ΑΣΚΗΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 8 Δεκεμβρίου 2020

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ΕΠΩΝΥΜΟ: |  | ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ: |  |
| ΟΝΟΜΑ: |  | ΛΗΓΟΝΤΑΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ: |  |

 **(Στο Αρχείο αυτό να συμπληρωθούν οι Πίνακες με τα αποτελέσματα και να επικοληθούν οι φωτογραφίες από τα χειρόγραφα της λύσης. Το Αρχείο να σωθεί με όνομα Α8\_Δυναμική\_Επώνυμο\_Όνομα και να ανεβεί στο e-class)**



Στις αναδευόμενες δεξαμενές σχήματος, υπό σταθερή παροχή qs, σε χρόνο 0 min, η συγκέντρωση co χρωστικής, στην είσοδο της πρώτης δεξαμενής μεταβάλλεται βηματικά κατά Χ mol/m3, ενώ στον ίδιο χρόνο και η γραμμομοριακή παροχή w καθαρής χρωστικής μεταβάλλεται επίσης βηματικά κατά Υ mol/min (η ογκομετρική παροχή καθαρής χρωστικής θεωρείται αμελητέα, με αποτέλεσμα η ογκομετρική παραοχή στην έξοδο κάθε δεξαμενής να είναι σταθερή και ίση με q m3/min). Να γίνει το διάγραμμα βαθμιδων και να βρεθεί η συγκέντρωση της χρωστικής στην έξοδο της 2ης δεξαμενής, στο χρόνο 0 (αρχική μόνιμη κατάσταση) και μετά από χρόνο t min.

**ΔΕΔΟΜΕΝΑ**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| AM | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |  |
| qs | 5 | 5 | 5 | 5 | 10 | 10 | 10 | 5 | 5 | 5 | m3/min |
| V1 | 5 | 10 | 10 | 20 | 50 | 20 | 20 | 20 | 40 | 40 | m3 |
| V2 | 25 | 30 | 20 | 10 | 10 | 10 | 40 | 40 | 20 | 20 | m3 |
| cos | 5 | 5 | 10 | 10 | 5 | 10 | 5 | 5 | 10 | 5 | mol/m3 |
| ws | 0 | 5 | 10 | 10 | 20 | 10 | 10 | 20 | 20 | 40 | mol/min |
| X | 5 | 5 | 10 | 10 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | mol/m3 |
| Y | 20 | 20 | 50 | 50 | 20 | 20 | 10 | 10 | 10 | 20 | mol/min |
| t | 3 | 4 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 4 | 3 | 2 | min |

**ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | AM | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|  | c1s | 5 | 5 | 10 | 10 | 5 | 10 | 5 | 5 | 10 | 5 |
|  | **c2s** | 5 | 6 | 12 | 12 | 7 | 11 | 6 | 9 | 14 | 13 |
| C1/Co | **numerator** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **s coefficient** | **1** | **2** | **2** | **4** | **5** | **2** | **2** | **4** | **8** | **8** |
| **constant** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| C2/C1 | **numerator** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **s coefficient** | **5** | **6** | **4** | **2** | **1** | **1** | **4** | **8** | **4** | **4** |
| **constant** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| C2/W | **numerator** | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,2 |
| **s coefficient** | **5** | **6** | **4** | **2** | **1** | **1** | **4** | **8** | **4** | **4** |
| **constant** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  | **co laplace** | 5 | 5 | 10 | 10 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
|  | **w laplace** | 20 | 20 | 50 | 50 | 20 | 20 | 10 | 10 | 10 | 20 |
| C2/C1 | **numerator** | 5 | 5 | 10 | 10 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| **s coefficient** | **5** | **6** | **4** | **2** | **1** | **1** | **4** | **8** | **4** | **4** |
| **constant** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| C2/W | **numerator** | 4 | 4 | 10 | 10 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 4 |
| **s coefficient** | **5** | **6** | **4** | **2** | **1** | **1** | **4** | **8** | **4** | **4** |
| **constant** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  | **Α** | 5 | 5 | 10 | 10 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| **Β** | 1,25 | 5 | 20 | -80 | -31,25 | -20 | 10 | 20 | -80 | -80 |
| **Γ** | -31,25 | -45 | -80 | 20 | 1,25 | 5 | -40 | -80 | 20 | 20 |
| **Δ** | 4 | 4 | 10 | 10 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 4 |
| **Ε** | -20 | -24 | -40 | -20 | -2 | -2 | -4 | -16 | -8 | -16 |
|  | **C2(t)** | 3,437 | 3,434 | 5,483 | 4,424 | 2,709 | 4,918 | 1,168 | 1,561 | 1,544 | 1,819 |
| **c2(t)** | 8,437 | 9,434 | 17,483 | 16,424 | 9,709 | 15,918 | 7,168 | 10,561 | 15,544 | 14,819 |

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

**AM 7**

Αρχική μόνιμη κατάσταση:

Ισοζύγιο χρωστικής 1ης Δεξαμενής: q\*cos – q\*c1s = 0 ⬄ c1s = cos = 5 mol/m3

Ισοζύγιο χρωστικής 2ης Δεξαμενής: q\*c1s + ws – q\*c2s = 0 ⬄ 5\*5 + 20 – 5\*c2 = 0 ⬄ c2 = 9 mol/m3

ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΧΡΩΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗ ΔΕΞΑΜΕΝΗ 1:

$q\*co\left(t\right)– q\*c1\left(t\right)= V1\frac{dc1\left(t\right)}{dt}\leftrightarrow co\left(t\right)– c1\left(t\right) = 4\frac{dc1\left(t\right)}{dt}$ mol/m3 (1)

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ: $cos – c1s = 4\frac{dc1s}{dt}=0$ mol/m3 (2)

ΑΦΑΙΡΩ (2) ΑΠΌ (1): $\left(co\left(t\right)-cos\right) – \left(c1\left(t\right)-c1s\right)= 4\frac{d(c1\left(t\right)-c1s)}{dt}$ mol/m3 (3)

ΕΙΣΑΓΩ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ: Co(t) = co(t) – cos (Co(t) = co(t) – 5) mol/m3

C1(t) = c1(t) – c1s (C1(t) = c1(t) – 5) mol/m3

ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΣΤΗΝ (3), ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ: $Co\left(t\right) – C1\left(t\right)= 4\frac{dC1(t)}{dt} $

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΖΩ ΚΑΤΑ LAPLACE: $Co\left(s\right) –C1\left(s\right)= 4s\*C1\left(s\right)$⬄ $Co\left(s\right)= C1\left(s\right)(4s+1)$⬄ $\frac{C1(s)}{Co(s)}= \frac{1}{4s+1}$ (4)

ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΧΡΩΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗ ΔΕΞ. 2:

$q\*c1\left(t\right)+w\left(t\right) – q\*c2\left(t\right)= V2\frac{dc2\left(t\right)}{dt}\leftrightarrow c1\left(t\right)+ \frac{1}{5}w(t) – c2\left(t\right) = 8\frac{dc2\left(t\right)}{dt}$ mol/m3 (5)

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ: $c1s+ \frac{1}{5}ws – c2s = 8\frac{dc2s}{dt}=0$ mol/m3 (6)

ΑΦΑΙΡΩ ΤΗ (6) ΑΠΌ ΤΗΝ (5): $\left(c1\left(t\right)-c1s\right)+ \frac{1}{5}\left(w\left(t\right)-ws\right)- \left(c2\left(t\right)-c2s\right)= 8\frac{d(c2\left(t\right)-c2s)}{dt}$ mol/m3 (7)

ΕΙΣΑΓΩ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ: W(t) = W(t) – ws (W(t) = w(t) – 20) mol/min

C2(t) = c2(t) – c2s (C2(t) = c2(t) – 9) mol/m3

ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΣΤΗΝ (7), ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ: $C1\left(t\right)+\frac{1}{5}W\left(t\right)-C2(t) = 8\frac{dC2(t)}{dt} $

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΖΩ ΚΑΤΑ LAPLACE:

$C1\left(s\right)+\frac{1}{5}W\left(s\right)-C2\left(s\right)= 8sC2\left(s\right)\leftrightarrow C2\left(s\right)=\frac{1}{8s+1}C1\left(s\right)+ \frac{0,2}{8s+1}W(s)$ (8)

ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩ ΤΗΝ C1(s) ΑΠΟ ΤΗΝ(4) ΣΤΗΝ (8): $C2\left(s\right)=\frac{1}{(4s+1)(8s+1)}Co\left(s\right)+ \frac{0,2}{8s+1}W(s)$ (9)

ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ Co: co(t) = 5 + cos ⬄ co(t) – cos = 5 ⬄ Co(t) = 5 ⬄ $Co\left(s\right)=\frac{5}{s}$

ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ W: w(t) = 10 + ws ⬄ w(t) – ws = 10 ⬄ W(t) = 10 ⬄ $W\left(s\right)=\frac{10}{s}$

ΑΠΟ ΤΗΝ (9): $C2\left(s\right)=\frac{5}{s(4s+1)(8s+1)}+ \frac{2}{s(8s+1)}$ (10)

HEAVISIDE ΤΟΥ ΟΡΟΥ: $\frac{5}{s(4s+1)(8s+1)}= \frac{Α}{s}+ \frac{Β}{(4s+1)}+ \frac{Γ}{(8s+1)}$

$Α= \frac{5}{(4\*0+1)(8\*0+1)}= \frac{5}{(+1)(+1)}= 5 $

$Β= \frac{5}{(-0,25)(8\*(-0,25)+1)}=\frac{5}{(-0,25)(-1)}=20$

$$Γ= \frac{5}{(-0,125)(4\*(-0,125)+1)}= \frac{5}{(-0,125)(+0,5)}= -80$$

HEAVISIDE ΤΟΥ ΟΡΟΥ: $\frac{2}{s(8s+1)}= \frac{Δ}{s}+ \frac{Ε}{(8s+1)}$

$Δ= \frac{2}{(8\*0+1)}= \frac{2}{(+1)}= 2 $

$$Ε= \frac{2}{(-0,125)}= -16$$

ΑΠΟ ΤΗΝ (10): $C2\left(s\right)=\frac{5}{s}+ \frac{20}{(4s+1)}- \frac{80}{\left(8s+1\right)}+ \frac{2}{s}- \frac{16}{\left(8s+1\right)}= \frac{7}{s}+ \frac{20}{\left(4s+1\right)}- \frac{96}{\left(8s+1\right)}= \frac{7}{s}+ \frac{5}{\left(s+0,25\right)}- \frac{12}{\left(s+0,125\right)}$ ⬄

⬄ C2(t) = 7 + 5\*exp(-0,25\*t) – 12\*exp(-0,125\*t) ⬄ C2(4) = 7 + 5\*exp(-0,25\*4) – 12\*exp(-0,125\*4) = 1,561 mol/m3

c2(4) = C2(4) + c2s = 1,561+9 = 19,561 mol/m3

w

0,2

+

+

C1

C2

$$\frac{1}{8s+1}$$

Co

$$\frac{1}{4s+1}$$

**AM 6**

Αρχική μόνιμη κατάσταση:

Ισοζύγιο χρωστικής 1ης Δεξαμενής: q\*cos – q\*c1s = 0 ⬄ c1s = cos = 5 mol/m3

Ισοζύγιο χρωστικής 2ης Δεξαμενής: q\*c1s + ws – q\*c2s = 0 ⬄ 10\*5 + 10 – 10\*c2 = 0 ⬄ c2 = 6 mol/m3

ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΧΡΩΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗ ΔΕΞΑΜΕΝΗ 1:

$q\*co\left(t\right)– q\*c1\left(t\right)= V1\frac{dc1\left(t\right)}{dt}\leftrightarrow co\left(t\right)– c1\left(t\right) = 2\frac{dc1\left(t\right)}{dt}$ mol/m3 (1)

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ: $cos – c1s = 2\frac{dc1s}{dt}=0$ mol/m3 (2)

ΑΦΑΙΡΩ (2) ΑΠΌ (1): $\left(co\left(t\right)-cos\right) – \left(c1\left(t\right)-c1s\right)= 2\frac{d(c1\left(t\right)-c1s)}{dt}$ mol/m3 (3)

ΕΙΣΑΓΩ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ: Co(t) = co(t) – cos (Co(t) = co(t) – 5) mol/m3

C1(t) = c1(t) – c1s (C1(t) = c1(t) – 5) mol/m3

ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΣΤΗΝ (3), ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ: $Co\left(t\right) – C1\left(t\right)= 2\frac{dC1(t)}{dt} $

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΖΩ ΚΑΤΑ LAPLACE: $Co\left(s\right) –C1\left(s\right)= 2s\*C1\left(s\right)$⬄ $Co\left(s\right)= C1\left(s\right)(2s+1)$⬄ $\frac{C1(s)}{Co(s)}= \frac{1}{2s+1}$ (4)

ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΧΡΩΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗ ΔΕΞ. 2:

$q\*c1\left(t\right)+w\left(t\right) – q\*c2\left(t\right)= V2\frac{dc2\left(t\right)}{dt}\leftrightarrow c1\left(t\right)+ \frac{1}{10}w(t) – c2\left(t\right) = 4\frac{dc2\left(t\right)}{dt}$ mol/m3 (5)

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ: $c1s+ \frac{1}{10}ws – c2s = 4\frac{dc2s}{dt}=0$ mol/m3 (6)

ΑΦΑΙΡΩ ΤΗ (6) ΑΠΌ ΤΗΝ (5): $\left(c1\left(t\right)-c1s\right)+ \frac{1}{10}\left(w\left(t\right)-ws\right)- \left(c2\left(t\right)-c2s\right)= 4\frac{d(c2\left(t\right)-c2s)}{dt}$ mol/m3 (7)

ΕΙΣΑΓΩ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ: W(t) = W(t) – ws (W(t) = w(t) – 10) mol/min

C2(t) = c2(t) – c2s (C2(t) = c2(t) – 6) mol/m3

ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΣΤΗΝ (7), ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ: $C1\left(t\right)+\frac{1}{10}W\left(t\right)-C2(t) = 4\frac{dC2(t)}{dt} $

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΖΩ ΚΑΤΑ LAPLACE:

$C1\left(s\right)+\frac{1}{10}W\left(s\right)-C2\left(s\right)= 4sC2\left(s\right)\leftrightarrow C2\left(s\right)=\frac{1}{4s+1}C1\left(s\right)+ \frac{0,1}{4s+1}W(s)$ (8)

ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩ ΤΗΝ C1(s) ΑΠΟ ΤΗΝ(4) ΣΤΗΝ (8): $C2\left(s\right)=\frac{1}{(2s+1)(4s+1)}Co\left(s\right)+ \frac{0,1}{4s+1}W(s)$ (9)

ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ Co: co(t) = 10 + cos ⬄ co(t) – cos = 5 ⬄ Co(t) = 5 ⬄ $Co\left(s\right)=\frac{5}{s}$

ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ W: w(t) = 10 + ws ⬄ w(t) – ws = 10 ⬄ W(t) = 10 ⬄ $W\left(s\right)=\frac{10}{s}$

ΑΠΟ ΤΗΝ (9): $C2\left(s\right)=\frac{5}{s(2s+1)(4s+1)}+ \frac{1}{s(4s+1)}$ (10)

HEAVISIDE ΤΟΥ ΟΡΟΥ: $\frac{5}{s(2s+1)(4s+1)}= \frac{Α}{s}+ \frac{Β}{(2s+1)}+ \frac{Γ}{(4s+1)}$

$Α= \frac{5}{(2\*0+1)(4\*0+1)}= \frac{5}{(+1)(+1)}= 5 $

$Β= \frac{5}{(-0,5)(4\*(-0,5)+1)}=\frac{5}{(-0,5)(-1)}=10$

$$Γ= \frac{5}{(-0,25)(2\*(-0,25)+1)}= \frac{5}{(-0,25)(+0,5)}= -40$$

HEAVISIDE ΤΟΥ ΟΡΟΥ: $\frac{1}{s(4s+1)}= \frac{Δ}{s}+ \frac{Ε}{(4s+1)}$

$Δ= \frac{1}{(4\*0+1)}= \frac{1}{(+1)}= 1 $

$$Ε= \frac{1}{(-0,25)}= -4$$

ΑΠΟ ΤΗΝ (10): $C2\left(s\right)=\frac{5}{s}+ \frac{10}{(2s+1)}- \frac{40}{\left(4s+1\right)}+ \frac{1}{s}- \frac{4}{\left(4s+1\right)}= \frac{6}{s}+ \frac{10}{\left(2s+1\right)}- \frac{44}{\left(4s+1\right)}= \frac{6}{s}+ \frac{5}{\left(s+0,5\right)}- \frac{11}{\left(s+0,25\right)}$ ⬄

⬄ C2(t) = 6 + 5\*exp(-0,5\*t) – 11\*exp(-0,25\*t) ⬄ C2(2) = 6 + 5\*exp(-0,5\*2) – 11\*exp(-0,25\*2) = 1,168 mol/m3

c2(t) = C2(t) + c2s = 1,168+6 = 7,768 mol/m3

**ΛΥΣΗ**

**Επικόλληση φωτογραφιών χειρόγραφης λύσης**

**(αν δεν επικολληθούν τα χειρόγραφα λύσης, η άσκηση δεν θα βαθμολογηθεί)**