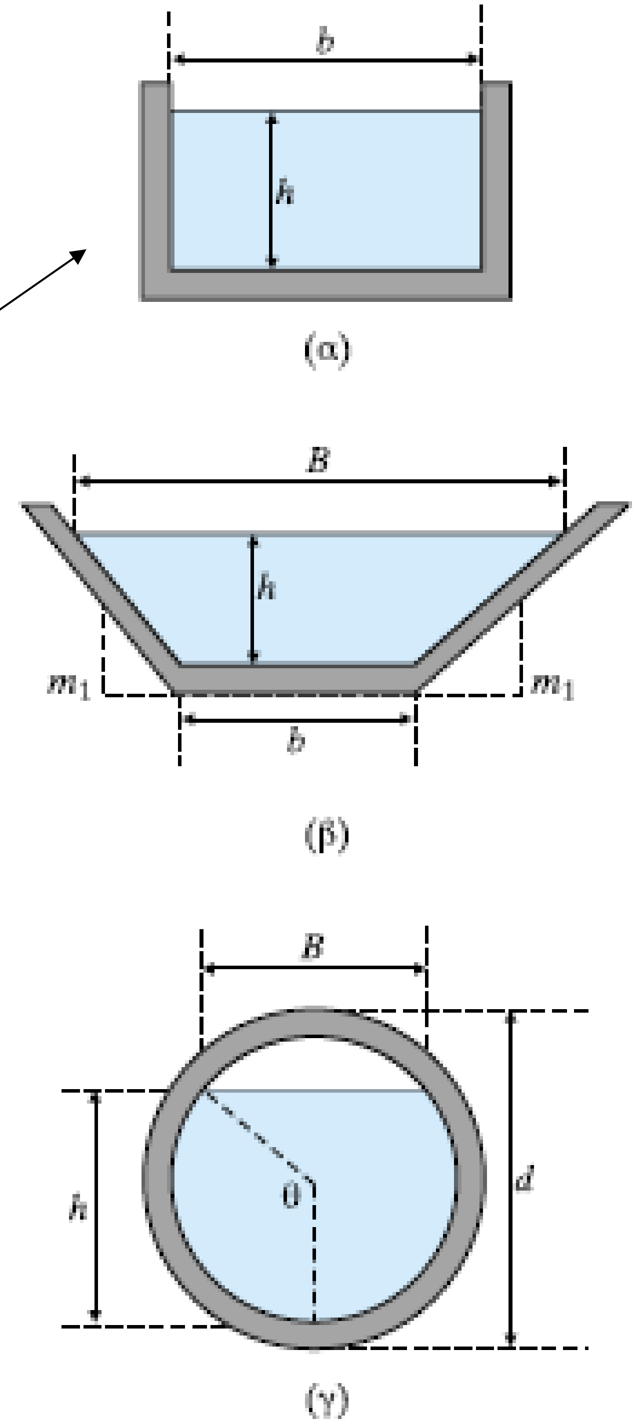
1. *Knowledge.* Velocity or depth must be very small to yield laminar flow of water in an open channel.
2. *Knowledge.* Depth and hydraulic radius are virtually the same when depth is very small relative to width.

Γεωμετρία καναλιών

- Ορθογωνική διατομή

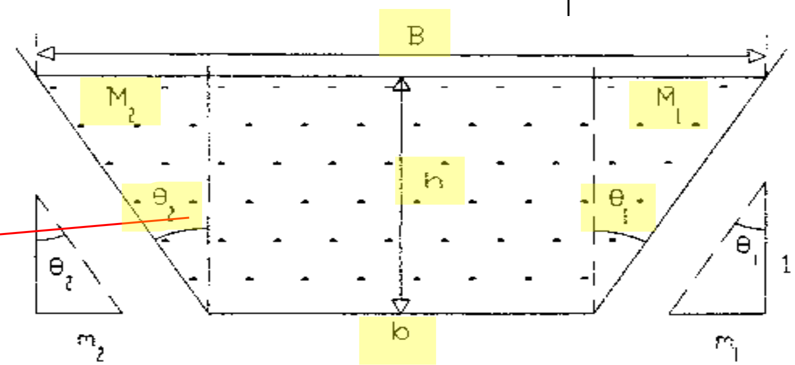
$$d_h = \frac{4A}{\Pi} = \frac{4bh}{b+2h}$$

$$R_h = \frac{A}{\Pi} = \frac{bh}{b+2h}$$



Γεωμετρία καναλιών

- Τραπεζοειδής διατομή



$$\varepsilon\phi\theta_1 = \frac{m_1}{1} \qquad \varepsilon\phi\theta_2 = \frac{m_2}{1}$$

$$\varepsilon\phi\theta_1 = \frac{M_1}{h} \qquad \varepsilon\phi\theta_2 = \frac{M_2}{h}$$

$$\Rightarrow M_1 = \varepsilon\phi\theta_1 \cdot h \Rightarrow M_1 = h \cdot m_1$$

$$A = bh + \frac{1}{2}hM_1 + \frac{1}{2}hM_2 = bh + \frac{1}{2}h(M_1 + M_2) = bh + \frac{1}{2}h(hm_1 + hm_2) = bh + \frac{1}{2}h^2(m_1 + m_2)$$

$$\Pi = b + \sqrt{h^2 + M_1{}^2} + \sqrt{h^2 + M_2^2} = b + \sqrt{h^2 + h^2 m_1^2} + \sqrt{h^2 + h^2 m_2^2} \Rightarrow$$

$$\Pi = b + h\sqrt{1 + m_1^2} + h\sqrt{1 + m_2^2} = b + h(\sqrt{1 + m_1^2} + \sqrt{1 + m_2^2})$$

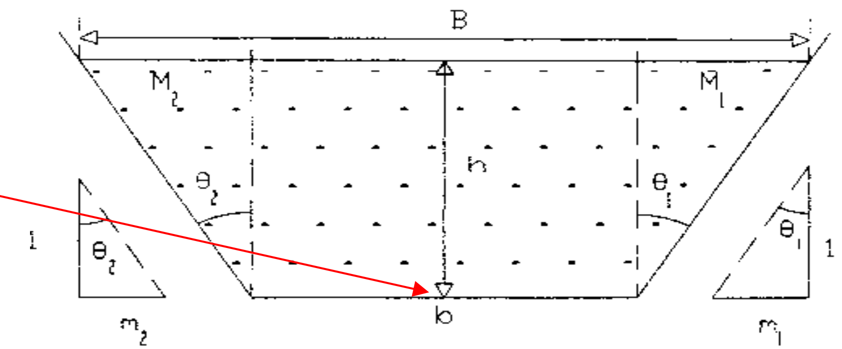
$$B = b + M_1 + M_2 = b + hm_1 + hm_2 = b + h(m_1 + m_2)$$

Γεωμετρία καναλιών

- Τριγωνική διατομή

(οι ίδιες σχέσεις για b=0)

$$\varepsilon\phi\theta_1 = \frac{M_1}{h}$$



$$A = \frac{1}{2}hM_1 + \frac{1}{2}hM_2 = \frac{1}{2}h(M_1 + M_2) = \frac{1}{2}h(hm_1 + hm_2) = \frac{1}{2}h^2(m_1 + m_2)$$

$$\Pi = \sqrt{h^2 + M_1^{\ 2}} + \sqrt{h^2 + M_2^2} = \sqrt{h^2 + h^2 m_1^2} + \sqrt{h^2 + h^2 m_2^2} \Rightarrow$$

$$\Pi = h\sqrt{1 + m_1^2} + h\sqrt{1 + m_2^2} = h(\sqrt{1 + m_1^2} + \sqrt{1 + m_2^2})$$

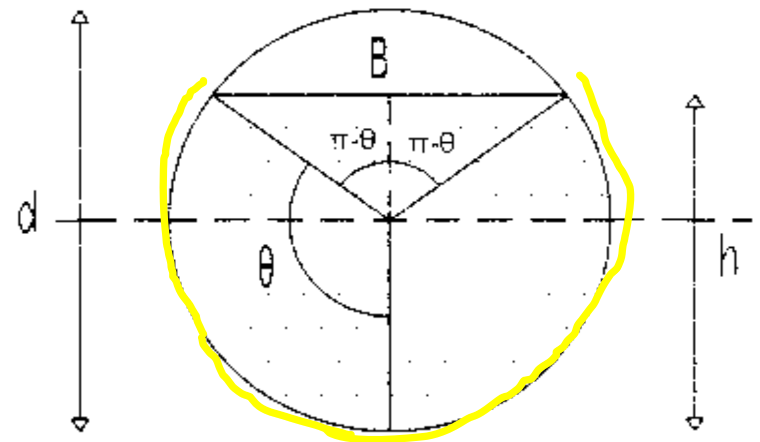
$$B = b + M_1 + M_2 = 0 + hm_1 + hm_2 = h(m_1 + m_2)$$

Γεωμετρία καναλιών

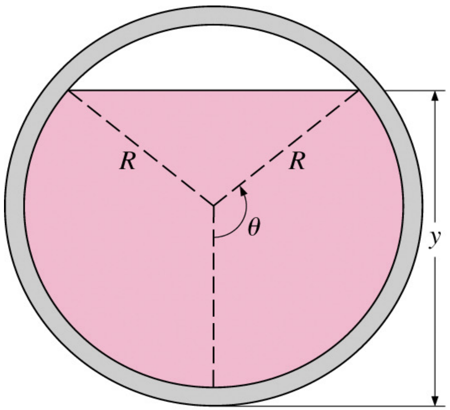
- Κυκλική διατομή

$$A=\left(\frac{d^2}{4}\pi\right)-\left[\left(\frac{d^2}{4}(\pi-\theta)\right)-\frac{B\left(h-\frac{d}{2}\right)}{2}\right]$$

Εμβαδόν κύκλου Εμβαδόν τόξου Εμβαδόν τριγώνου

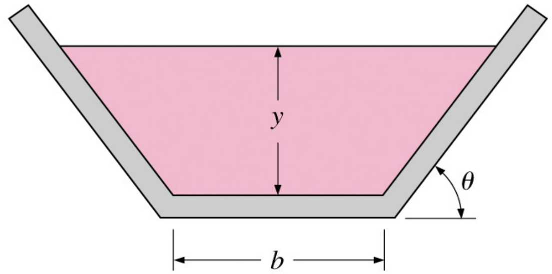


$$\Pi=2\pi\frac{d}{2}-(\pi-\theta)d=\pi d-(\pi d-\theta d)=\theta d$$



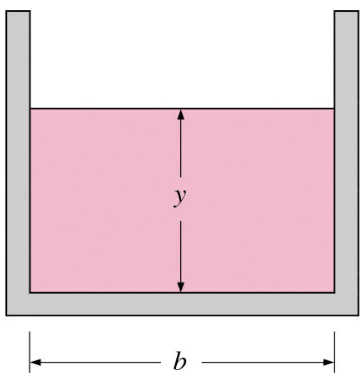
$$A_c = R^2(\theta - \sin\theta\cos\theta)$$
$$p = 2R\theta$$
$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{2\theta}R$$

(*a*) Circular channel (θ in rad)



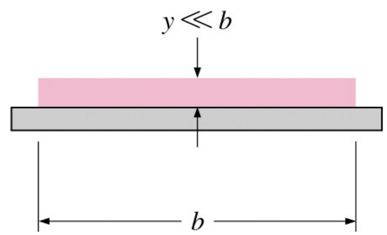
$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{y(b + y/\tan\theta)}{b + 2y/\sin\theta}$$

(*b*) Trapezoidal channel



$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{yb}{b + 2y} = \frac{y}{1 + 2y/b}$$

(*c*) Rectangular channel



$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{yb}{b + 2y} \cong \frac{yb}{b} \cong y$$

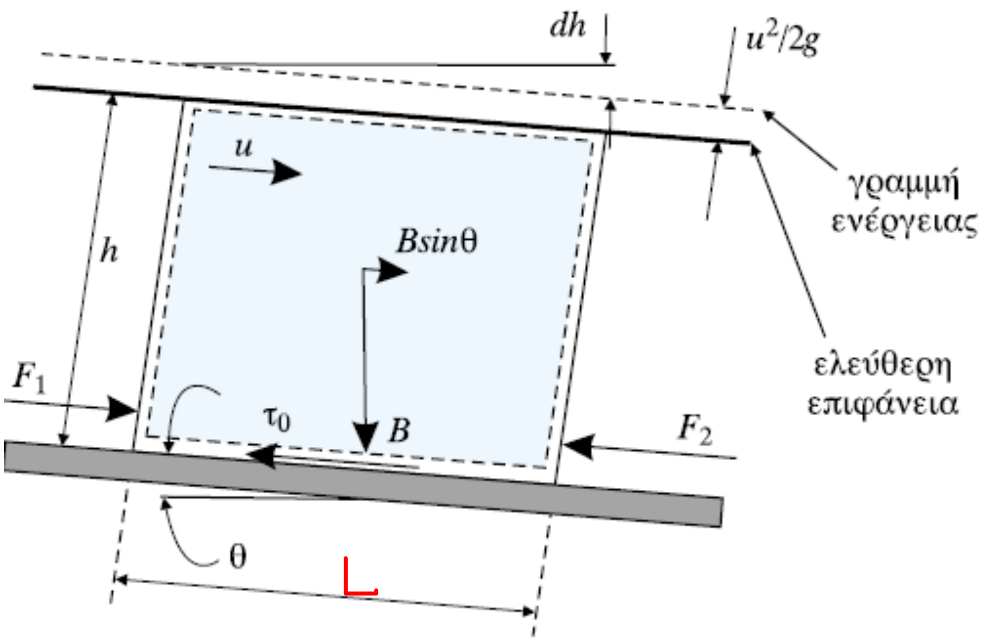
(*d*) Liquid film of thickness y

- Η βρεχόμενη περίμετρος δεν συμπεριλαμβάνει την ελεύθερη επιφάνεια.
- Παραδείγματα R_h για κοινές γεωμετρίες ανοικτών αγωγών δίνονται στο διπλανό σχήμα.

Μόνιμη ομοιόμορφη ροή – Εξίσωση Chezy

Προυποθέσεις για ομοιόμορφη ροή

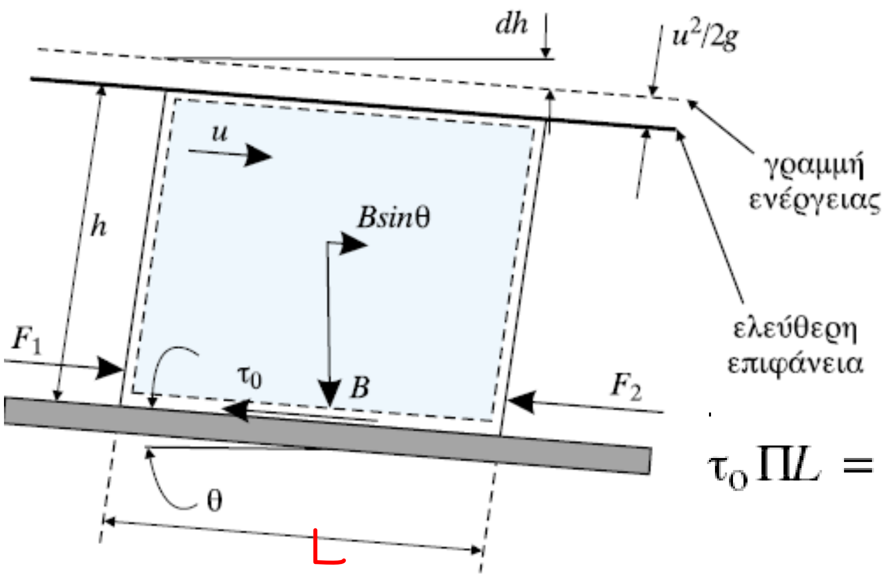
- Να μην υπάρχουν εμπόδια που θα μεταβάλλουν το βάθος ροής.
- Να μην υπάρχουν μεταβολές της εγκάρσιας διατομής του καναλιού.
- Να μην υπάρχει μεταβολή τραχύτητας των στερεών τοιχωμάτων του καναλιού.



Σχήμα. Ομοιόμορφη ροή – Δυνάμεις ασκούμενες σε όγκο ελέγχου του ρευστού.

Παραλληλία: α) Πυθμένας
β) Ελεύθερη επιφάνεια
γ) Υδραυλική γραμμή
δ) Γραμμή ενέργειας

Μόνιμη ομοιόμορφη ροή – Εξίσωση Chezy



$$\tau_o = \frac{1}{8} f \varrho u^2$$

$$\tau_o \Pi L = B \sin\theta \Rightarrow \tau_o \Pi L = \varrho g A L \sin\theta \Rightarrow \tau_o = \frac{A}{\Pi} \varrho g \sin\theta$$

$$\frac{1}{8} f \varrho u^2 = \frac{A}{\Pi} \varrho g s \Rightarrow \frac{1}{8} f \varrho u^2 = R_h \varrho g s \Rightarrow u = \sqrt{\frac{8g}{f}}\ \sqrt{R_h s}$$

Αν ορίσουμε ως σταθερά $C = \sqrt{\frac{8g}{f}}$, τότε $\boxed{u = c\sqrt{R_h s}}$

εξίσωση Chezy

(Γάλλος Μηχανικός, 1769)

όπου R_h είναι η υδραυλική ακτίνα και s είναι η κλίση του πυθμένα του καναλιού

Μόνιμη ομοιόμορφη ροή – Εξίσωση Manning

$$u = c\sqrt{R_h s}$$ **εξίσωση Chezy**

- Αν και έχει εξαχθεί για μόνιμη ομοιόμορφη ροή χρησιμοποιείται με μεγάλη ακρίβεια και για βαθμιαία ανομοιόμορφη ροή
- Πρόβλεψη της σταθεράς ***c*** για ένα δεδομένο κανάλι
- Η απλούστερη και ευρέως χρησιμοποιούμενη είναι η **εξίσωση Manning**:

$$c = \frac{R_h^{1/6}}{n} \Rightarrow u = \frac{1}{n} R_h^{2/3} \sqrt{s}$$

Όπου **n** ο συντελεστής Manning, εξαρτάται από το είδος της επιφάνειας και προσδιορίζεται πειραματικά

$$Q = \frac{1.0}{n} A R_h^{2/3} S_0^{1/2}$$

στο SI

$$Q = \frac{1.49}{n} A R_h^{2/3} S_0^{1/2}$$

στο αγγλικό σύστημα μονάδων

Τιμές του συντελεστή Manning

Πίνακας. Τιμές του συντελεστή Manning.

Είδος επιφανείας	*n*
Πλαστικός Αγωγός	0,009
Καλά λειασμένος ξύλινος αγωγός	0,009
Καθαρό τσιμέντο-πολύ λείος Αγωγός	0,010
Καλό σκυρόδεμα. Χαλύβδινοι αγωγοί με ηλώσεις	0,013
Λείο έδαφος ή χαλίκι	0,020
Ρυάκια ποτάμια χωρίς βλάστηση	0,030

Συντελεστής Manning

Type of Channel and Description		Minimum	Normal	Maximum
Streams				
Streams on plain				
Clean, straight, full stage, no rifts or deep pools		0.025	0.03	0.033
Clean, winding, some pools, shoals, weeds & stones		0.033	0.045	0.05
Same as above, lower stages and more stones		0.045	0.05	0.06
Sluggish reaches, weedy, deep pools		0.05	0.07	0.07
Very weedy reaches, deep pools, or floodways		0.075	0.1	0.15
with heavy stand of timber and underbrush				
Mountain streams, no vegetation in channel, banks steep, trees & brush along banks submerged at high stages				
Bottom: gravels, cobbles, and few boulders		0.03	0.04	0.05
Bottom: cobbles with large boulders		0.04	0.05	0.07

Σύνθετος Συντελεστής Manning

Channel Conditions		Values	
Material Involved	Earth	n0	0.025
	Rock Cut		0.025
	Fine Gravel		0.024
	Coarse Gravel		0.027
Degree of irregularity	Smooth	n1	0.000
	Minor		0.005
	Moderate		0.010
	Severe		0.020
Variations of Channel Cross Section	Gradual	n2	0.000
	Alternating Occasionally		0.005
	Alternating Frequently		0.010-0.015
Relative Effect of Obstructions	Negligible	n3	0.000
	Minor		0.010-0.015
	Appreciable		0.020-0.030
	Severe		0.040-0.060
Vegetation	Low	n4	0.005-0.010
	Medium		0.010-0.025
	High		0.025-0.050
	Very High		0.050-0.100
Degree of Meandering	Minor	m5	1.000
	Appreciable		1.150
	Severe		1.300

$$n = (n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4)\, m_5$$

Manning (στο αγγλικό σύστημα μονάδων)

EXAMPLE 15.5

Discharge Using Chezy Equation

Problem Statement

Using the Chezy equation with Manning's n, compute the discharge in a concrete channel 10 ft wide if the depth of flow is 6 ft and the slope of the channel is 0.0016.

Define the Situation

Water flows in a concrete channel. Width = 10 ft. Depth = 6 ft. Slope = 0.0016.

Properties: $n = 0.015$ for concrete channel (Table 15.1).

State the Goal

Find the discharge, Q.

Generate Ideas and Make a Plan

Use the Chezy equation for traditional units, Eq. (15.16).

Take Action (Execute the Plan)

$$Q = \frac{1.49}{n} A R_h^{2/3} S_0^{1/2}$$

$$R_h = \frac{60}{22} = 2.73 \text{ ft} \quad \text{and} \quad R_h^{2/3} = 1.95$$

$$S_0^{1/2} = 0.04 \quad \text{and} \quad A = 60 \text{ ft}^2$$

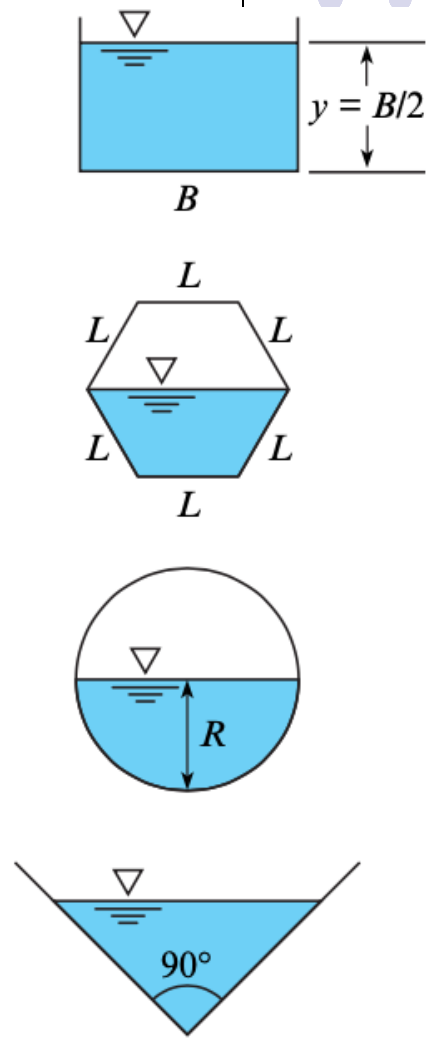
$$Q = \frac{1.49}{0.015}(60)(1.96)(0.04) = \boxed{467 \text{ cfs}}$$

$$Q = \frac{1.0}{n} A R_h^{2/3} S_0^{1/2}$$

Αρίστη υδραυλική διατομή

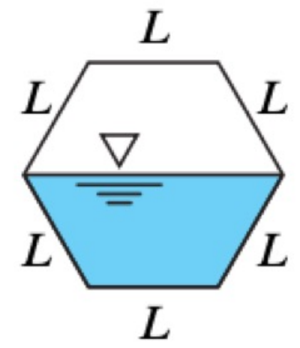
$$\dot{V} = uA = \frac{A R_h^{2/3}\sqrt{s}}{n} = \frac{1}{n} A\left(\frac{A}{\Pi}\right)^{2/3}\sqrt{s} = \frac{1}{n}\frac{\mathrm{A}^{5/3}}{\Pi^{2/3}}\sqrt{s}$$

- Για ορισμένο κανάλι, συγκεκριμένης τραχύτητας, κλίσης και εμβαδού εγκάρσιας διατομής η μέγιστη παροχή θα δίνεται για τη διατομή δεδομένου εμβαδού που έχει την ελάχιστη βρεχόμενη περίμετρο
- Αρίστη υδραυλική διατομή (most efficient section)
- Αυτή είναι η **ημικυκλική** (συνεπάγεται και οικονομία στην κατασκευή, λόγω μικρότερης περιμέτρου)
- Έτσι ένας ημικυκλικός αγωγός μεταφέρει πάντα περισσότερο νερό από κάθε άλλο αγωγό οπουδήποτε σχήματος, όταν το εμβαδόν, η κλίση και ο συντελεστής Manning παραμένουν σταθερά



Αρίστη υδραυλική διατομή σε αγωγό τραπεζοειδούς διατομής

($m_1 = m_2 = m$, ίδια κλίση)



$$\left.\begin{array}{l} A=bh+mh^2 \\ \Pi=b+2h\sqrt{1+m^2} \end{array}\right\} \Rightarrow A=(\Pi-2h\sqrt{1+m^2})h+mh^2 \;(1)$$

$$Q=uA=A\frac{1}{n}R_n^{2/3}\sqrt{s}=A\frac{1}{n}\left(\frac{A}{\Pi}\right)^{2/3}\sqrt{s}=\frac{1}{n}\frac{A^{5/3}}{\Pi^{2/3}}\sqrt{s}\Rightarrow A^{5/3}=\frac{Qn}{\sqrt{s}}\Pi^{2/3}=c\Pi^{2/3}\Rightarrow A=c\Pi^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}}=c\Pi^{2/5}\;(2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow \Pi h-2h^2\sqrt{1+m^2}+mh^2=c\Pi^{2/5}$$

Η βρεχόμενη περίμετρος γίνεται ελάχιστη για: $\frac{d\Pi}{dh}=0\Rightarrow \Pi-4h\sqrt{1+m^2}+2mh=0\Rightarrow$

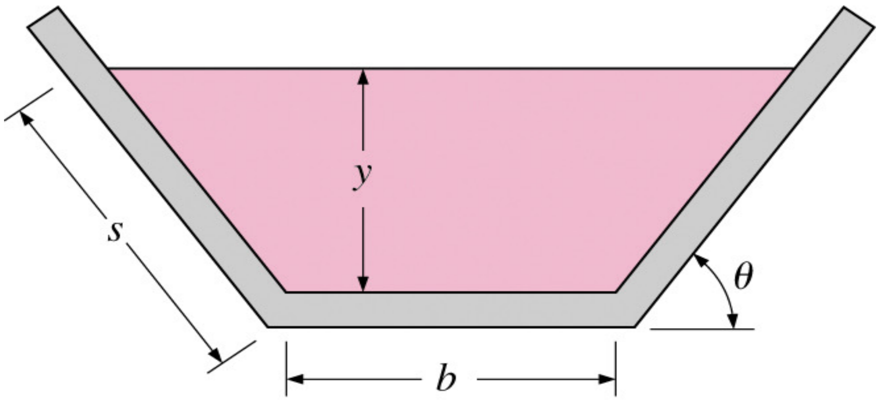
$$\Pi=4h\sqrt{1+m^2}-2mh\;(3)$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (1): $A=2h^2\sqrt{1+m^2}-mh^2$

$$R_h=\frac{A}{\Pi}=\frac{2h^2\sqrt{1+m^2}-mh^2}{4h\sqrt{1+m^2}-2mh}=\frac{(2\sqrt{1+m^2}-m)h^2}{(4\sqrt{1+m^2}-2m)h}=\frac{h}{2}$$

Ο λόγος *$A/\Pi=R_h$ είναι ίσος με $h/2$* για το μισό εξάγωνο, και άρα αυτό είναι το τραπέζιο με την μικρότερη υγρή περίμετρο

Αρίστη υδραυλική διατομή σε αγωγό τραπεζοειδούς διατομής
($m_1 = m_2 = m$, ίδια κλίση)



$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{y(b + y/\tan\theta)}{b + 2y/\sin\theta}$$

- Same analysis can be performed for a trapezoidal channel

$$y = \frac{b\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

- Similarly, taking the derivative of *p* with respect to q, shows that the optimum angle is $\theta = 60°$

- *For this angle, the best flow depth is*

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{2}b}$$

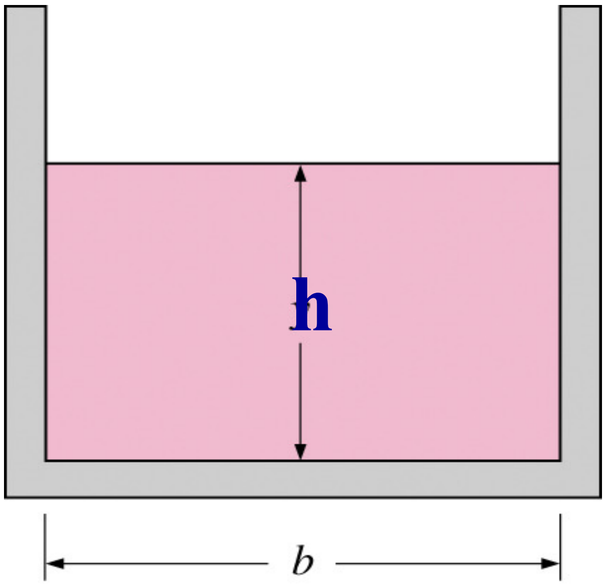
Αρίστη υδραυλική διατομή σε αγωγό ορθογώνιας διατομής

$$A = 2h^2\sqrt{1+m^2} - mh^2 \qquad \qquad A = 2h^2$$

$$\Rightarrow \qquad \qquad \Rightarrow R_h = \frac{A}{\Pi} = \frac{h}{2}$$

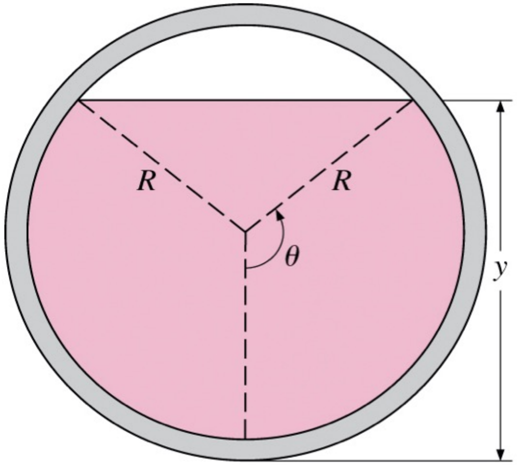
$$\Pi = 4h\sqrt{1+m^2} - 2mh \qquad \qquad \Pi = 4h$$

$$\left.\begin{array}{l} A = bh \\ A = 2h^2 \end{array}\right| \Rightarrow bh = 2h^2 \Rightarrow h = \frac{b}{2}$$

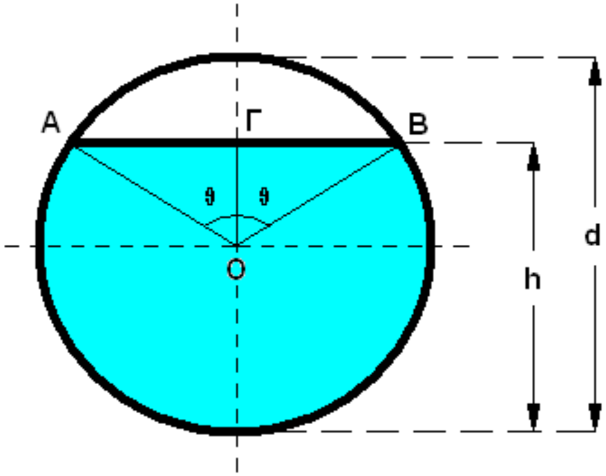


Το βάθος της ροής είναι ίσο με το μισό του πλάτους του πυθμένα του καναλιού

Ροή σε αγωγό κυκλικής διατομής μερικά γεμάτο



- Μερική πλήρωση αγωγών σε δίκτυα αποχέτευσης ή παροχέτευσης ομβρίων, άρα συμπεριφορά ανοικτών αγωγών
- Γνώση τής παροχής/ταχύτητας με το βάθος του ρευστού σημαντική για το σχεδιασμό του δικτύου



$$A=\left(\frac{d^2}{4}\pi\right)-\left[\left(\frac{d^2}{4}(\pi-\theta)\right)-\frac{B\left(h-\frac{d}{2}\right)}{2}\right]$$

Εμβαδόν κύκλου — Εμβαδόν τόξου — Εμβαδόν τριγώνου

$$A_c = R^2(\theta - \sin\theta\cos\theta)$$

$$p = 2R\theta$$

$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{2\theta}R$$

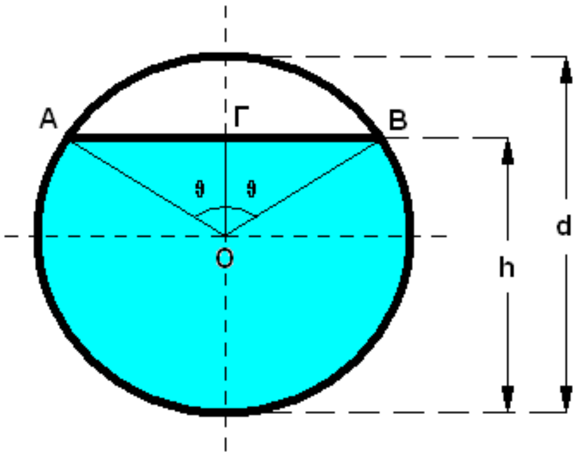
$$A=\frac{\pi d^2}{4}-\left[\frac{d^2\theta}{4}-\frac{d^2}{4}\cos\theta\sin\theta\right]=\frac{d^2}{4}\left[\pi-\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right] \Rightarrow R_h=\frac{\mathrm{A}}{\Pi}=\frac{d}{4}\left(1+\frac{\sin 2\theta}{2\pi-2\theta}\right)$$

$$\Pi = d\,(\pi-\theta)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Manning:

$$Q=\frac{1}{n}AR_h^{2/3}\sqrt{s}=\frac{\sqrt{s}}{n}\frac{d^2}{4}\left(\pi-\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\left[\frac{d}{4}\left(1+\frac{\sin 2\theta}{2\pi-2\theta}\right)\right]^{2/3}=\frac{\sqrt{s}}{n}\frac{d^{8/3}}{4^{5/3}}\left(\pi-\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\left(1+\frac{\sin 2\theta}{2\pi-2\theta}\right)^{2/3}$$

Ροή σε αγωγό κυκλικής διατομής μερικά γεμάτο



Για γεμάτο αγωγό (θ = 0) $\Rightarrow Q = \frac{\sqrt{s}}{n}\frac{d^{8/3}}{4^{5/3}}\pi$

παραγωγίζοντας βρίσκεται το μέγιστο της συνάρτησης, δηλ. **Q_{max}** για λόγο **<u>h/d = 0,94</u>**

Η ταχύτητα είναι: $u = \frac{\sqrt{s}}{n}R_h^{2/3} = \frac{\sqrt{s}}{n}\left[\frac{d}{4}\left(1+\frac{\sin 2\theta}{2\pi - 2\theta}\right)\right]^{2/3}$

και για γεμάτο αγωγό (θ=0) $u_o = \frac{\sqrt{s}}{n}\left(\frac{d}{4}\right)^{2/3}$

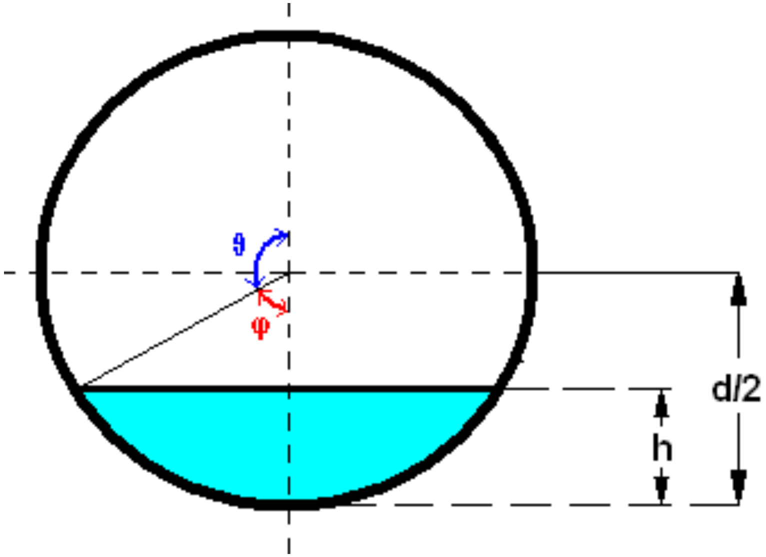
παραγωγίζοντας βρίσκεται το μέγιστο της συνάρτησης, δηλ. **u_{max}** για λόγο **<u>h/d=0,81</u>**

(σημείωση 1: ο γεμάτος αγωγός δεν έχει μέγιστη ταχύτητα και παροχή)

(σημείωση 2: αποφυγή μικρών βαθών διότι: μικρές ταχύτητες → επικαθίσεις υλικών)

Παράδειγμα

- Παροχή Q=0.5 m^3/s, όταν είναι πλήρης.
- Όταν το βάθος είναι h/d=1/4, πρέπει $\upsilon \geq 0,7$ m/s για την αποφυγή καθιζήσεων.
- Να βρεθούν τα d & s (κλίση), αν n=0.012



Λύση

$$\frac{h}{d}=\frac{\frac{d}{2}-\frac{d}{2}\cos\phi}{d}=\frac{\frac{d}{2}(1-\cos\phi)}{d}=\frac{1}{2}(1-\cos\phi)=\frac{1}{4}\Rightarrow\cos\phi=\frac{1}{2}\Rightarrow\hat{\phi}=60^o\ \ldots\&\ldots\hat{\theta}=120^o$$

$$u=u_o\left(1+\frac{\sin 2\theta}{2\pi-2\theta}\right)^{2/3}\Rightarrow 0.7=u_o\left(1+\frac{\sin 2\theta}{2\pi-2\theta}\right)^{2/3}\Rightarrow(\gamma\iota\alpha\ldots\theta=120^0)\ldots\upsilon_0=1m/s$$

$$Q_0=\upsilon_0 A=\upsilon_0\pi\frac{d^2}{4}\Rightarrow d=0,798m$$

$$u_o=\frac{\sqrt{s}}{n}\left(\frac{d}{4}\right)^{2/3}\Rightarrow 1=\frac{\sqrt{s}}{0,012}\left(\frac{0,798}{4}\right)^{2/3}\Rightarrow s=0,0012=0,12\%$$

Παράδειγμα

Τι κλίση πρέπει να έχει ένας αργιλοπυριτικός σωλήνας αποχέτευσης διαμέτρου **610 mm**, έτσι ώστε γεμάτος μέχρι τη μέση να παροχετεύει **0,17 m³/s**. Τι κλίση αν ρέει γεμάτος ; (**n = 0,013**)

Λύση

½ ροή

$$R_h = \frac{A}{\Pi} = \frac{\frac{1}{2}\pi\frac{d^2}{4}}{\frac{1}{2}\pi d} = \frac{1}{4}d = 152{,}5mm$$

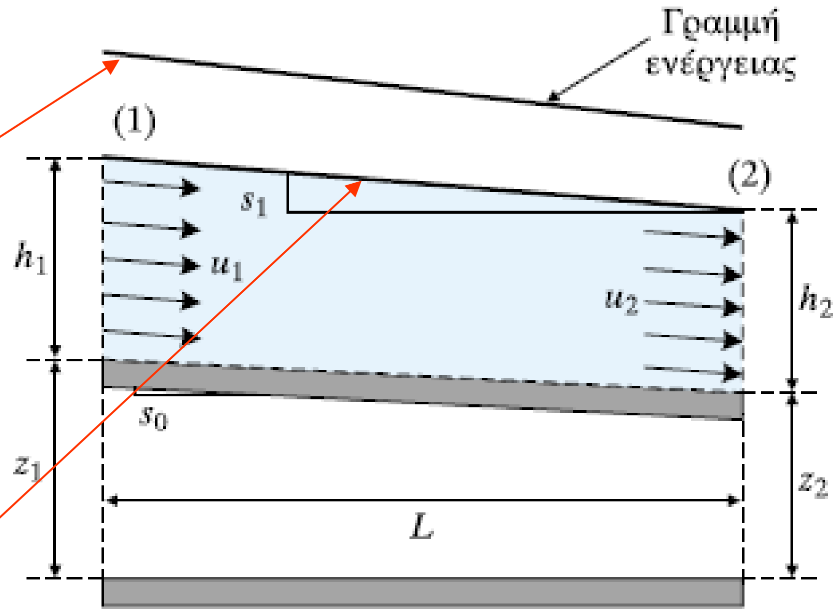
$$Q = 0{,}17 = \frac{A}{n}R_h^{2/3}\sqrt{S} = \frac{\frac{1}{2}\pi\frac{0{,}610^2}{4}}{0{,}013}(0{,}1525)^{2/3}\sqrt{S} \Rightarrow S = 0{,}0028 = 2{,}8\ {}^0/_{00}$$

Ρέει γεμάτος

$$R_h = \frac{A}{\Pi} = \frac{\pi\frac{d^2}{4}}{\pi d} = \frac{1}{4}d = 152{,}5mm$$

$$Q = 0{,}17 = \frac{A}{n}R_h^{2/3}\sqrt{S} = \frac{\pi \cdot 0{,}610^2}{4 \cdot 0{,}013}(0{,}1525)^{2/3}\sqrt{S} \Rightarrow S = 0{,}00071 = 0{,}71\ {}^0/_{00}$$

Ειδική ενέργεια ροής (σε ανοικτό κανάλι)



Συνολικό ύψος ρευστού (συνολική μηχανική ενέργεια ανά μονάδα μάζας)

$$E = \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} + z$$

Ύψος ελεύθερης επιφάνειας ρευστού (γραμμή υδραυλικής κλίσης)

$$\frac{p}{\rho g} + z$$

Αν z = 0 (επίπεδο αναφοράς), για τον πυθμένα του καναλιού, τότε **η ποσότητα**:

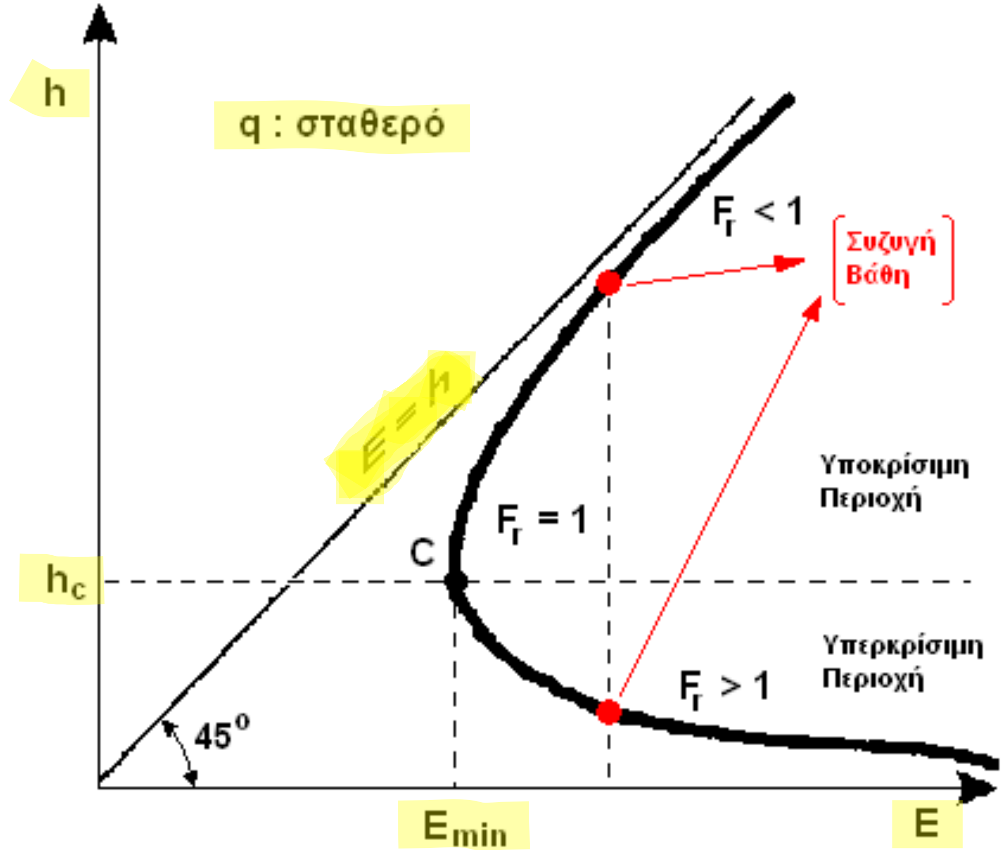
E = (βάθος) + (ύψος κινητικής ενέργειας)

είναι η **Ειδική ενέργεια (specific energy) / μονάδα βάρους**

$$E = h + \frac{\upsilon^2}{2g} = h + \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{A}\right)^2 = h + \frac{1}{2g}\left(\frac{qb}{bh}\right)^2 = h + \frac{q^2}{2gh^2}$$

όπου : b=πλάτος αγωγού, Ειδική παροχή q = Q/b (παροχή ανά μονάδα πλάτους μονάδες: m^2/s)

Ειδική ενέργεια ροής



$$E = h + \frac{\upsilon^2}{2g} = h + \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{A}\right)^2 \Rightarrow$$

$$E = h + \frac{1}{2g}\left(\frac{qb}{bh}\right)^2 \Rightarrow$$

$$E = h + \frac{q^2}{2gh^2}$$

Έστω q σταθερή, τότε:

- Για μικρά βάθη, η Ε τείνει στο άπειρο
- Για μεγάλα βάθη, η Ε προσεγγίζει την Ε = h
- Η ειδική ενέργεια στο C, είναι η ελάχιστη δυνατή, για σταθερή ειδική παροχή, και ονομάζεται **κρίσιμη ενέργεια**
- Το αντίστοιχο βάθος, ονομάζεται **κρίσιμο βάθος** και προκύπτει με παραγώγιση και εξίσωση της παραγώγου με το μηδέν

$$A\rho.Froude = \sqrt{\frac{\Delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\varepsilon\iota\varsigma\_\alpha\delta\rho\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma}{\Delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\varepsilon\iota\varsigma\_B\alpha\rho\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha\varsigma}} =$$

$$\sqrt{\frac{M\alpha}{M\alpha'}} = \sqrt{\frac{\rho L^3(\frac{L}{T^2})}{\rho L^3 g}} = \sqrt{\frac{\rho L^2(\frac{L^2}{T^2})}{\rho L^3 g}} =$$

$$\sqrt{\frac{L^2u^2}{L^3 g}} = \sqrt{\frac{u^2}{L\,g}} \Rightarrow Fr = \frac{u}{\sqrt{hg}} = (\sqrt{Ri})$$

Ειδική ενέργεια ροής

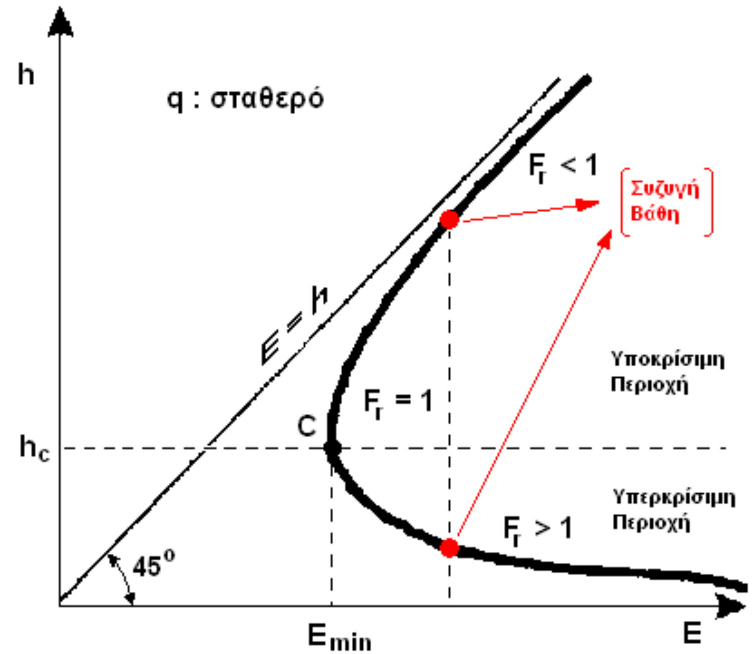
$$\frac{\partial E}{\partial h} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\left(h + \frac{q^2}{2gh^2}\right)}{\partial h} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{q^2}{2g}\left(-\frac{2}{h_c^{-3}}\right) = 0 \Rightarrow h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

και η τιμή της ελάχιστης ενέργειας στο **κρίσιμο βάθος**

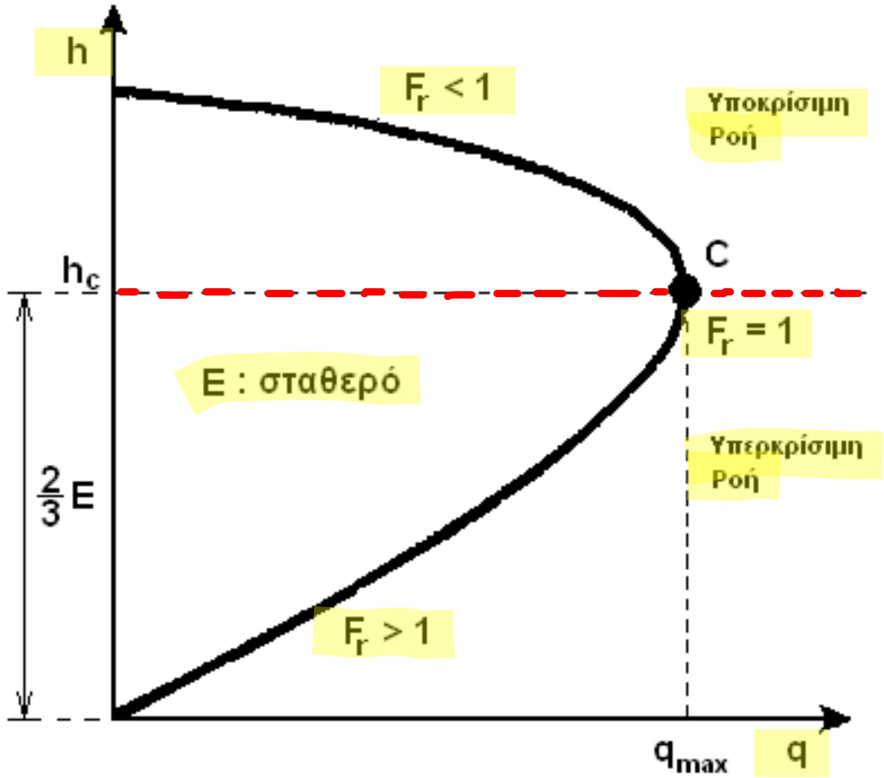
$$E_{\min} = E_c = h_c + \frac{q^2}{2gh_c^2} = h_c + \frac{h_c^3 g}{2gh_c^2} = h_c + \frac{1}{2}h_c \Rightarrow E_{\min} = \frac{3}{2}h_c$$

για κάθε τιμή της ειδικής ενέργειας $\neq$ της κρίσιμης,

αντιστοιχούν δύο βάθη (συζυγή βάθη, conjugate depths)



Ειδική ενέργεια ροής



Σχήμα. Μεταβολή της ειδικής παροχής με το βάθος για σταθερή ειδική ενέργεια.

Επειδή η παροχή ανά μονάδα πλάτους είναι

$$q = u \cdot h$$

Η Κρίσιμη ταχύτητα (critical velocity) είναι:

$$u_c = \frac{q}{h_c} = \frac{\sqrt{h_c^3 g}}{h_c} \Rightarrow u_c = \sqrt{h_c g}$$

- Καμία σχέση με την κρίσιμη ταχύτητα ροής (μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή)
- Ταυτίζεται με την κρίσιμη ταχύτητα διαδόσεως κυμάτων επιφανείας μικρού πλάτους

Υπερκρίσιμη – Υποκρίσιμη ροή

$$Fr = \frac{\upsilon}{\sqrt{gh}} \qquad \upsilon_c = \sqrt{gh_c}$$

Ταυτίζεται με την κρίσιμη ταχύτητα διαδόσεως κυμάτων επιφανείας μικρού πλάτους

Ταχύτητα ρευστού > u_c

- Fr > 1, υπερκρίσιμη ροή, δηλαδή η ταχύτητα ροής (ταχύτητα μεταφοράς ενός φύλου όταν ρίξουμε μια πέτρα σε μια λίμνη)

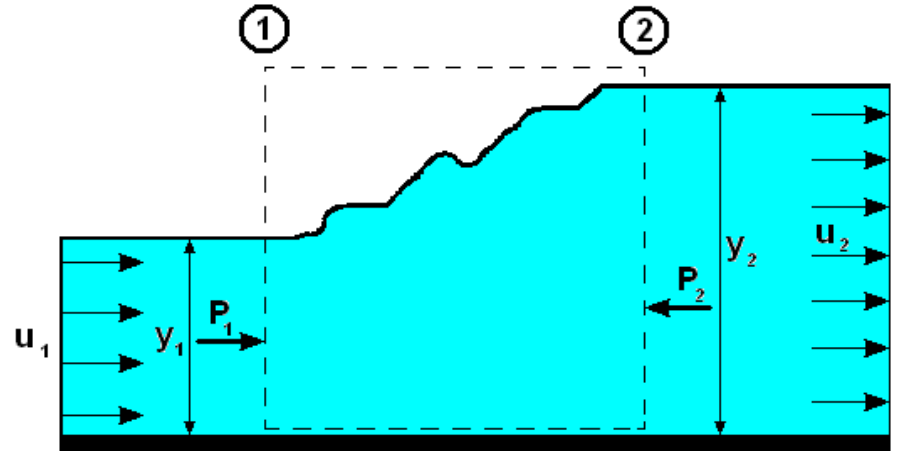
  είναι μεγαλύτερη

  της ταχύτητας κυμάτων (ταχύτητα των κυμάτων σε μια λίμνη όταν ρίξουμε μια πέτρα)
- μικρό βάθος ροής – μεγάλη ταχύτητα ροής
- Οι επιφανειακές διαταραχές δεν μπορούν να διαδοθούν ανάντι του ρευστού

Ταχύτητα ρευστού < u_c

- Fr < 1, υποκρίσιμη ροή
- μεγάλο βάθος ροής – μικρή ταχύτητα ροής
- κάθε μικρή επιφανειακή διαταραχή μπορεί να διαδοθεί ανάντι & κατάντι

Υδραυλικό άλμα



Σχήμα. Υδραυλικό άλμα σε ορθογώνιο οριζόντιο κανάλι.

Φαινόμενο κατά το οποίο η ροή σε ένα κανάλι από υπερκρίσιμη ($Fr > 1$) γίνεται υποκρίσιμη ($Fr < 1$) και συνοδεύεται από:

$$Fr = \frac{\upsilon}{\sqrt{gh}}$$

- Αύξηση του βάθους ροής
- Αυξημένες απώλειες ενέργειας λόγω στροβιλισμού.

Χρησιμότητα: Απορροφητής-Διασκορπιστής/Διαχυτής ενέργειας κατάντι τής ροής, π.χ. φράγμα (περιορισμός τής καταστροφικής επίδρασης, νερού ρέοντος με μεγάλη ταχύτητα)

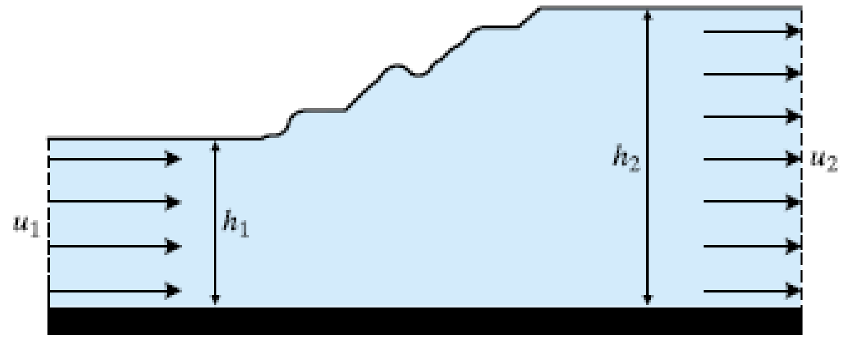
Υποθέσεις:

- Οριζόντια διώρυγα ορθογωνικής διατομής ($s < 0.05$ ή 5 %) όχι δύναμη βαρύτητας
- W, το πλάτος της διώρυγας.
- Γραμμές ροής παράλληλες, δηλαδή οι πιέσεις στα σημεία 1 & 2, είναι υδροστατικές.

Υδραυλικό άλμα

Φαινόμενο κατά το οποίο η ροή σε ένα κανάλι από υπερκρίσιμη ($Fr > 1$) γίνεται υποκρίσιμη ($Fr < 1$)

$$Fr = \frac{\upsilon}{\sqrt{gh}}$$



Από τις εξισώσεις ορμής & ενέργειας αποδυκνείεται ότι:

$$h_2 = \frac{1}{2}\left(-h_1 + \sqrt{h_1^2 + \frac{8}{g} h_1 u_1^2}\right) \Rightarrow u_1^2 = \frac{1}{2} g h_1 \left(\frac{h_2}{h_1}\right)\left[1 + \frac{h_2}{h_1}\right] \rightarrow \boxed{\mathrm{Fr}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)\right]^{1/2}}$$

$$\boxed{y_2 = \frac{y_1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\mathrm{Fr}_1^2} - 1\right)}$$

Επειδή $h_2 > h_1$, προκύπτει ότι **$Fr_1 > 1$ (υπερκρίσιμη ροή)**

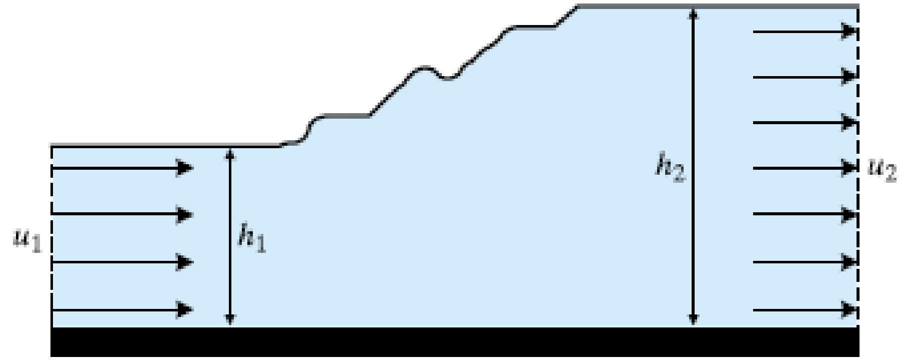
Επειδή ισχύει και η εξίσωση συνέχειας.... $u_1 b h_1 = u_2 b h_2$

$$u_2 = (g h_2)^{1/2}\left(\frac{1 + \frac{h_2}{h_1}}{2}\right)^{1/2}\left[\frac{h_1}{h_2}\right] \Rightarrow \mathrm{Fr}_2 = \left[\frac{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + \frac{h_1}{h_2}}{2}\right]^{1/2}$$

Από την οποία προκύπτει ότι

$Fr_2 < 1$ (υποκρίσιμη ροή μετά το άλμα)

Υδραυλικό άλμα



Ύψος απωλειών ενέργειας

$$h_f = E_1 - E_2 = \left(h_1 + \frac{u_1^2}{2g}\right) - \left(h_2 + \frac{u_2^2}{2g}\right) \longrightarrow \boxed{h_f = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4 h_1 h_2}}$$

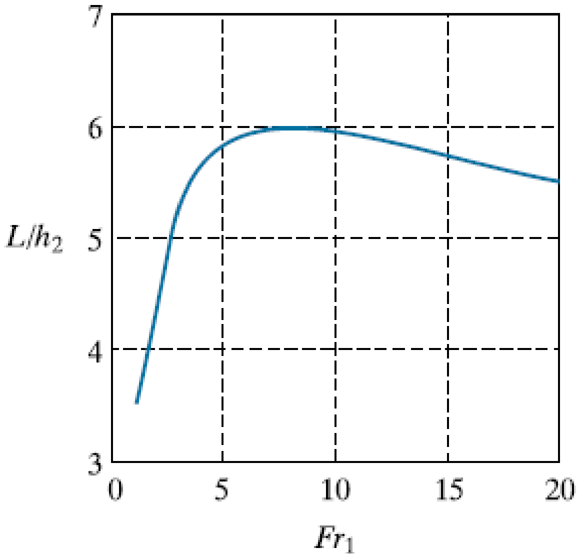
$$h_L = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 y_1 y_2}$$

Επειδή δεν νοείται ύψος απωλειών αρνητικό (h_f<0) άρα πάντα $h_2 > h_1$

Το μήκος L του υδραυλικού άλματος δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά

αποδυκνείεται ότι ο λόγος L/h_2 είναι συνάρτηση του αριθμού Froude της ανάντι ροής Fr_1

(βλ. Σχήμα, για ορθογώνια κανάλια)



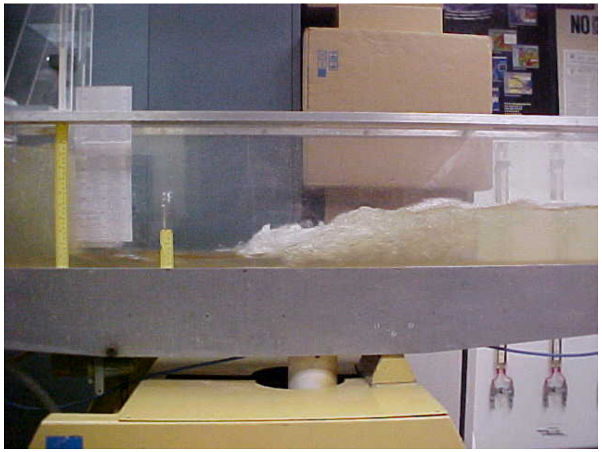
Hydraulic jump

- hydraulic jump occurs when the upstream flow is supercritical ($Fr>1$). Flow will go from supercritical ($Fr>1$) to subcritical ($Fr<1$) over a jump.
- to have a jump, there must be a flow impediment downstream
- the downstream impediment could be a weir, a bridge abutment, a dam, or simply channel friction
- water depth increases during a hydraulic jump and energy is dissipated as turbulence
- often, engineers will purposely install impediments in channels in order to force jumps to occur.
- according to Chaudhry (1993), the best jumps occur when $4.5<Fr<9$
  - a strong jump occurs when $1>Fr>9$,
  - a steady jump occurs when $4.5<Fr<9$,
  - an oscillating (περιοδικώς μεταβαλλόμενο) jump occurs when $2.5<Fr<4.5$,
  - a weak jump occurs when $1.7<Fr<2.5$, and
  - an undular (κυματιστός) jump occurs when $1<Fr<1.7$

(Πηγή: http://web.mit.edu)

Κατηγορίες υδραυλικών αλμάτων

- a strong jump occurs when 1>Fr>9,
- a steady jump occurs when 4.5<Fr<9,
- an oscillating (περιοδικώς μεταβαλλόμενο) jump occurs when 2.5<Fr<4.5,
- a weak jump occurs when 1.7<Fr<2.5, and
- an undular (κυματιστός) jump occurs when 1<Fr<1.7



Steady jump (4.5<Fr<9)

Undular (κυματιστό) jump (1<Fr<1.7)

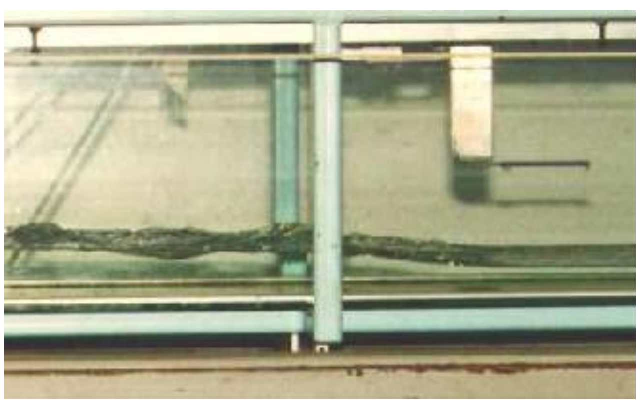
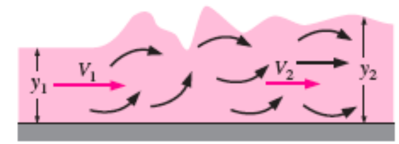
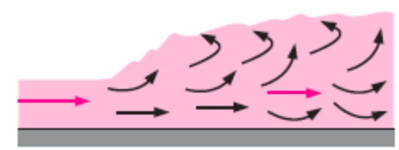
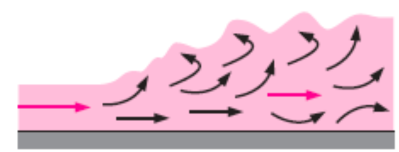
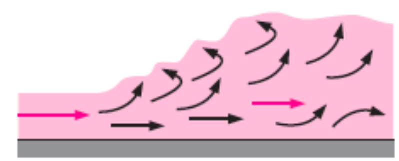


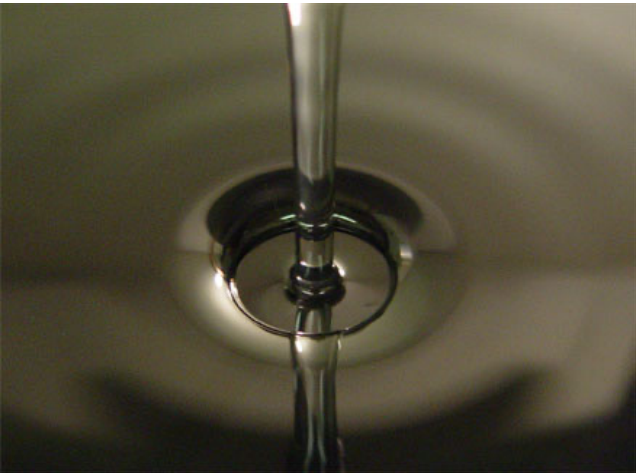
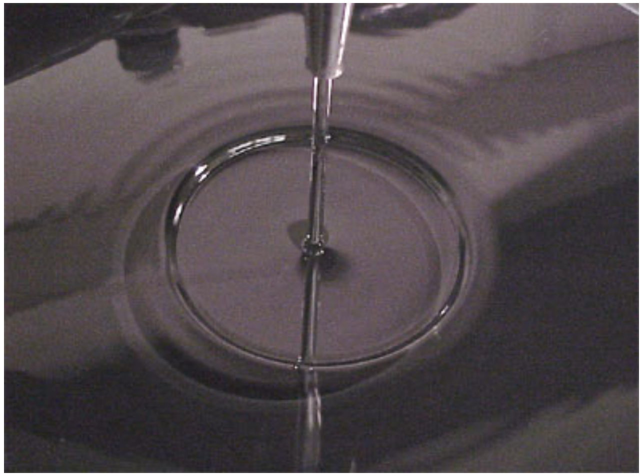
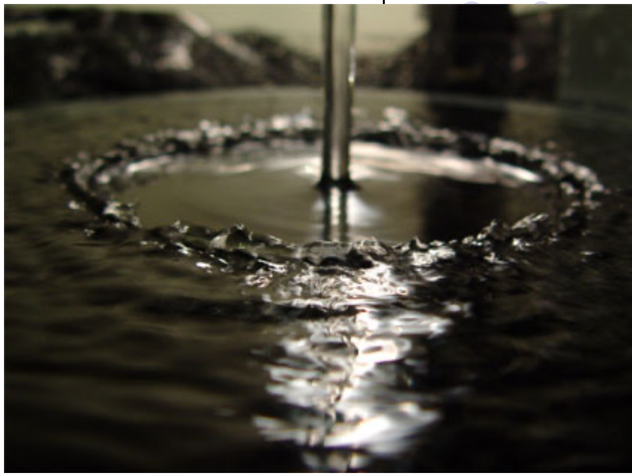
TABLE 13–4

Classification of hydraulic jumps

Source: U.S. Bureau of Reclamation (1955).

Upstream Fr_1	Depth Ratio y_2/y_1	Fraction of Energy Dissipation	Description	Surface Profile
<1	1	0	*Impossible jump*. Would violate the second law of thermodynamics.	
1–1.7	1–2	<5%	*Undular jump* (or *standing wave*). Small rise in surface level. Low energy dissipation. Surface rollers develop near Fr = 1.7.	
1.7–2.5	2–3.1	5–15%	*Weak jump*. Surface rising smoothly, with small rollers. Low energy dissipation.	
2.5–4.5	3.1–5.9	15–45%	*Oscillating jump*. Pulsations caused by entering jets at the bottom generate large waves that can travel for miles and damage earth banks. Should be avoided in the design of stilling basins.	
4.5–9	5.9–12	45–70%	*Steady jump*. Stable, well-balanced, and insensitive to downstream conditions. Intense eddy motion and high level of energy dissipation within the jump. Recommended range for design.	
>9	>12	70–85%	*Strong jump*. Rough and intermittent. Very effective energy dissipation, but may be uneconomical compared to other designs.	

Hydraulic jump (due to channel friction)

- **Figures 1 and 2** illustrate the laminar circular hydraulic jump
- **Figure 3** shows a turbulent circular jump with a pronounced outer crown
- The circular hydraulic jump may arise when a fluid jet falling vertically at high Reynolds number strikes a horizontal plate. Fluid is expelled radially, and the layer generally thins until reaching a critical radius at which the layer depth increases abruptly.

(Πηγή: http://web.mit.edu)

Περιστρεφόμενος υδατοφράκτης, σε ορθογώνιο κανάλι, μέγιστου πλάτους ανοίγματος 4 m επιτρέπει την είσοδο νερού ταχύτητας 4,14 m/s και παροχής 5,5 m³/s. Να βρεθούν οι συνθήκες στις οποίες σχηματίζεται υδραυλικό άλμα και να υπολογισθούν το ύψος του άλματος και η απώλεια ενέργειας.

Λύση

Το βάθος και ο αριθμός Froude ανάντι του υδατοφράκτη είναι:

$$h_1 = \frac{\dot{V}}{bu_1} = \frac{5{,}5}{4 \times 4{,}14} = 0{,}332\ \mathrm{m}, \qquad \mathrm{Fr}_1 = \frac{u_1}{\sqrt{gh_1}} = \frac{4{,}14}{\sqrt{9{,}81 \times 0{,}332}} = 2{,}29$$

Για να σχηματισθεί υδραυλικό άλμα θα πρέπει:

1. Να ισχύει $\mathrm{Fr}_1 > 1$.
2. Επίσης $\mathrm{Fr}_2 < 1$.
3. Το βάθος κατάντι θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$h_2 = \frac{1}{2}\left(-h_1 + \sqrt{h_1^2 + \frac{8}{g} h_1 u_1^2}\right): \quad \boxed{y_2 = \frac{y_1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\mathrm{Fr}_1^2} - 1\right)}$$

$$h_2 = \frac{1}{2}\left(-h_1 + \sqrt{h_1^2 + \frac{8}{g} h_1 u_1^2}\right) = \frac{-0{,}332 + \sqrt{0{,}332^2 + \frac{8 \times 0{,}332 \times 4{,}14^2}{9{,}81}}}{2} = 0{,}924\ \mathrm{m}$$

Check: Ισχύει ?

$$\mathrm{Fr}_2 = \left[\frac{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + \frac{h_1}{h_2}}{2}\right]^{1/2}$$

Συνεπώς το ύψος του άλματος θα είναι:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = 0{,}924 - 0{,}332 = 0{,}592\ \mathrm{m}$$

Περιστρεφόμενος υδατοφράκτης, σε ορθογώνιο κανάλι, μέγιστου πλάτους ανοίγματος 4 m επιτρέπει την είσοδο νερού ταχύτητας 4,14 m/s και παροχής 5,5 m^3/s. Να βρεθούν οι συνθήκες στις οποίες σχηματίζεται υδραυλικό άλμα και να υπολογισθούν το ύψος του άλματος και η απώλεια ενέργειας.

Λύση

Το ύψος απωλειών υπολογίζεται από τη σχέση $h_f = \dfrac{(h_2 - h_1)^3}{4\,h_1 h_2}$

$$h_f = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4 h_1 h_2} = \frac{(0{,}924 - 0{,}332)^3}{4 \times 0{,}332 \times 0{,}924} = 0{,}168\ \mathrm{m}$$

Έτσι ο ρυθμός απώλειας ενέργειας θα είναι:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{mgh_f}{t} = \frac{\varrho V g h_f}{t} = \varrho \dot{V} g\, h_f = 1000 \times 5{,}5 \times 9{,}81 \times 0{,}168 = 9{,}06\ \mathrm{kW}$$

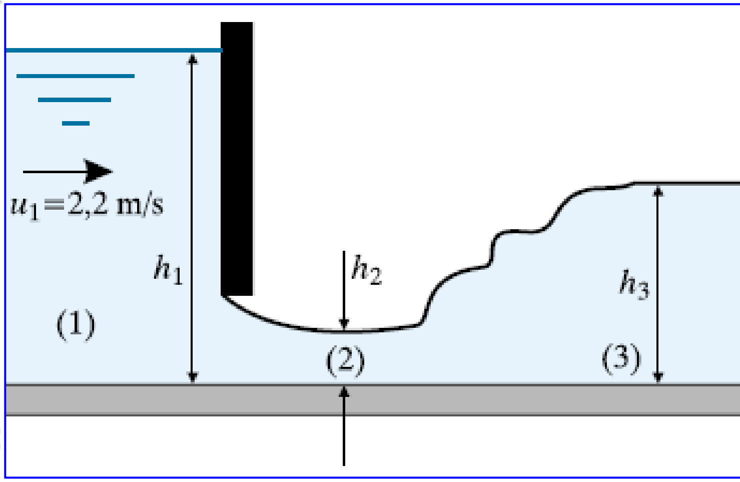
Θεωρήστε τον υδατοφράκτη του Σχήματος. Αν το βάθος h_1 είναι 9 m και όλες οι απώλειες ενέργειας οφείλονται στο υδραυλικό άλμα, να υπολογισθούν τα βάθη h_2 h_3 και το ύψος απωλειών. Το κανάλι είναι ορθογώνιο, οριζόντιο και μεγάλου πλάτους.

Λύση

Η ειδική ενέργεια παραμένει σταθερή μεταξύ των θέσεων (1) και (2). Έτσι θα ισχύει:

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2g} = h_2 + \frac{u_2^2}{2g} \Rightarrow 9 + \frac{2{,}2^2}{2\times 9{,}81} = h_2 + \frac{u_2^2}{2\times 9{,}81} \Rightarrow$$

$$9{,}24 = h_2 + \frac{u_2^2}{19{,}62}$$



Η εξίσωση συνεχείας παρέχει:

$$u_1 h_1 = u_2 h_2 \Rightarrow 19{,}8 = u_2 h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{19{,}8}{u_2}$$

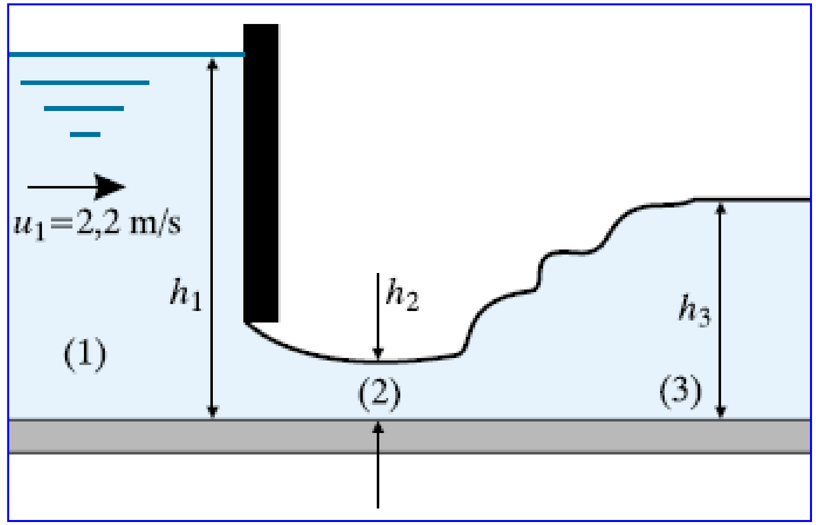
Αντικατάσταση στην εξίσωση ενέργειας οδηγεί στην σχέση:

$$9{,}24 = \frac{19{,}8}{u_2} + \frac{u_2^2}{19{,}62} \Rightarrow u_2^3 - 181{,}29\, u_2 + 388{,}4 = 0 \Rightarrow u_2 = 12{,}24 \text{ m/s}$$

Άρα, $h_2 = \dfrac{19{,}8}{u_2} = \dfrac{19{,}8}{12{,}24} = 1{,}62 \text{ m}$

Θεωρήστε τον υδατοφράκτη του Σχήματος. Αν το βάθος h_1 είναι 9 m και όλες οι απώλειες ενέργειας οφείλονται στο υδραυλικό άλμα, να υπολογισθούν τα βάθη h_2 h_3 και το ύψος απωλειών. Το κανάλι είναι ορθογώνιο, οριζόντιο και μεγάλου πλάτους.

Λύση



$$\boxed{Fr = \frac{\upsilon}{\sqrt{gh}}}$$

$$h_2 = \frac{1}{2}\left(-h_1 + \sqrt{h_1^2 + \frac{8}{g}h_1 u_1^2}\right):$$

$$h_3 = \frac{1}{2}\left(-h_2 + \sqrt{h_2^2 + \frac{8}{g}h_2 u_2^2}\right) = \frac{-1{,}62 + \sqrt{1{,}62^2 + \frac{8 \times 1{,}62 \times 12{,}24^2}{9{,}81}}}{2} = 6{,}22\ \text{m}$$

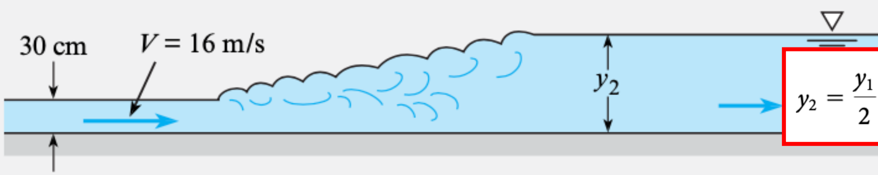
$$h_f = \frac{(h_3 - h_2)^3}{4h_2 h_3} = \frac{(6{,}22 - 1{,}62)^3}{4 \times 1{,}62 \times 6{,}22} = 2{,}4$$

EXAMPLE 15.11

Calculating Head Loss in a Hydraulic Jump

Problem Statement

Water flows in a rectangular channel at a depth of 30 cm with a velocity of 16 m/s, as shown in the following sketch. If a downstream sill (not shown) forces a hydraulic jump, what will be the depth and velocity downstream of the jump? What head loss is produced by the jump?



$$y_2 = \frac{y_1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\mathrm{Fr}_1^2} - 1\right)$$

$$h_L = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1 y_2}$$

Define the Situation

A hydraulic jump is occurring in a rectangular channel.

State the Goal

- Calculate downstream depth and velocity.
- Calculate head loss produced by the jump.

Generate Ideas and Make a Plan

1. To calculate h_L using Eq. (15.43), calculate y_2 from the depth ratio equation (Eq. 15.42). This requires Fr_1.
2. Check validity of head loss by comparing to $E_1 - E_2$.

Take Action (Execute the Plan)

1. Calculate Fr_1, y_2, V_2, and h_L from Eqs. (Eq. 15.42) and (15.43):

$$\mathrm{Fr}_1 = \frac{V}{\sqrt{gy_1}} = \frac{16}{\sqrt{9.81\,(0.30)}} = 9.33$$

$$y_2 = \frac{0.30}{2}\left[\sqrt{1 + 8(9.33)^2} - 1\right] = \boxed{3.81\text{ m}}$$

$$V_2 = \frac{q}{y_2} = \frac{(16\text{ m/s})(0.30\text{ m})}{3.81\text{ m}} = \boxed{1.26\text{ m/s}}$$

$$h_L = \frac{(3.81 - 0.30)^3}{4(0.30)(3.81)} = \boxed{9.46\text{ m}}$$

2. Compare the head loss to $E_1 - E_2$:

$$h_L = \left(0.30 + \frac{16^2}{2 \times 9.81}\right) - \left(3.81 + \frac{1.26^2}{2 \times 9.81}\right) = 9.46\text{ m}$$

The value is the same, so $\boxed{\text{validity of } h_L \text{ equation is verified.}}$

Ροή σε στένωση καναλιού

Η ροή σε ένα κανάλι μπορεί να γίνει από

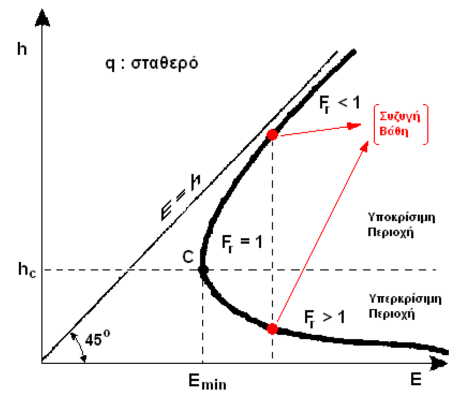
υποκρίσιμη (Fr < 1, μεγάλο βάθος, μικρή ταχύτητα) →
υπερκρίσιμη (Fr > 1, μικρό βάθος, μεγάλη ταχύτητα)

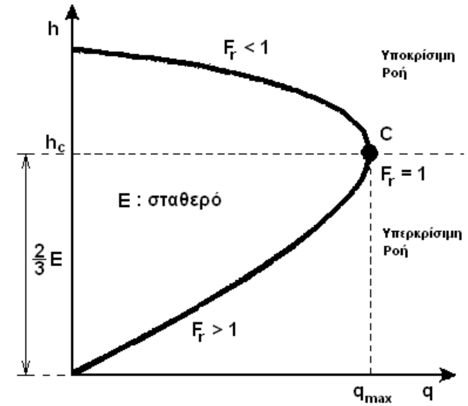
- με αύξηση της κλίσης του πυθμένα
- με μείωση του πλάτους του καναλιού

Πρακτικό ενδιαφέρον της μελέτης των φαινομένων στενώσεων ?

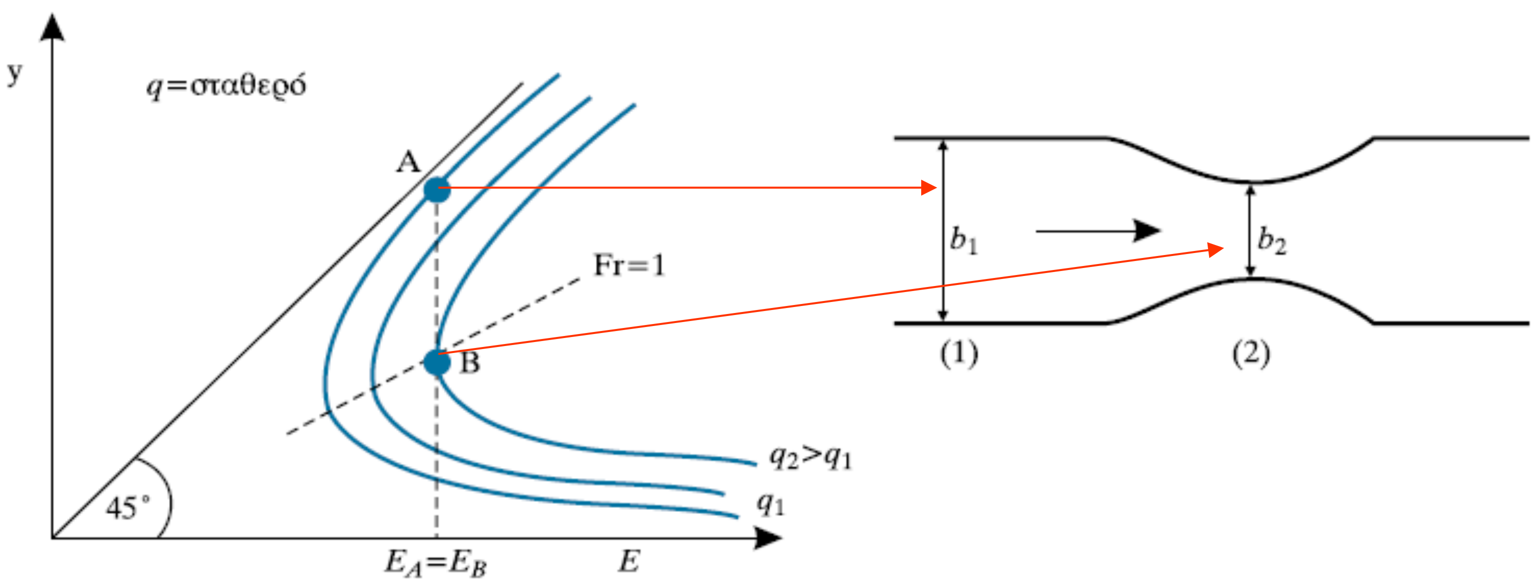
- Μείωση κόστους κατασκευής γεφυρών σε κανάλι/ποταμό, κτλ.

Ροή σε στένωση καναλιού





- Έστω ροή ρευστού σε κανάλι ορθογωνικής διατομής που παρουσιάζει μεταβαλλόμενο πλάτος b.
- Από τις εξισώσεις ενέργειας και συνέχειας και με διαφόριση ως προς ***χ*** (η κατά μήκος απόσταση του καναλιού) προκύπτει ότι:
- εάν σε ένα φαινόμενο στένωσης ισχύει ***Fr = 1*** τότε ***db/dχ = 0***, δηλαδή Κρίσιμη Ροή (με άλλα λόγια μέγιστη παροχή για συγκεκριμένη ενέργεια ροής) μπορούμε να έχουμε στο σημείο ελάχιστου πλάτους χωρίς αυτό να σημαίνει ότι κρίσιμη ροή θα συμβαίνει πάντα μόνο στο σημείο με τη μικρότερη διατομή.



Ροή σε στένωση καναλιού

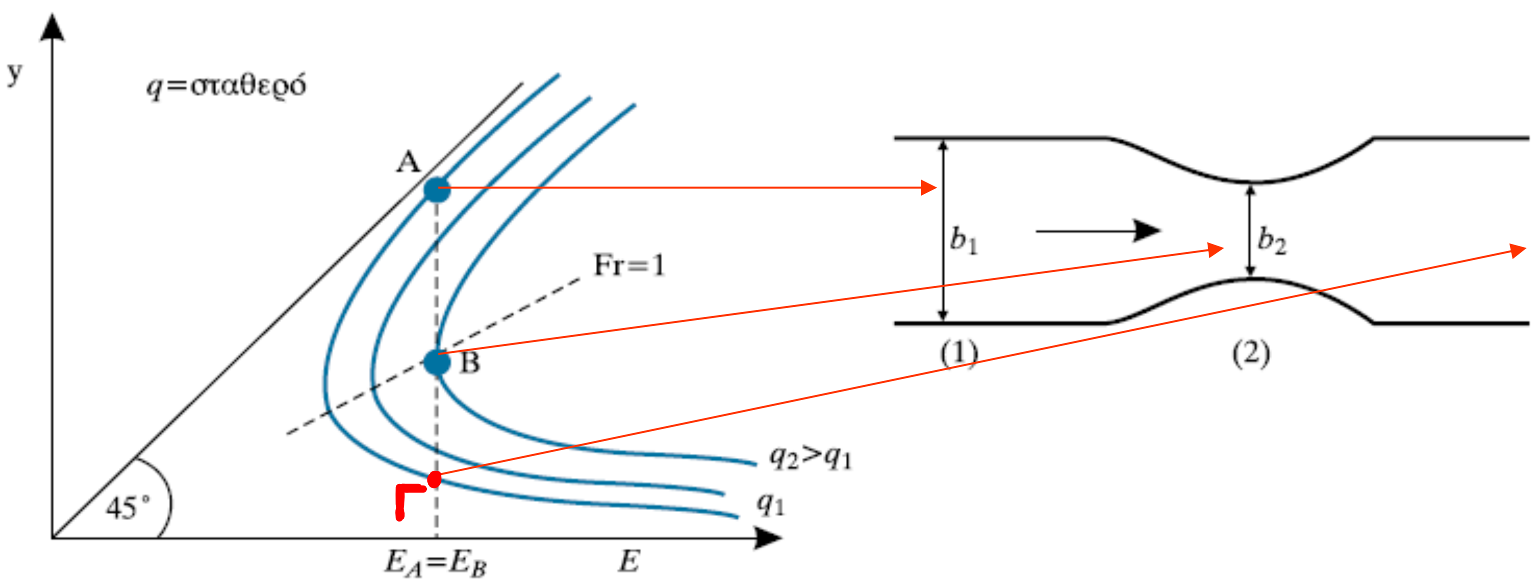
- **Επεξήγηση σχήματος**

Ροή στο (1) υποκρίσιμη → στο (2) κρίσιμη → μετά υπερκρίσιμη

Fr < 1 **Fr = 1** **Fr > 1**

σημείο Α **σημείο Β** **σημείο Γ** **ευθεία Α-Β-Γ**

- Ελάττωση του βάθους με αύξηση ταχύτητας (επειδή ***υ=q/h***) και αύξηση της παροχής (***q***) ανά μονάδα πλάτους (λόγω εξίσωσης συνέχειας)



<u>Παράδειγμα</u>

Κανάλι ορθογωνικής διατομής έχει βάθος νερού **2,5 m** και ειδική παροχή (παροχή ανά μονάδα πλάτους) **q = 10 m²/s**.

Μια γέφυρα εφάπτεται στις όχθες του καναλιού που απέχουν μεταξύ τους **12 m**.

Ποιό το πάχος των κολώνων στήριξης για να μην δημιουργούνται δίνες ;

Ενέργεια ανάντη της στένωσης

$$E = h + \frac{\upsilon^2}{2g} = h + \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{A}\right)^2 = h + \frac{1}{2g}\left(\frac{q \cdot b}{b \cdot h}\right)^2 \Rightarrow E = h + \frac{q^2}{2gh^2} = 3{,}3m$$

Αριθμός Froude ανάντι

$$Fr_1 = \frac{u}{\sqrt{gh}} = \frac{q/h}{\sqrt{gh}} = 0{,}8 \ldots (\upsilon\pi o\kappa\rho\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta)$$

Για να μην έχουμε δίνες θα πρέπει στη στένωση η ροή να είναι κρίσιμη
(δηλ. Fr=1, δηλ. min ενέργεια για συγκεκριμένη παροχή ανά μονάδα πλάτους (q)
Η ενέργεια παραμένει σταθερή ανάμεσα στα σημεία A & B (βλ. προηγ. σχήμα) και άρα:

$$E = E_{\min} = \frac{3}{2}h_c \Rightarrow h_c = \frac{2}{3}E \Rightarrow h_c = 2{,}2m$$

ελαττώθηκε από τα 2,5 m ανάντι
(να ελεγχεί αν ισχύει ότι ***Fr=1***, ΝΑΙ ισχύει)

$$\boxed{Fr_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)\right]^{1/2}}$$

Επίσης $h_c = \sqrt[3]{\frac{q_c^2}{g}} \Rightarrow q_c = \sqrt[3]{h_c^3 g} = \sqrt{2{,}2^3 \cdot 9{,}81} \Rightarrow q_c = 10{,}29\frac{m^2}{s}$

Αυξήθηκε από τα 10 m²/s ανάντι

<u>Παράδειγμα</u>

Κανάλι ορθογωνικής διατομής έχει βάθος νερού **2,5 m** και ειδική παροχή (παροχή ανά μονάδα πλάτους) **q = 10 m^2/s**.

Μια γέφυρα εφάπτεται στις όχθες του καναλιού που απέχουν μεταξύ τους **12 m**.

Ποιό το πάχος των κολώνων στήριξης για να μην δημιουργούνται δίνες ;

Από την ***εξίσωση συνέχειας*** μεταξύ των σημείων ανάντι της ροής και της στένωσης έχουμε:

$$A_1 \cdot \upsilon_1 = \mathrm{A}_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow \left(h_1 \cdot \pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma_1\right)\frac{q_1}{h_1} = \left(h_2 \cdot \pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma_2\right)\frac{q_2}{h_2} \Rightarrow \pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma_1 \cdot q_1 = \pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma_2 \cdot q_2 \Rightarrow$$

$$12m \times 10\frac{m^2}{s} = \pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma_2 \times 10{,}29\frac{m^2}{s} \Rightarrow \pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma_2 = 11{,}66m \Rightarrow \sigma\tau\acute{\varepsilon}\nu\omega\sigma\eta = 12 - 11{,}66 = 0{,}34m$$