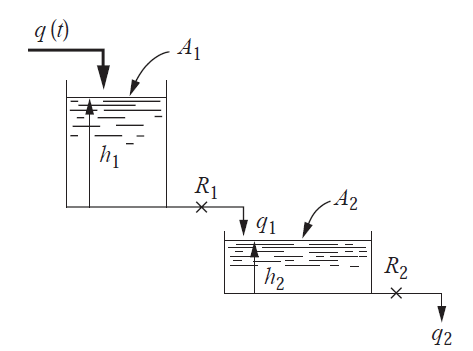
ΑΣΚΗΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 10 Νοεμβρίου 2020

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ΕΠΩΝΥΜΟ: |  | ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ: |  |
| ΟΝΟΜΑ: |  | ΛΗΓΟΝΤΑΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ: |  |

**(Στο Αρχείο αυτό να συμπληρωθούν οι Πίνακες με τα αποτελέσματα και να επικοληθούν οι φωτογραφίες από τα χειρόγραφα της λύσης. Το Αρχείο να σωθεί με όνομα Α6\_Δυναμική\_Επώνυμο\_Όνομα και να ανεβεί στο e-class)**

Σε χρόνο 0 η παροχή στην είσοδο της 1ης δεξαμενής αρχίζει να μεταβάλλεται γραμμικά με κλίση k (m3/min)/min. Να υπολογιστεί η στάθμη h2 στη 2η δεξαμενή μετά από χρόνο t min.

**ΔΕΔΟΜΕΝΑ**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| AM | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |  |
| q | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | m3/min |
| A1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | m2 |
| R1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0,5 | min/m2 |
| Α2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0,5 | 2 | 1 | m2 |
| R2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,5 | 1 | 1 | min/m2 |
| k | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | m3/min2 |
| t | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | min |

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **AM** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **h1s** | 4 | 4 | 2 | 4 | 4 | 4 | 2 | 4 | 2 | 1 |
| **h2s** | 4 | 4 | 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| **Συνάρτηση μεταφοράς H1/Q** | | | | | | | | | | |
| **kp1** | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0,5 |
| **τ1** | 2 | 4 | 1 | 2 | 4 | 4 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| **a1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **Συνάρτηση μεταφοράς Q1/Q** | | | | | | | | | | |
| **kp1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **τ1** | 2 | 4 | 1 | 2 | 4 | 4 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| **a1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **Συνάρτηση μεταφοράς H2/Q1** | | | | | | | | | | |
| **kp2** | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,5 | 1 | 1 |
| **τ1** | 4 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0,25 | 2 | 1 |
| **a2** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **H2(s) HEAVYSIDE** | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **A** | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| **B** | -12 | -12 | -6 | -3 | -6 | -10 | -6 | -2,25 | -8 | -4 |
| **C (1ης Δ.)** | -4 | 16 | -2 | 4 | 8 | 11 | -2 | 2 | 2 | 2 |
| **D (2ης Δ.)** | 16 | -4 | 8 | -1 | -2 | -1 | 8 | -0,0357 | 8 | 4 |
| Η2(t) | 0,233 | 0,665 | 0,672 | 0,843 | 0,116 | 0,379 | 1,685 | 1,260 | 0,415 | 2,498 |
| H2(t) | 4,233 | 4,665 | 4,672 | 2,843 | 2,116 | 2,379 | 3,685 | 2,260 | 2,415 | 4,498 |

ΚΟΚΚΙΝΑ ΚΕΛΙΑ: Στο HEAVYSIDE, ο παρονομαστής έχει 2 διπλές ρίζες. Η λύση τέτοιου τύπου του HEAVYSIDE είναι μέρος της θεωρίας και οι αναλυτικές λύσεις που παρουσιάζονται παρακάτω, είναι λυμένα παραδείγματα αυτής της περίπτωσης και θα θεωρούνται γνωστά για όλους τους φοιτητές/τριες.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ (οι λύσεις για ΑΜ 8 και 9, έχουν 2 διπλές ρίζες στον παρονομαστή και η λύση τους παρουσιάζεται στη συνέχεια)

AM 0

**1ο ΒΗΜΑ: Βοηθητικοί υπολογισμοί στην αρχική μόνιμη κατάσταση.**

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ Δ1: q1s – h1s/R1 = 0 ⬄ 2 – h1s/2 = 0 ⬄ h1s = 4 m

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ Δ1: q2s – h2s/R2 = 0 ⬄ 2 – h2s/2 = 0 ⬄ h2s = 4 m

**2ο ΒΗΜΑ: Κατάστρωση κατάλληλου ισοζυγίου.**

IM ΔΕΞΑΜΕΝΗ 1: Lt/min (1)

**3ο ΒΗΜΑ: Το ίδιο ισοζύγιο στην αρχική μόνιμη κατάσταση.**

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ: Lt/min (2)

**4ο ΒΗΜΑ: Εισαγωγή των μεταβλητών απόκλισης.**

ΑΦΑΙΡΩ ΤΗ (2) ΑΠΌ ΤΗΝ (1): Lt/min (3)

ΕΙΣΑΓΩ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ: Q(t) = q(t) – qs Lt/min

H1(t) = h1(t) – h1s m

ΑΠΟ (3):

**5ο ΒΗΜΑ: Μετασχηματισμός LAPLACE.**

LAPLACE:  (4)

**(Επιπλέον βήμα, για τα δοχεία σε σειρά, ώστε από τη συνάρτηση μεταφοράς H1/Q να εξαχθεί η συνάρτηση μεταφοράς Q1/Q – στην Εξίσωση που συνδέει την παροχή εξόδου με τη στάθμη κάνουμε ότι και στο ισοζύγιο)**

**Εξίσωση παροχής-στάθμης**

**Εξίσωση παροχής-στάθμης στη μόνιμη κατάσταση**

**Αφαιρώντας τις παραπάνω εξισώσεις μεταξύ τους, εισάγουμε τις μεταβλητές απόκλισης:**

**Lt/min**

**Μετασχηματισμός Laplace:**

**Laplace: (5)**

Αντικαθιστώντας το H1(s) = 2Q1(s) (Εξ. 5) στην Εξίσωση (4): (6)

ΙΜ ΔΕΞ. 2: Lt/min (7)

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ: Lt/min (8)

ΑΦΑΙΡΩ ΤΗ (8) ΑΠΌ ΤΗΝ (7): Lt/min (9)

ΕΙΣΑΓΩ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ: Q1(t) = q1(t) – q1s Lt/min

H2(t) = h2(t) – h2s m

ΑΠΟ ΤΗΝ (9):

LAPLACE:  (10)

ΑΛΛΑ: (11)

ΔΙΑΤΑΡΣΧΗ ΠΑΡΟΧΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ: q(t) = qs + k\*t ⬄ q(t) = qs + 1\*t ⬄ ⬄ q(t) = qs + 1\*t ⬄

⬄ q(t) – qs = t ⬄ Q(t) = t ⬄ Q(s) = 1/s2

ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩ ΤΗΝ Q(s) ΣΤΗΝ (11):

ΑΝΑΛΥΩ ΣΕ ΜΕΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΜΕ HEAVYSIDE: (12)

(Ο παρονομαστής έχει διπλή ρίζα (το s2), που αναλύεται σε μερικά κλάσματα, ως εξής: )

Για τον υπολογισμό του Β, πολλαπλασιάζω κάθε κλάσμα στο δεξιό σκέλος της 12, με τον παρονομαστή του αριστερού σκέλους, έτσι ώστε τα κλάσματα στο δεξί σκέλος να γίνουν ομώνυμα. Το άθροισμα των αριθμητών του δεξιού σκέλους θα πρέπει να είναι ίσο με 0,25 (τον αριθμητή δηλαδή του αριστερού σκέλους:

0,25 = A(s2 + 0,75s + 0,125) + Bs(s2 + 0,75s + 0,125) + Cs2(s+0,25) + Ds2(s+0,5) ⬄

⬄ 0,25 = (Β + C + D)s3 + (A + 0,75B + 0,25C + 0,5D)s2 + (0,75A + 0,125B)s + 0,125A

Αφού στο αριστερό σκέλος δεν υπάρχουν s3, θα πρέπει να μην υπάρχουν s3 και στο δεξιό, οπότε θα πρέπει:

B + C + D = 0 ⬄ B = -C-D = 4-16 = -12

2 + 0,75\*(-12) + 0,25\*(-4) + 0,5\*16 = 0

ΑΠΟ ΤΗΝ (12):

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ LAPLACE: H2(t) = 2\*t-12-4\*exp(-0,5\*t)+16\*exp(-0,25\*t) m

Η2(2) = 0,233 m h2(2) = H2(2) + 4 = 4,233 m

AM 1

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ Δ1: qos – h1s/R1 = 0 ⬄ 2 – h1s/2 = 0 ⬄ h1s = 4 m

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ Δ2: q1s – h2s/R2 = 0 ⬄ 2 – h2s/2 = 0 ⬄ h2s = 4 m

IM ΔΕΞΑΜΕΝΗ 1: Lt/min (1)

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ: Lt/min (2)

ΑΦΑΙΡΩ ΤΗ (2) ΑΠΌ ΤΗΝ (1): Lt/min (3)

ΕΙΣΑΓΩ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ: Q(t) = q(t) – qs Lt/min

H1(t) = h1(t) – h1s m

ΑΠΟ (3):

LAPLACE:  (4)

ΑΛΛΑ: και αφαιρώντας: Lt/min Laplace: (5)

ΑΠΟ ΤΗΝ (5): (6)

ΙΜ ΔΕΞ. 2: Lt/min (7)

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ: Lt/min (8)

ΑΦΑΙΡΩ ΤΗ (8) ΑΠΌ ΤΗΝ (7): Lt/min (9)

ΕΙΣΑΓΩ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ: Q1(t) = q1(t) – q1s Lt/min

H2(t) = h2(t) – h2s m

ΑΠΟ ΤΗΝ (9):

LAPLACE:  (10)

ΑΛΛΑ: (11)

ΔΙΑΤΑΡΣΧΗ ΠΑΡΟΧΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ: q(t) = qs+t ⬄ q(t) – qs = t ⬄ Q(t) = t ⬄ Q(s) = 1/s2

ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩ ΤΗΝ Q(s) ΣΤΗΝ (11):

ΑΝΑΛΥΩ ΣΕ ΜΕΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΜΕ HEAVYSIDE: (12)

0,25 = A(s2 + 0,75s + 0,125) + Bs(s2 + 0,75s + 0,125) + Cs2(s+0,5) + Ds2(s+0,25) ⬄ B + C + D = 0

⬄ B = -C-D = -16+4 = -12

ΑΠΟ ΤΗΝ (12):

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ LAPLACE: H2(t) = 2\*t-12+16\*exp(-0,25\*t)-4\*exp(-0,5\*t) m

Η2(3) = 0,665 m h2(2) = H2(2) + 4 = 4,665 m

AM 8

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ Δ1: qos – h1s/R1 = 0 ⬄ 2 – h1s/1 = 0 ⬄ h1s = 2 m

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ Δ1: q1s – h2s/R2 = 0 ⬄ 2 – h2s/1 = 0 ⬄ h2s = 2 m

IM ΔΕΞΑΜΕΝΗ 1: Lt/min (1)

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ: Lt/min (2)

ΑΦΑΙΡΩ ΤΗ (2) ΑΠΌ ΤΗΝ (1): Lt/min (3)

ΕΙΣΑΓΩ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ: Q(t) = q(t) – qs Lt/min

H1(t) = h1(t) – h1s m

ΑΠΟ (3):

LAPLACE:  (4)

ΑΛΛΑ: και αφαιρώντας: Lt/min Laplace: (5)

ΑΠΟ ΤΗΝ (5): (6)

ΙΜ ΔΕΞ. 2: Lt/min (7)

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ: Lt/min (8)

ΑΦΑΙΡΩ ΤΗ (8) ΑΠΌ ΤΗΝ (7): Lt/min (9)

ΕΙΣΑΓΩ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ: Q1(t) = q1(t) – q1s Lt/min

H2(t) = h2(t) – h2s m

ΑΠΟ ΤΗΝ (9):

LAPLACE:  (10)

ΑΛΛΑ: (11)

ΔΙΑΤΑΡΣΧΗ ΠΑΡΟΧΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ: q(t) = qs+2t ⬄ q(t) – qs =2 t ⬄ Q(t) =2 t ⬄ Q(s) = 2/s2

ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩ ΤΗΝ Q(s) ΣΤΗΝ (11):

ΑΝΑΛΥΩ ΣΕ ΜΕΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΜΕ HEAVYSIDE: (12)

0,5 = A(s2 + s + 0,25) + Bs(s2 + s + 0,25) + Cs2 + Ds2(s+0,5)

Στην παραπάνω παράσταση, οι συντελεστές του s3 (B + D), του s2 (A + B + C + 0,5D) και ο συντελεστής του s (A + 0,25B) θα πρέπει να είναι μηδέν, γιατί στο αριστερό σκέλος της εξίσωσης υπάρχει μόνο το 0,5 και κανένας όρος με s, s2 ή s3. Οπότε:

⬄ B + D = 0 ⬄ B = -D

⬄ A + B + C + 0,5D = 0 ⬄ 4 = D – 0,5D = 0,5D ⬄ D = 8 ⬄ B = -8

ΑΠΟ ΤΗΝ (12):

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ LAPLACE: H2(t) = 2\*t-8+2\*t\*exp(-0,5\*t)+8\*exp(-0,5\*t) m

Η2(2) = 0,415 m h2(2) = H2(2) + 2 = 2,415 m

AM 9

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ Δ1: qos – h1s/R1 = 0 ⬄ 2 – h1s/0,5 = 0 ⬄ h1s = 1 m

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ Δ1: q1s – h2s/R2 = 0 ⬄ 2 – h2s/1 = 0 ⬄ h2s = 2 m

IM ΔΕΞΑΜΕΝΗ 1: Lt/min (1)

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ: Lt/min (2)

ΑΦΑΙΡΩ ΤΗ (2) ΑΠΌ ΤΗΝ (1): Lt/min (3)

ΕΙΣΑΓΩ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ: Q(t) = q(t) – qs Lt/min

H1(t) = h1(t) – h1s m

ΑΠΟ (3):

LAPLACE:  (4)

ΑΛΛΑ: και αφαιρώντας: Lt/min Laplace: (5)

ΑΠΟ ΤΗΝ (5): (6)

ΙΜ ΔΕΞ. 2: Lt/min (7)

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ: Lt/min (8)

ΑΦΑΙΡΩ ΤΗ (8) ΑΠΌ ΤΗΝ (7): Lt/min (9)

ΕΙΣΑΓΩ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ: Q1(t) = q1(t) – q1s Lt/min

H2(t) = h2(t) – h2s m

ΑΠΟ ΤΗΝ (9):

LAPLACE:  (10)

ΑΛΛΑ: (11)

ΔΙΑΤΑΡΣΧΗ ΠΑΡΟΧΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ: q(t) = qs+2t ⬄ q(t) – qs =2 t ⬄ Q(t) =2 t ⬄ Q(s) = 2/s2

ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩ ΤΗΝ Q(s) ΣΤΗΝ (11):

ΑΝΑΛΥΩ ΣΕ ΜΕΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΜΕ HEAVYSIDE: (12)

2 = A(s2 + 2s + 1) + Bs(s2 + 2s + 1) + Cs2 + Ds2(s+1) ⬄ B + D = 0 ⬄ B = -D

⬄ A + 2B + C + D = 0 ⬄ 4 = 2D – D = D ⬄ D = 4 ⬄ B = -4

ΑΠΟ ΤΗΝ (12):

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ LAPLACE: H2(t) = 2\*t-4+2\*t\*exp(-\*t)+4\*exp(-t) m

Η2(2) = 2,498 m h2(2) = H2(2) + 2 = 4,498 m