**Α ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΔΟΧΕΙΟ ΜΕ ΠΑΡΟΧΗ ΕΞΟΔΟΥ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗΣ**

**(δηλαδή η παροχή εξόδου qo (m3/min) είναι αντιστρόφως ανάλογη της αντίστασης R (min/m2) στη ροή εξόδου – δηλαδή ισχύει: qo(t) = h(t)/R)**

**1. Προσδιορισμός της συνάρτηση μεταφοράς[[1]](#footnote-1) μεταξύ της στάθμης (μεταβλητή εξόδου) και της ογκομετρικής παροχής εισόδου (μεταβλητή εισόδου) και: G(s) = H(s)/Q(s)**

**(δηλαδή, να προσδιοριστεί ποια είναι η συνάρτηση που συνδέει τις μεταβολές στη στάθμη του δοχείου με τις μεταβολές της παροχής στην είσοδο του, όταν η αντίσταση (R) στην παροχή της εξόδου του (qo) είναι σταθερή)**

**ΒΗΜΑ 1.** Αρχικοί υπολογισμοί (αν χρειάζονται)

**ΒΗΜΑ 2. Λύνουμε το κατάλληλο ισοζύγιο για να βρούμε τη διαφορική, που περιγράφει τη μετάβαση από την αρχική, στην τελική μόνιμη κατάσταση (πιο σωστά, τη διαφορική που περιγράφει την απόκριση της διεργασίας σε μία διαταραχή).**

ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΜΑΖΑΣ: **Μαζική παροχή μαζική παροχή συσσώρευση**

**στην είσοδο στην έξοδο μάζας**

**ρ\*q(t)**  – **ρ\*qo(t) = ρ\*A\*dh(t)/dt** **[kg/min]** ⬄

⬄ q(t) – **qo(t)** = A\*dh(t)/dt ⬄ q(t) – **h(t)/R** = Α\*dh(t)/dt **[m3/min] ⬄**

**⬄** R\*q(t) – h(t) = **R\*A**\*dh(t)/dt ⬄ R\*q(t) – h(t) = **τ**\*dh(t)/dt [1]

Όπου: A είναι η διατομή (m2) του δοχείου και το R\*A [(min/m2)\*(m2) = min] έχει μονάδες χρόνου και είναι **η χρονική σταθερά τ του συστήματος**.

(η σταθερή πυκνότητα απαλείφεται και το ισοζύγιο μάζας γίνεται ισοζύγιο όγκων και ογκομετρικών παροχών)

**ΒΗΜΑ 3. Εισαγωγή Μεταβλητών Απόκλισης**

Γράφουμε το ισοζύγιο του Βήματος 2 (την Εξίσωση 1), στη μόνιμη κατάσταση:

R\*qs – hs **=** τ\*dhs/dt = 0 (2)

(hs είναι η στάθμη του δοχείου στην αρχική μόνιμη κατάσταση και qs είναι η παροχή εισόδου στην αρχική μόνιμη κατάσταση – το hs δεν μεταβάλλεται με το χρόνο (αφού αναφερεται στη μόνιμη κατάσταση), οπότε η μεταβολή του με το χρόνο είναι μηδέν: dhs/dt = 0)

Αφαιρούμε τη (2) από την (1): R\*(q(t) – qs) – (h(t) – hs) = τ\*d(h(t)-hs)/dt (3)

Ορίζω μεταβλητές απόκλισης: Q(t) = q(t) – qs **m3/min**

 H(t) = h(t) – hs  **m**

Οπότε η (3) γίνεται: R\*Q(t) – H(t) = τ\*dH(t)/dt

**ΒΗΜΑ 4. Μετασχηματισμός Laplace της διαφορικής που περιγράφει την απόκριση στη διαταραχή και περιέχει όχι τις αρχικές μεταβλητές αλλά τις μεταβλητές απόκλισης:**

R\*Q(s) – H(s) = τ\*s\*H(s) ⬄ H(s)\*(τ\*s + 1) = R\*Q(s) ⬄

**H(s)/Q(s) = R / (τ\*s + 1) [4]**

**Η Εξίσωση 4 είναι η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς της στάθμης ως προς την ογκομετρική παροχή εισόδου: G(s) = H(s)/Q(s).**

**2. Προσδιορισμός της συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ της ογκομετρικής παροχής εξόδου (μεταβλητή εξόδου) και της ογκομετρικής παροχής εισόδου (μεταβλητή εισόδου) και: G(s) = Qo(s)/Q(s)**

**(δηλαδή, να προσδιοριστεί ποια είναι η συνάρτηση που συνδέει τις μεταβολές στην παροχή εξόδου του δοχείου με τις μεταβολές της παροχής στην είσοδο του, όταν η αντίσταση (R) στην παροχή της εξόδου (qo) είναι σταθερή).**

**Η παροχή εξόδου qo συνδέεται με τη στάθμη, μέσω της Εξίσωσης: qo(t) = h(t)/R**

**Θεωρούμε την Εξίσωση αυτή στην αρχική μόνιμη κατάσταση: qos = hs/R**

(όπου qos και hs, η παροχή εξόδου και η στάθμη, στην

αρχική μόνιμη κατάσταση)

**Αφαιρούμε τις δύο εξισώσεις μεταξύ τους και εισάγουμε τις μεταβλητές απόκλισης:**

**qo(t) – qos = (h(t) – hs)/R ⬄ Qo(t) = H(t)/R [5]**

**όπου: Qo(t) = qo(t) – qos και**

 **H(t) = h(t) - hs**

**Μετασχηματίζουμε την Εξίσωση 5 κατά Laplace:**

**Qo(s) = H(s)/R ⬄ H(s) = R\*Qo(s) [6]**

**Αντικαθιστούμε την Εξίσωση 6 στην Εξίσωση 4:**

**H(s)/Q(s) = R / (τ\*s + 1) [4]**

**H(s) = R\*Qo(s) [6]**

**⬄ R\*Qo(s)/Q(s) = R / (τ\*s + 1) ⬄ Qo(s)/Q(s) = 1 / (τ\*s + 1) [7]**

**Η Εξίσωση 7 είναι η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς της ογκομετρικής παροχής εξόδου ως προς την ογκομετρική παροχή εισόδου: G(s) = Qo(s)/Q(s).**

**B ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΔΟΧΕΙΟ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΗ ΠΑΡΟΧΗ ΕΞΟΔΟΥ**

**1. Προσδιορισμός της συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ της στάθμης (μεταβλητή εξόδου) και της ογκομετρικής παροχής εισόδου (μεταβλητή εισόδου): G(s) = H(s)/Q(s)**

**(δηλαδή, να προσδιοριστεί ποια είναι η συνάρτηση που συνδέει τις μεταβολές στη στάθμη του δοχείου με τις μεταβολές της παροχής στην είσοδο του, όταν η παροχή της εξόδου του (qo) είναι σταθερή)**



**ΒΗΜΑ 1.** Αρχικοί υπολογισμοί (αν χρειάζονται)

**ΒΗΜΑ 2. Λύνουμε το κατάλληλο ισοζύγιο για να βρούμε τη διαφορική, που περιγράφει τη μετάβαση από την αρχική, στην τελική μόνιμη κατάσταση (τη διαφορική που περιγράφει την απόκριση της διεργασίας σε μία διαταραχή).**

ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΜΑΖΑΣ: **Μαζική παροχή μαζική παροχή συσσώρευση**

**στην είσοδο στην έξοδο μάζας**

**ρ\*q(t)**  – **ρ\*qo = ρ\*A\*dh(t)/dt** **[kg/min]** ⬄

⬄ q(t) – qo = A\*dh(t)/dt **[m3/min]**  [1]

Όπου: A είναι η διατομή (m2) του δοχείου (αυτή είναι και η μόνη περίπτωση που ο παράγοντας Α του διφορικού δεν έχει διαστάσεις χρόνου).

**ΒΗΜΑ 3. Εισαγωγή Μεταβλητών Απόκλισης**

Γράφουμε το ισοζύγιο του Βήματος 2 (την Εξίσωση 1), στη μόνιμη κατάσταση:

qs – qos **=** τ\*dhs/dt = 0 (2)

(qos είναι η παροχή εξόδου στην αρχική μόνιμη κατάσταση, που παραμένει σταθερή και μετά την όποια διαταραχή της παροχής εισόδου: qos = qo)

Αφαιρούμε τη (2) από την (1): (q(t) – qs) – (qo – qos) = A\*d(h(t)-hs)/dt (3)

Ορίζω μεταβλητές απόκλισης: Q(t) = q(t) – qs **m3/min**

 H(t) = h(t) – hs  **m**

Οπότε η (3) γίνεται: Q(t) = A\*dH(t)/dt

**ΒΗΜΑ 4. Μετασχηματισμός Laplace της διαφορικής που περιγράφει την απόκριση στη διαταραχή και περιέχει όχι τις αρχικές μεταβλητές αλλά τις μεταβλητές απόκλισης:**

Q(s) = A\*s\*H(s) ⬄ **H(s)/Q(s) = 1 / A\*s [4]**

**Η Εξίσωση 4 είναι η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς της στάθμης ως προς την ογκομετρική παροχή εισόδου: G(s) = H(s)/Q(s).**

**Γ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΔΟΧΕΙΟ ΑΝΑΜΙΞΗΣ**

Η ογκομετρική παροχή εισόδου είναι ίση με την ογκομετρική παροχή εξόδου (δοχείο υπερχείλισης) και οι δύο παροχές παραμένουν σταθερές μετά τη διαταραχή σε χρόνο 0.

Η διαταραχή του συστήματος αφορά μεταβολή της συγκέντρωσης μίας διαλυτής ουσίας, στην είσοδο του δοχείου.

Το πρόβλημα έγκειται στον προσδιορισμό της απόκρισης της συγκέντρωσης y(t) της ουσίας στην έξοδο του δοχείου, όταν μεταβληθεί, σε χρόνο 0, η συγκέντρωση x(t) της ουσίας, στην είσοδο του δοχείου.

ΔΗΛΑΔΗ, το πρόβλημα έγκειται στον **προσδιορισμό της συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ της συγκέντρωσης εξόδου (μεταβλητή εξόδου) και της συγκέντρωση εισόδου (μεταβλητή εισόδου): G(s) = Υ(s)/Χ(s)**

**ΒΗΜΑ 1.** Αρχικοί υπολογισμοί (αν χρειάζονται)

**ΒΗΜΑ 2. Λύνουμε το κατάλληλο ισοζύγιο για να βρούμε τη διαφορική, που περιγράφει τη μετάβαση από την αρχική, στην τελική μόνιμη κατάσταση (τη διαφορική που περιγράφει την απόκριση της διεργασίας σε μία διαταραχή).**

ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΣΥΣΤΑΤΙΚΟΥ:

**Μαζική παροχή μαζική παροχή συσσώρευση**

**συστατικού στην είσοδο συστατικού στην έξοδο συστατικού**

**q\*x(t)**  – **q\*y(t) = V\*dy(t)/dt** **[kg/min]** ⬄

⬄ x(t) – y(t) = (V/q)\*dy(t)/dt ⬄ x(t) – y(t) = **τ**\*dy(t)/dt **[kg/m3]** [1]

To V/q [(m3)\*(m3/min) = min] έχει μονάδες χρόνου και είναι **η χρονική σταθερά τ του συστήματος**.

**ΒΗΜΑ 3. Εισαγωγή Μεταβλητών Απόκλισης**

Γράφουμε το ισοζύγιο του Βήματος 2 (την Εξίσωση 1), στη μόνιμη κατάσταση:

xs – ys **=** τ\*dys/dt = 0 (2)

Αφαιρούμε τη (2) από την (1): (x(t) – xs) – (y(t) – ys) = τ\*d(y(t)-ys)/dt (3)

Ορίζω μεταβλητές απόκλισης: X(t) = x(t) – xs **kg/m3**

 Y(t) = y(t) – ys  **kg/m3**

Οπότε η (3) γίνεται: X(t) – Y(t) = τ\*dY(t)/dt

**ΒΗΜΑ 4. Μετασχηματισμός Laplace της διαφορικής που περιγράφει την απόκριση στη διαταραχή και περιέχει όχι τις αρχικές μεταβλητές αλλά τις μεταβλητές απόκλισης:**

X(s) – Y(s) = τ\*s\*Y(s) ⬄ Y(s)\*(τ\*s + 1) = X(s) ⬄

**Y(s)/X(s) = 1 / (τ\*s + 1) [4]**

**Η Εξίσωση 4 είναι η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς της στάθμης ως προς την ογκομετρική παροχή εισόδου: G(s) = H(s)/Q(s).**

**Δ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΔΟΧΕΙΟ ΘΕΡΜΑΝΣΗΣ**

Η μαζική παροχή εισόδου είναι ίση με την μαζική παροχή εξόδου και οι δύο παροχές παραμένουν σταθερές μετά τη διαταραχή σε χρόνο 0.

Η διαταραχή του συστήματος αφορά μεταβολή της θερμοκρασίας **θ** (oC) στην είσοδο του δοχείου ή/και στη μεταβολή της παρεχόμενης θερμότητας **q** (Watt)

Το πρόβλημα έγκειται στον προσδιορισμό της απόκρισης της θερμοκρασίας θο(t) στην έξοδο του δοχείου, όταν μεταβληθεί, σε χρόνο 0, η θερμοκρασία θ(t), στην είσοδο του δοχείου ή/και η παροχή θερμότητας q(t).

ΔΗΛΑΔΗ, το πρόβλημα έγκειται στον **προσδιορισμό δύο συναρτήσεων μεταφοράς:**

1. **της συνάρτησης μεταφοράς μεταξύ της θερμοκρασίας εξόδου (μεταβλητή εξόδου) και της θερμοκρασίας εισόδου (μεταβλητή εισόδου): G(s) = Το(s)/Τ(s)**
2. **της συνάρτησης μεταφοράς μεταξύ της θερμοκρασίας εξόδου (μεταβλητή εξόδου) και της παροχής θερμότητας (μεταβλητή εισόδου): G(s) = Το(s)/Q(s)**

**ΒΗΜΑ 1.** Αρχικοί υπολογισμοί (αν χρειάζονται)

**ΒΗΜΑ 2. Λύνουμε το κατάλληλο ισοζύγιο για να βρούμε τη διαφορική, που περιγράφει τη μετάβαση από την αρχική, στην τελική μόνιμη κατάσταση (τη διαφορική που περιγράφει την απόκριση της διεργασίας σε μία διαταραχή).**

**ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ**

(q είναι η παροχή θερμότητας και w είναι η **μαζική παροχή,** στην είσοδο (μάζα/χρόνο))

 [Watt] (1)

**ΒΗΜΑ 3. Εισαγωγή Μεταβλητών Απόκλισης**

Ισοζύγιο ενέργειας στη μόνιμη κατάσταση:

 (2)

Αφαιρώ την (2) από την (1):

 (3)

Εισάγω τις μεταβλητές απόκλισης: Τ = θ – θs, To = θo – θos, Q = q – qs

και η (3) γίνεται:

 ⬄ ⬄ (4)

(Στην Εξίσωση 4 το έχει μονάδες ώστε ο όρος να έχει μονάδες θερμοκρασίας. Ο όρος έχει μονάδες ώστε ο όρος να έχει επίσης μονάδες θερμοκρασίας.)

**ΒΗΜΑ 4. Μετασχηματισμός Laplace της διαφορικής που περιγράφει την απόκριση στη διαταραχή και περιέχει όχι τις αρχικές μεταβλητές αλλά τις μεταβλητές απόκλισης:**Μετασχηματίζοντας την (4) κατά Laplace:

⬄

⬄

Η τελευταία Εξίσωση, περιέχει δύο συναρτήσεις μεταφοράς, σε γραμμικό συνδυασμό μεταξύ τους. Τη συνάρτηση μεταφοράς:

που συνδέει τη Μεταβλητή Εξόδου Τo με την Κινούσα Μεταβλητή Εισόδου Τ, και τη συνάρτηση μεταφοράς:

που συνδέει τη Μεταβλητή Εξόδου Τo με την Κινούσα Μεταβλητή Εισόδου Q. Στη δεύτερη συνάρτηση μεταφορά, ο αριθμητής είναι η ενίσχυση της Κινούσας Μεταβλητής Εισόδου Q, και μετατρέπει και τις μονάδες της Q σε μονάδες Τ.

1. **Να θυμόμαστε ότι οι συναρτήσεις μεταφοράς είναι συναρτήσεις στο πεδίο της μεταβλητής s** (δηλαδή είναι οι μετασχηματισμένες κατά Laplace συναρτήσεις στο πεδίο των χρόνων t) και επίσης **οι συναρτήσεις μεταφοράς περιλαμβάνουν μεταβλητές απόκλισης**. [↑](#footnote-ref-1)