1η ΠΡΟΟΔΟΣ 1ο ΘΕΜΑ 24 Νοεμβρίου 2020

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ΕΠΩΝΥΜΟ: |  | ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ: |  |
| ΟΝΟΜΑ: |  | ΛΗΓΟΝΤΑΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ: |  |

 **(Στο Αρχείο αυτό να συμπληρωθούν οι Πίνακες με τα αποτελέσματα και να επικοληθούν οι φωτογραφίες από τα χειρόγραφα της λύσης. Το Αρχείο να σωθεί με όνομα 1Π\_1Θ\_Δυναμική\_Επώνυμο\_Όνομα και να ανεβεί στο e-class)**

Στις δεξαμενές με αλληλεπίδραση και σε χρόνο 0 η παροχή στην είσοδο της 1ης δεξαμενής μεταβάλλεται βηματικά κατά Α m3/min. Να υπολογιστεί η στάθμη h2 στη 2η δεξαμενή μετά από χρόνο t min (να μην γίνει Heavyside).

**ΔΕΔΟΜΕΝΑ**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| AM | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |  |
| q | 15 | 10 | 5 | 10 | 15 | 20 | 15 | 10 | 5 | 20 | m3/min |
| A1 | 2 | 2 | 4 | 1 | 2 | 4 | 3 | 2 | 4 | 1 | m2 |
| R1 | 2 | 4 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | min/m2 |
| Α2 | 4 | 2 | 2 | 2 | 4 | 3 | 4 | 2 | 2 | 4 | m2 |
| R2 | 2 | 4 | 4 | 1 | 2 | 1 | 4 | 2 | 2 | 1 | min/m2 |
| A | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 3 | 5 | 4 | 3 | 4 | m3/min |
| t | 4 | 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 | 1 | min |

**ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| AM | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **h2s** | 30 | 40 | 20 | 10 | 30 | 20 | 60 | 20 | 10 | 20 |
| **συν. μεταφ. H2/Q (1ο ισοζ.)** |
| **παράγοντας του s**  | 4 | 8 | 8 | 1 | 2 | 8 | 3 | 4 | 12 | 1 |
| **παράγοντας του Q(s)**  | 2 | 4 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| **παράγοντας του H2(s)**  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **σταθερά** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **συν. μεταφ. H2/Η1 (2ο ισοζ.)** |
| **παράγοντας του s**  | 8,0 | 8,0 | 4,0 | 2,0 | 4,0 | 6,0 | 4,0 | 4,0 | 6,0 | 4,0 |
| **σταθερά** | 2,0 | 2,0 | 1,5 | 2,0 | 1,5 | 3,0 | 1,3 | 2,0 | 2,5 | 2,0 |
| **Συνάρτηση μεταφοράς 2ης τάξης (ολική)** |
| **αριθμητής** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **παράγοντας του s2**  | 16 | 16 | 16 | 2 | 8 | 24 | 12 | 8 | 24 | 4 |
| **παράγοντας του s**  | 8 | 6 | 8 | 4 | 7 | 15 | 8 | 6 | 12 | 6 |
| **σταθερά** | 0,5 | 0,25 | 0,25 | 1 | 0,5 | 1 | 0,25 | 0,5 | 0,5 | 1 |
| **Συνάρτηση μεταφοράς 2ης τάξης (τυπική μορφή με σταθερό όρο 1)** |
| **αριθμητής** | 2 | 4 | 4 | 1 | 2 | 1 | 4 | 2 | 2 | 1 |
| **παράγοντας του s2**  | 32 | 64 | 64 | 2 | 16 | 24 | 48 | 16 | 48 | 4 |
| **παράγοντας του s**  | 16 | 24 | 32 | 4 | 14 | 15 | 31 | 12 | 24 | 6 |
| **σταθερά** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **τ**  | 5,657 | 8,000 | 8,000 | 1,414 | 4,000 | 4,899 | 6,928 | 4,000 | 6,928 | 2,000 |
| **ζ** | **1,414** | **1,500** | **2,000** | **1,414** | **1,750** | **1,531** | **2,237** | **1,500** | **1,732** | **1,500** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **Η2(t)** | 12,99 | 3,06 | 8,46 | 6,23 | 10,01 | 5,24 | 6,26 | 31,22 | 25,30 | 2,76 |
| **h2(t)** | 42,99 | 43,06 | 28,46 | 16,23 | 40,01 | 25,24 | 66,26 | 51,22 | 35,30 | 22,76 |

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

**AM 2**

Τιμές παροχής και στάθμης στην αρχική μόνιμη κατάσταση:

ρ\*qs = ρ\*q1s = ρ\*q2s ⬄ qos = q1s = q2s = q = 5 ft3/min

Στάθμη μόνιμης κατάστασης δεξαμενή 1: $qs – \frac{h1s-h2s}{R1} = 0$ ⬄ 10 = h1s – h2s (1)

Στάθμη μόνιμης κατάστασης δεξαμενή 2: $q1s – \frac{h2s}{R2} = 0$ ⬄ 5 = h2s/4 ⬄ **h2s = 20 m**

Από την (1): 10 = h1s – 20 ⬄ **h1s = 30 m**

ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΜΑΖΑΣ ΣΤΗ ΔΕΞΑΜΕΝΗ 1:

$ρ\*q\left(t\right)– ρ\*q1\left(t\right)= ρ\*A1\frac{dh1\left(t\right)}{dt}\leftrightarrow q\left(t\right)– \frac{h1\left(t\right)-h2(t)}{R1} = A1\frac{dh1\left(t\right)}{dt}$ m3/min (2)

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ: $qs – \frac{h1s-h2s}{R1} = A1\frac{dh1s}{dt}=0$ m3/min (3)

ΑΦΑΙΡΩ (3) ΑΠΌ (2): $\left(q\left(t\right)-qs\right)– \frac{h1\left(t\right)-h1s}{R1}+ \frac{h2\left(t\right)-h2s}{R1}= A1\frac{d(h1\left(t\right)-h1s)}{dt}$ m3/min (4)

ΕΙΣΑΓΩ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ: Q(t) = q(t) – qs (Q(t)= q(t) –5) m3/min

H1(t) = h1(t) – h1s (H1(t) = h1(t) – 30) m

H2(t) = h2(t) – h2s (H2(t) = h2(t) – 20) m

ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΣΤΗΝ (4), ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ:

$Q\left(t\right)– \frac{H1\left(t\right)}{R1}+ \frac{H2(t)}{R1}= A1\frac{dH1(t)}{dt} \leftrightarrow $ $2\*Q\left(t\right) – H1\left(t\right)+H2\left(t\right)= 8\*\frac{dH1\left(t\right)}{dt} \leftrightarrow 2Q(t) – H1(t)+H2\left(t\right)= 8\frac{dH1(t)}{dt} $

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΖΩ ΚΑΤΑ LAPLACE: $2Q\left(s\right)–H1\left(s\right)+H2(s)= 8s\*H1\left(s\right)$⬄ $2Q\left(s\right)+H2(s)= H1\left(s\right)(8s+1)$ **(5)**

ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΜΑΖΑΣ ΣΤΗ ΔΕΞ. 2: $ρ\*q1\left(t\right)– ρ\*q2\left(t\right)= ρ\*A2\frac{dh1\left(t\right)}{dt}\leftrightarrow q1\left(t\right)– \frac{h2\left(t\right)}{R2} = A2\frac{dh2\left(t\right)}{dt}$ m3/min (6)

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ: $q1s – \frac{h2s}{R2} = A2\frac{dh2s}{dt}=0$ m3/min (7)

ΑΦΑΙΡΩ ΤΗ (6) ΑΠΌ ΤΗΝ (5): $(q1(t)-q1s) – \frac{h2\left(t\right)-h2s}{R2} = A2\frac{d(h2\left(t\right)-h2s)}{dt}$ m3/min (8)

ΕΙΣΑΓΩ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ: Q2(t) = q2(t) – q2s (Q2(t) = q2(t) – 5) m3/min

H2(t) = h2(t) – h2s (H2(t) = h2(t) – 20) m

ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΣΤΗΝ (8), ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ:

$Q1(t) – \frac{H2\left(t\right)}{R2} = A2\frac{dH2(t)}{dt} \leftrightarrow $ $R2\*Q1\left(t\right)– H2\left(t\right)= A2\*R2\frac{dH2\left(t\right)}{dt} \leftrightarrow 4Q1(t) – H2(t)= 8\frac{dH2(t)}{dt} $ (9)

Αλλά: $Q1\left(t\right)= \frac{H1\left(t\right)}{R1}- \frac{H2\left(t\right)}{R1}= \frac{H1\left(t\right)}{2}- \frac{H2\left(t\right)}{2}$

ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩ ΣΤΗΝ (9): $2Η1(t) – 3H2(t)= 8\frac{dH2(t)}{dt}$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΖΩ ΚΑΤΑ LAPLACE: $2Η1\left(s\right)–3H2\left(s\right)= 8sH2\left(s\right)\leftrightarrow Η1\left(s\right)=H2\left(s\right)\*\left(4s+1,5\right)$ (10)

ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩ ΣΤΗΝ (5): $2Q\left(s\right)+H2(s)=H2\left(s\right)(4s+1,5)(8s+1)$⬄ $Q\left(s\right)=H2\left(s\right)(16s^{2}+8s+0,25)$ ⬄

⬄ $\frac{H2}{Q}=\frac{1}{16s^{2}+8s+0,25}$ ⬄ $\frac{H2}{Q}=\frac{4}{64s^{2}+32s+1}$ (11)

τ2 = 64 ⬄ τ = 8 min 2\*ζ\*τ = 32 ⬄ ζ = 32/(2\*8) ⬄ ζ = 2

**ΒΗΜΑΤΙΚΗ** ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΜΕΓΕΘΟΥΣ 3 ΣΕ **ΣΥΣΤΗΜΑ 2ΗΣ** ΤΑΞΗΣ ΜΕ **ζ > 1** (Εξίσωση 7.32)

$Η2\left(t\right)= 12-12\*exp(-\frac{ζ\*t}{τ})\*\left[\cosh(\left(\frac{t}{τ}\sqrt{ζ^{2}-1}\right))+\frac{1}{\sqrt{ζ^{2}-1}}\*\sinh(\left(\frac{t}{τ}\sqrt{ζ^{2}-1}\right))\right] $ ⬄

$$H2(3)= 12-12\*exp\left(-0,25\*3\right)\*\left[\cosh(\left(\frac{1,732\*3}{8}\right))+9,577\*\sinh(\left(\frac{1,732\*3}{8}\right))\right]=8,46 m $$

h2(3) = 20 + 8,46 = 28,46 οC

**AM 4**

Τιμές παροχής και στάθμης στην αρχική μόνιμη κατάσταση:

ρ\*qs = ρ\*q1s = ρ\*q2s ⬄ qos = q1s = q2s = q = 15 ft3/min

Στάθμη μόνιμης κατάστασης δεξαμενή 1: $qs – \frac{h1s-h2s}{R1} = 0$ ⬄ 15 = h1s – h2s (1)

Στάθμη μόνιμης κατάστασης δεξαμενή 2: $q1s – \frac{h2s}{R2} = 0$ ⬄ 15 = h2s/2 ⬄ **h2s = 30 m**

Από την (1): 15 = h1s – 30 ⬄ **h1s = 45 m**

ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΜΑΖΑΣ ΣΤΗ ΔΕΞΑΜΕΝΗ 1:

$ρ\*q\left(t\right)– ρ\*q1\left(t\right)= ρ\*A1\frac{dh1\left(t\right)}{dt}\leftrightarrow q\left(t\right)– \frac{h1\left(t\right)-h2(t)}{R1} = A1\frac{dh1\left(t\right)}{dt}$ m3/min (2)

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ: $qs – \frac{h1s-h2s}{R1} = A1\frac{dh1s}{dt}=0$ m3/min (3)

ΑΦΑΙΡΩ (3) ΑΠΌ (2): $\left(q\left(t\right)-qs\right)– \frac{h1\left(t\right)-h1s}{R1}+ \frac{h2\left(t\right)-h2s}{R1}= A1\frac{d(h1\left(t\right)-h1s)}{dt}$ m3/min (4)

ΕΙΣΑΓΩ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ: Q(t) = q(t) – qs (Q(t)= q(t) –15) m3/min

H1(t) = h1(t) – h1s (H1(t) = h1(t) – 45) m

H2(t) = h2(t) – h2s (H2(t) = h2(t) – 30) m

ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΣΤΗΝ (4), ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ:

$Q\left(t\right)– \frac{H1\left(t\right)}{R1}+ \frac{H2(t)}{R1}= A1\frac{dH1(t)}{dt} \leftrightarrow $ $1\*Q\left(t\right) – H1\left(t\right)+H2\left(t\right)= 2\*\frac{dH1\left(t\right)}{dt} \leftrightarrow Q(t) – H1(t)+H2\left(t\right)= 2\frac{dH1(t)}{dt} $

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΖΩ ΚΑΤΑ LAPLACE: $Q\left(s\right)–H1\left(s\right)+H2(s)= 2s\*H1\left(s\right)$⬄ $Q\left(s\right)+H2(s)= H1\left(s\right)(2s+1)$ **(5)**

ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΜΑΖΑΣ ΣΤΗ ΔΕΞ. 2: $ρ\*q1\left(t\right)– ρ\*q2\left(t\right)= ρ\*A2\frac{dh1\left(t\right)}{dt}\leftrightarrow q1\left(t\right)– \frac{h2\left(t\right)}{R2} = A2\frac{dh2\left(t\right)}{dt}$ m3/min (6)

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ: $q1s – \frac{h2s}{R2} = A2\frac{dh2s}{dt}=0$ m3/min (7)

ΑΦΑΙΡΩ ΤΗ (6) ΑΠΌ ΤΗΝ (5): $(q1(t)-q1s) – \frac{h2\left(t\right)-h2s}{R2} = A2\frac{d(h2\left(t\right)-h2s)}{dt}$ m3/min (8)

ΕΙΣΑΓΩ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ: Q2(t) = q2(t) – q2s (Q2(t) = q2(t) – 15) m3/min

H2(t) = h2(t) – h2s (H2(t) = h2(t) – 30) m

ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΣΤΗΝ (8), ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ:

$Q1(t) – \frac{H2\left(t\right)}{R2} = A2\frac{dH2(t)}{dt} \leftrightarrow $ $R2\*Q1\left(t\right)– H2\left(t\right)= A2\*R2\frac{dH2\left(t\right)}{dt} \leftrightarrow 2Q1(t) – H2(t)= 8\frac{dH2(t)}{dt} $ (9)

Αλλά: $Q1\left(t\right)= \frac{H1\left(t\right)}{R1}- \frac{H2\left(t\right)}{R1}= \frac{H1\left(t\right)}{1}- \frac{H2\left(t\right)}{1}=H1\left(t\right)-H2(t)$

ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩ ΣΤΗΝ (9): $2Η1(t) – 3H2(t)= 8\frac{dH2(t)}{dt}$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΖΩ ΚΑΤΑ LAPLACE: $2Η1\left(s\right)–3H2\left(s\right)= 8sH2\left(s\right)\leftrightarrow Η1\left(s\right)=H2\left(s\right)\*\left(4s+1,5\right)$ (10)

ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩ ΣΤΗΝ (5): $Q\left(s\right)+H2(s)=H2\left(s\right)(4s+1,5)(2s+1)$⬄ $Q\left(s\right)=H2\left(s\right)(8s^{2}+7s+0,5)$ ⬄

⬄ $\frac{H2}{Q}=\frac{1}{8s^{2}+7s+0,5}$ ⬄ $\frac{H2}{Q}=\frac{2}{16s^{2}+14s+1}$ (11)

τ2 = 16 ⬄ τ = 4 min 2\*ζ\*τ = 14 ⬄ ζ = 14/(2\*4) ⬄ ζ = 1,750

**ΒΗΜΑΤΙΚΗ** ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΜΕΓΕΘΟΥΣ 5 ΣΕ **ΣΥΣΤΗΜΑ 2ΗΣ** ΤΑΞΗΣ ΜΕ **ζ > 1** (Εξίσωση 7.32)

$Η2\left(t\right)= 10-10\*exp(-\frac{ζ\*t}{τ})\*\left[\cosh(\left(\frac{t}{τ}\sqrt{ζ^{2}-1}\right))+\frac{1}{\sqrt{ζ^{2}-1}}\*\sinh(\left(\frac{t}{τ}\sqrt{ζ^{2}-1}\right))\right] $ ⬄

$$H2(2)= 10-10\*exp\left(-0,438\*2\right)\*\left[\cosh(\left(\frac{1,436\*2}{4}\right))+0,696\*\sinh(\left(\frac{1,436\*2}{4}\right))\right]=10,01 m $$

h2(2) = 30 + 10,01 = 40,01 οC

**ΛΥΣΗ**

**Επικόλληση φωτογραφιών χειρόγραφης λύσης**

**(αν δεν επικολληθούν τα χειρόγραφα λύσης, η άσκηση δεν θα βαθμολογηθεί)**