**Θεωρία: Ισοζύγιο ενέργειας (σελ. 14)**



**Ισοζύγιο ενέργειας στο Ταφ ανάμιξης**

Θεωρούμε αμελητέο όγκο στο Ταφ, οπότε και αμελητέα συσσώρευση:

(ενέργεια που εισέρχεται) – (ενέργεια που εξέρχεται) = (ενέργεια που συσσωρεύεται = 0) ⬄

⬄ **ρ\*v1\*Cp\*(T1 – Tref) + ρ\*v2\*Cp\*(T2 – Tref) – ρ\*v3\*Cp\*(T3 – Tref) = 0**

Μονάδες: ((kg/lt)\*(lt/min)\*(kcal/kgoC)\*(oC) + (kg/lt)\*(lt/min)\*(kcal/kgoC)\*(oC) - (kg/lt)\*(lt/min)\*(kcal/kgoC)\*(oC) = 0 ⬄ (κάθε όρος έχει μονάδες kcal/min)

διαιρώ κάθε όρο με ρ\*Cp (v3 = v1 + v2):

v1\*T1 – ~~v1\*Tref~~ + v2\*T2 – ~~v2\*Tref~~ = v3\*T3 – ~~v3\*Tref~~ ⬄ v1\*T1 + v2\*T2 = v3\*T3

Από το ισοζύγιο ενέργειας στο Ταφ, υπολογίζω την Τ3 πριν και με μετά το λάθος του χειριστή:

Πριν το λάθος: Τ3 = (v1\*T1 + v2\*T2)/v3 = (10\*25 + 20\*55)/30 = 45 oC

Μετά το λάθος: Τ3 = (v1\*T1 + v2\*T2)/v3 = (20\*25 + 10\*55)/30 = 35 oC

**Ισοζύγιο ενέργειας στο δοχείο θέρμανσης**

(ενέργεια που εισέρχεται) – (ενέργεια που εξέρχεται) = (ενέργεια που συσσωρεύεται) ⬄

⬄ ρ\*v3\*Cp\*(T3 – Tref) + Q – ρ\*v3\*Cp\*(T – Tref) = ρ\*V\*Cp\*d(T – Tref)/dt = ρ\*V\*Cp\*dT/dt - ~~ρ\*V\*Cp\*dTref/dt~~ (1)

(το Tref είναι αμετάβλητο με το χρόνο, οπότε dTref/dt = 0)

(η παροχή στην έξοδο του δοχείου είναι ίση με την παροχή στην είσοδο του δοχείου, δηλαδή ίση με v3)

Από το ισοζύγιο ενέργειας στη μόνιμη κατάσταση πριν το λάθος του χειριστή, υπολογίζουμε το Q (στο ισοζύγιο για τη μόνιμη κατάσταση, ο όρος συσσώρευσης είναι 0 – αυτό ισχύει πάντα και για όλα τα ισοζύγια στη μόνιμη κατάσταση):

ρ\*v3\*Cp\*(T3 – Tref) + Q – ρ\*v3\*Cp\*(T – Tref) = 0 ⬄ Q = ρ\*v3\*Cp\*(T – T3) + ~~ρ\*v3\*Cp\*(Tref – Tref)~~ ⬄

⬄ Q = (1000 g/L)\*(30 L/min)\*(1 cal/g\*deg)\*(80 – 45)oC = 1.050.000 cal/min

Η ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΟΥ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗ ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΧΙΚΗ ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΤΕΛΙΚΗ, ΕΞΑΓΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ (Εξίσωση 1):

ρ\*v3\*Cp\*(T3 – Tref) + Q – ρ\*v3\*Cp\*(T – Tref) = ρ\*V\*Cp\*dT/dt ⬄

⬄ ρ\*v3\*Cp\*T3 – ~~ρ\*v3\*Cp\*Tref~~ + Q – ρ\*v3\*Cp\*T + ~~ρ\*v3\*Cp\*Tref~~ = ρ\*V\*Cp\*dT/dt ⬄

⬄ ρ\*v3\*Cp\*T3 + Q – ρ\*v3\*Cp\*T = ρ\*V\*Cp\*dT/dt ⬄

⬄Τ3 + Q/(ρ\*v3\*Cp) – T = (V/v3)\*dT/dt (2)

**(V L)/(v3 L/min) = (τ, min), o υδραυλικός χρόνος παραμονής στο δοχείο, που επηρεάζει το χρόνο απόκρισης του δοχείου σε μία μεταβολή στην είσοδο του**

Το 1/(ρ\*v3\*Cp) είναι ο όρος που μετατρέπει τις μονάδες (ο μετατροπέας μονάδων) του Q από μονάδες ενέργειας σε μονάδες θερμοκρασίας (κάθε όρος της εξίσωσης 2 έχει μονάδες θερμοκρασίας)

Η ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ, ΣΤΗ ΣΕΛ. 17 ΤΗΣ ΑΓΓΛΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ.

**Παράδειγμα 2.1 (σελ. 18)** Εκτός ύλης

**Παράδειγμα 2.2 (σελ. 18)**

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης x(t), η οποία ικανοποιεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^{3}x(t)}{dt^{3}}+4\frac{d^{2}x(t)}{dt^{2}}+5\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)=2$$

και τους περιορισμούς (τις οριακές συνθήκες): $x\left(0\right)=\frac{dx(0)}{dt}=\frac{d^{2}x(0)}{dt^{2}}=0$

(δηλαδή, οι τιμές της συνάρτησης, της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης και της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης για t = 0, είναι 0)

Το ανάπτυγμα (ο μετασχηματισμός) Laplace του όρου $\frac{d^{3}x}{dt^{3}}$ είναι (σύμφωνα με τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace παραγώγων):

**L** $\left\{\frac{d^{3}x(t)}{dt^{3}}\right\}$ = s3\*x(s) – s2\*x(0) – s1\*x’(0) – s0\*x’’(0) = **s3\*x(s)**

αφού:

 x(0) = 0

x’(0) $=\frac{dx(0)}{dt}$ = 0 (το x’(t) και το $=\frac{dx(t)}{dt}$ είναι δύο διαφορετικοί συμβολισμοί για την πρώτη παράγωγο, και η τιμή της πρώτης παραγώγου για t= 0 δίνεται ίση με μηδέν)

x’’(0) $=\frac{dx^{2}(0)}{dt^{2}}$ = 0 (το x’’(t) και το $=\frac{dx^{2}(0)}{dt^{2}}$ είναι δύο διαφορετικοί συμβολισμοί για την δεύτερη παράγωγο, και η τιμή της δεύτερης παραγώγου για t= 0 δίνεται ίση με μηδέν)

Το ανάπτυγμα (ο μετασχηματισμός) Laplace του όρου $\frac{d^{2}x}{dt^{2}}$ είναι:

**L** $\left\{\frac{d^{2}x(t)}{dt^{2}}\right\}$ = s2\*x(s) – s1\*x(0) – s0\*x’(0) = **s2\*x(s)**

αφού x(0) = 0 και x’(0) = 0.

Το ανάπτυγμα (ο μετασχηματισμός) Laplace του όρου $\frac{dx}{dt}$ είναι:

**L** $\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}$ = s1\*x(s) – s0\*x(0) = **s\*x(s)**

αφού x(0) = 0.

Το ανάπτυγμα (ο μετασχηματισμός) Laplace του όρου **x(t)** είναι **x(s).**

Το ανάπτυγμα (ο μετασχηματισμός) Laplace του όρου **2** είναι **2/s** (σύμφωνα με τον Πίνακα 2.1).

Η αρχική διαφορική είναι γραμμικός συνδυασμός των επιμέρους όρων της, οπότε ο μετασχηματισμός Laplace της αρχικής διαφορικής θα είναι ο ίδιος γραμμικός συνδυασμός των μετασχηματισμών Laplace του κάθε όρου, οπότε:

**s3\*x(s)** + 4\***s2\*x(s)** + 5\***s\*x(s)** + 2\***x(s)** = **2/s** ⬄ x(s)\*(s3 + 4s2 + 5s + 2) = 2/s ⬄ **x(s) =** $\frac{2}{s(s^{3} + 4s^{2} + 5s +2)}$

**Παράδειγμα 2.3 (σελ. 27)**

Να βρεθούν οι μετασχηματισμοί Laplace των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τα δυναμικά ισοζύγια μάζας και ενέργειας του δοχείου ανάμιξης της θεωρίας.

**Ισοζύγιο μάζας:** $τ\frac{dCa(t)}{dt}+Ca(t)=Ca3$

Όπου: Ca3 = 2 g/L είναι η συγκέντρωση στην παροχή εισόδου του δοχείου ανάμιξης, μετά τη

διαταραχή (μετά το λάθος του χειριστή). Γενικά, το παραπάνω δυναμικό ισοζύγιο (η παραπάνω διαφορική εξίσωση) αφορά τους χρόνους t μετά τη διαταραχή.

 Ca(0) = 3 g/L Η συγκέντρωση Ca στην έξοδο, ακριβώς στο χρόνο 0 min της διαταραχής είναι ίση

 με τη Ca στην προηγούμενη μόνιμη κατάσταση, πριν τη διαταραχή.

 τ = 150/30 = 5 min είναι ο υδραυλικός χρόνος παραμονής, που έχει υπολογιστεί

Οπότε το ισοζύγιο μάζας γίνεται: $5\frac{dCa(t)}{dt}+Ca(t)=2$

Ο μετασχηματισμός) Laplace του όρου $\frac{dCa(t)}{dt}$ είναι:

**L** $\left\{\frac{dCa(t)}{dt}\right\}$ = s\*Ca(s) – Ca(0) = **s\*Ca(s) – 3** αφού Ca(0) = 3 g/L.

O μετασχηματισμός Laplace του όρου **Ca(t)** είναι **Ca(s)** και ο μετασχηματισμός Laplace του **2** είναι **2/s** (σύμφωνα με τον Πίνακα 2.1). Οπότε, ο μετασχηματισμός Laplace του ισοζυγίου μάζας είναι:

5\*(sCa(s) – 3) + Ca(s) = 2/s ⬄ 5sCa(s) – 15 + Ca(s) = 2/s ⬄ Ca(s)\*(5s + 1) = 2/s + 15 ⬄

**Ca(s) =** $\frac{2}{s(5s +1)}+ \frac{15}{(5s +1)} $

**Ισοζύγιο ενέργειας:** $τ\frac{dΤ(t)}{dt}+T\left(t\right)=T3+ \left(\frac{1}{ρv3Cp}\right)Q$

Όπου: T3 = 35 oC είναι η θερμοκρασία στην παροχή εισόδου του δοχείου ανάμιξης, μετά τη

διαταραχή.

 Τ(0) = 80 οC Η θερμοκρασία T(t) στην έξοδο, ακριβώς στο χρόνο 0 min της διαταραχής είναι ίση

 με τη T στην προηγούμενη μόνιμη κατάσταση, πριν τη διαταραχή.

 τ = 150/30 = 5 min είναι ο υδραυλικός χρόνος παραμονής, που έχει υπολογιστεί

 Q/ρ\*v3\*Cp = 1.050.000/30.000 = 35 oC

Οπότε το ισοζύγιο ενέργειας γίνεται: $5\frac{dΤ(t)}{dt}+Τ(t)=70$

Ο μετασχηματισμός) Laplace του όρου $\frac{dΤ(t)}{dt}$ είναι:

**L** $\left\{\frac{dT(t)}{dt}\right\}$ = s\*T(s) – T(0) = **s\*T(s) – 80** αφού T(0) = 80 οC

O μετασχηματισμός Laplace του όρου **T(t)** είναι **T(s)** και ο μετασχηματισμός Laplace του **70** είναι **70/s** (σύμφωνα με τον Πίνακα 2.1). Οπότε, ο μετασχηματισμός Laplace του ισοζυγίου ενέργειας είναι:

5\*(sΤ(s) – 80) + Τ(s) = 70/s ⬄ 5sΤ(s) – 400 + Τ(s) = 70/s ⬄ Τ(s)\*(5s + 1) = 70/s + 400 ⬄

**Τ(s) =** $\frac{70}{s(5s +1)}+ \frac{400}{(5s +1)} $