

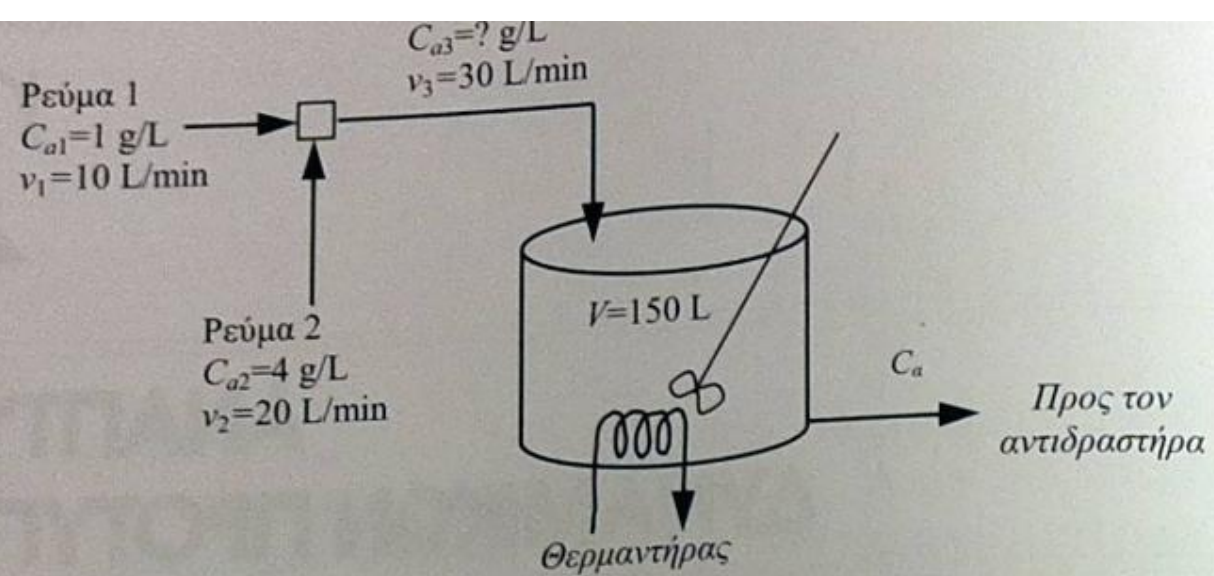
ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΠΡΟΤΥΠΩΝ

Η κατανόηση της δυναμικής συμπεριφοράς των συστημάτων διεργασιών (ο τρόπος με τον οποίο οι μεταβλητές μεταβάλλονται με το χρόνο) είναι ιδιαίτερα σημαντική στη μελέτη των συστημάτων διεργασιών. Στα παραδείγματα του Κεφ. 1 είδαμε κάποιες από τις επιπτώσεις της δυναμικής και τα αποτελέσματά της στη ρύθμιση διεργασιών. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη δυναμική διεργασιών και θα γίνει ανασκόπηση των μαθηματικών εργαλείων για την επίλυση των δυναμικών μαθηματικών προτύπων.

2.1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ - ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΝΑΜΙΞΗΣ

Θεωρούμε το ακόλουθο παράδειγμα ανάμιξης χημικών (Σχ. 2-1). Δύο ρεύματα αναμιγνύονται για να παράγουν ένα από τα ρεύματα τροφοδοσίας σε χημικό αντιδραστήρα. Μετά την ανάμιξη των ρευμάτων τροφοδοσίας το ρεύμα που προκύπτει τροφοδοτείται σε δοχείο με θέρμανση πριν, τελικά, τροφοδοτηθεί στο χημικό αντιδραστήρα.

Η διεργασία βρίσκεται σε μόνιμη κατάσταση. Η συγκέντρωση του συστατικού Α στο ρεύμα 1 είναι 1 g/L και στο ρεύμα 2 είναι 4 g/L. Μετά την αλλαγή βάρδιας των εργαζομένων, ο νέος χειριστής στη μονάδα ανάμιξης διαβάζει εσφαλμένα τη μέτρηση της παροχής και μεταβάλλει την παροχή των δύο ρευμάτων. Η παροχή του ρεύματος 1 μεταβάλλεται σε 20 L/min και του ρεύματος 2 σε 10 L/min. Μισή ώρα αργότερα ο χειριστής καλείται στο control room όπου έχει διαπιστωθεί πρόβλημα στο χημικό αντιδραστήρα. Να χρησιμοποιηθούν βασικές αρχές



ΣΧΗΜΑ 2-1 Διάγραμμα ροής διεργασίας ανάμιξης/θέρμανσης.

χημικής μηχανικής για να βρεθεί τι συνέβη στη συγκέντρωση του ρεύματος που εξέρχεται από το θερμαντήρα λόγω της άστοχης επέμβασης του χειριστή.

Μπορούμε να αναπτύξουμε το μαθηματικό πρότυπο της διεργασίας ανάμιξης γράφοντας το ισοζύγιο μάζας υπό μεταβατικές συνθήκες για να προβλέψουμε τη δυναμική συμπεριφορά της διεργασίας μετά την επέμβαση του χειριστή.

Ισοζύγιο μάζας του συστατικού A στο σημείο ανάμιξης πριν και μετά την επέμβαση του χειριστή θα μας δώσει τη μεταβολή της συγκέντρωσης του A στην τροφοδοσία. Το ισοζύγιο μάζας του συστατικού A στο σημείο ανάμιξης γράφεται

$$\begin{pmatrix} \text{Ρυθμός εισροής} \\ \text{του A με το} \\ \text{ρεύμα 1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Ρυθμός εισροής} \\ \text{του A με το} \\ \text{ρεύμα 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Ρυθμός εκροής} \\ \text{του A με το} \\ \text{ρεύμα 3} \end{pmatrix}$$

ή

$$v_1 C_{a1} + v_2 C_{a2} = v_3 C_{a3}$$

Πριν την αλλαγή, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συγκέντρωση του A σε μόνιμες συνθήκες

$$\left(10 \frac{\text{L}}{\text{min}}\right) \left(1 \frac{\text{g}}{\text{L}}\right) + \left(20 \frac{\text{L}}{\text{min}}\right) \left(4 \frac{\text{g}}{\text{L}}\right) = \left(30 \frac{\text{L}}{\text{min}}\right) C_{a3}$$

$$C_{a3} = 3 \frac{\text{g}}{\text{L}}$$

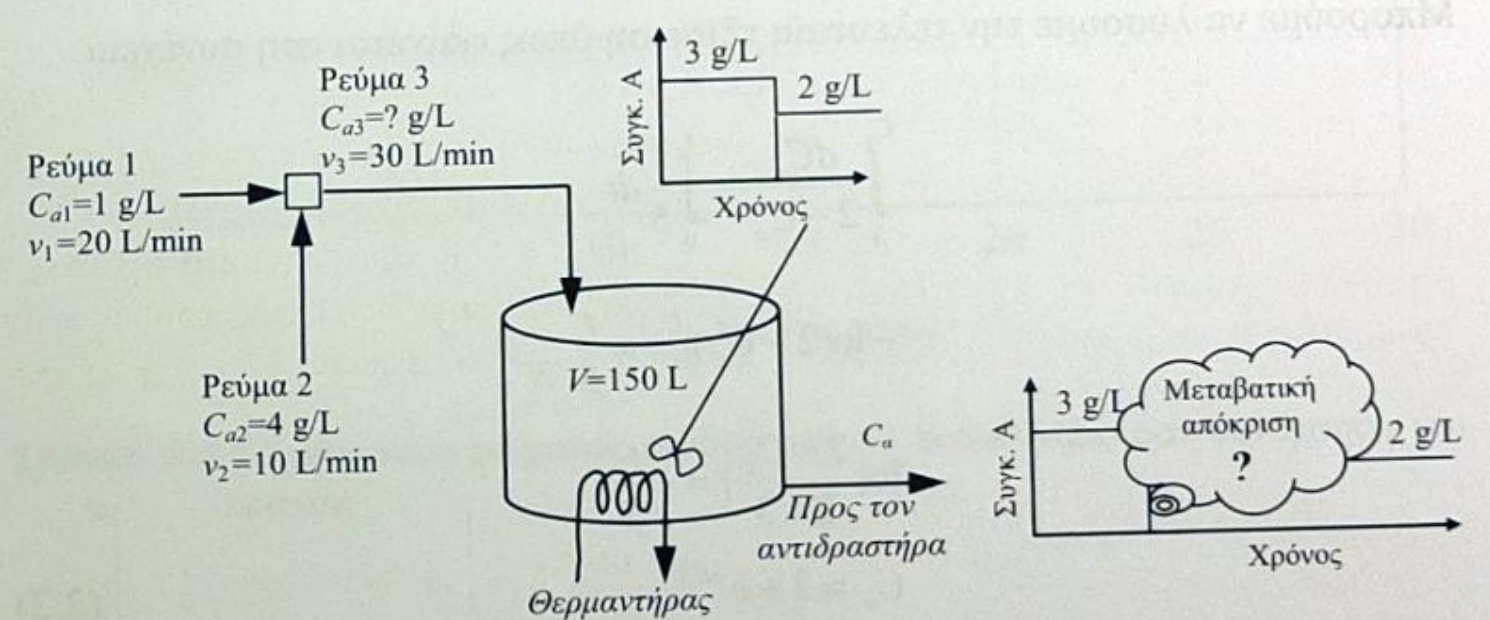
Εφόσον η διεργασία βρίσκεται σε μόνιμες συνθήκες αυτή είναι και η συγκέντρωση στην τροφοδοσία του αντιδραστήρα.

Μετά την αλλαγή, η νέα συγκέντρωση του ρεύματος που εξέρχεται από το θερμαντήρα είναι

$$\left(20 \frac{\text{L}}{\text{min}}\right) \left(1 \frac{\text{g}}{\text{L}}\right) + \left(10 \frac{\text{L}}{\text{min}}\right) \left(4 \frac{\text{g}}{\text{L}}\right) = \left(30 \frac{\text{L}}{\text{min}}\right) C_{a3}$$

$$C_{a3} = 2 \frac{\text{g}}{\text{L}}$$

Έτσι το αποτέλεσμα της λανθασμένης επέμβασης του χειριστή ήταν η μείωση της συγκέντρωσης του A από 3 σε 2 g/L. Η μείωση αυτή στην τροφοδοσία του θερμαντήρα θα οδηγήσει στην ίδια μείωση στη συγκέντρωση στο ρεύμα εξόδου του θερμαντήρα και στην τροφοδοσία του αντιδραστήρα, εάν δεν γίνουν διορθωτικές ενέργειες για μεγάλο διάστημα. Οι διαπιστώσεις μας μέχρι του σημείου αυτού συνοψίζονται στο Σχ. 2-2.



ΣΧΗΜΑ 2-2 Διάγραμμα ροής διεργασίας ανάμιξης με τις επιπτώσεις της επέμβασης του χειριστή.

Για να αναλύσουμε πως η συγκέντρωση αλλάζει στην έξοδο του θερμαντήρα χρειαζόμαστε το ισοζύγιο μάζας του συστατικού A υπό δυναμικές συνθήκες στο θερμαντήρα.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \text{Ρυθμός εισροής} \\ \text{του A στο δοχείο} \end{pmatrix}}_{\text{είσοδος}} - \underbrace{\begin{pmatrix} \text{Ρυθμός εκροής} \\ \text{του A από το δοχείο} \end{pmatrix}}_{\text{έξοδος}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \text{Ρυθμός συσσώρευσης} \\ \text{του A στο δοχείο} \end{pmatrix}}_{\text{συσσώρευση}}$$

$$v_3 C_{a3} - v_3 C_a = \frac{d(V C_a)}{dt}$$

Παρατηρήστε ότι η ογκομετρική παροχή του ρευστού διαμέσου του θερμαντήρα είναι σταθερή και ίση με v_3 . Σαν συνέπεια ο όγκος του υγρού στο δοχείο είναι επίσης σταθερός. Η εξίσωση μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$\left(\frac{V}{v_3}\right) \frac{dC_a}{dt} + C_a = C_{a3} \quad (2.1)$$

Ο όρος που πολλαπλασιάζει το διαφορικό έχει μονάδες χρόνου και είναι ο χρόνος παραμονής τ του υγρού στο δοχείο ο οποίος υπολογίζεται σε 5 min. Με αντικατάσταση των αριθμητικών τιμών έχουμε

$$5 \frac{dC_a}{dt} + C_a = 2 \quad C_a(0) = 3 \frac{\text{g}}{\text{L}}$$

Μπορούμε να λύσουμε την τελευταία εξίσωση όπως φαίνεται στη συνέχεια

$$\int_3^C \frac{dC_a}{2 - C_a} = \int_0^t \frac{1}{5} dt$$

$$-\ln(2 - C_a) \Big|_3^C = \frac{t}{5}$$

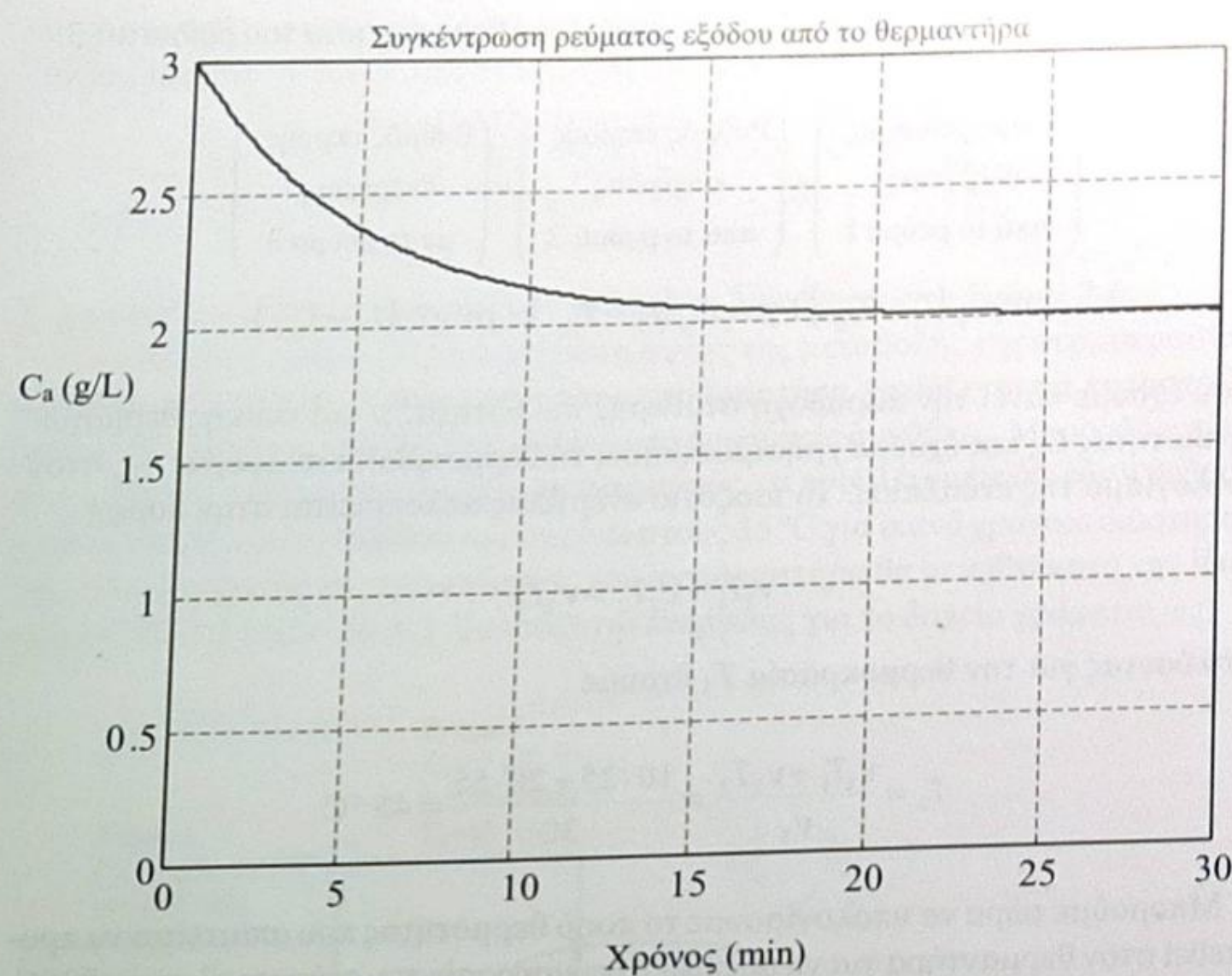
$$\ln\left(\frac{2 - C_a}{2 - 3}\right) = -\frac{t}{5}$$

$$C_a = 2 + e^{-t/5} \quad (2.2)$$

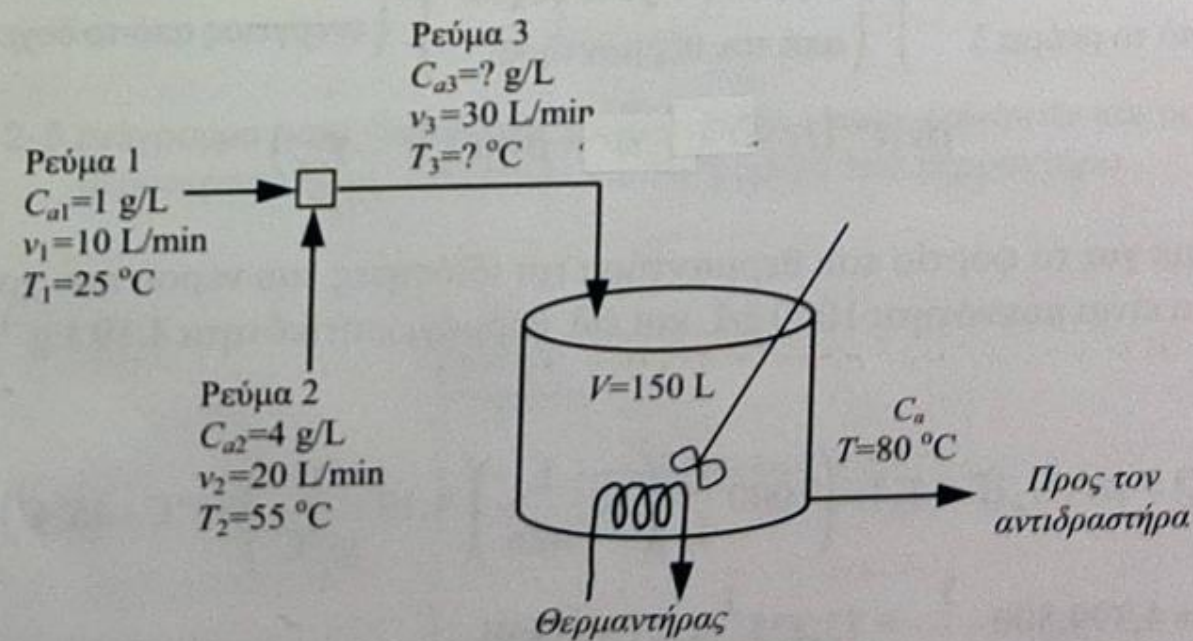
Η γραφική παράσταση της συγκέντρωσης εξόδου από το θερμαντήρα παρουσιάζεται στο Σχ. 2-3. Όπως αναμένεται η συγκέντρωση ξεκινά από την αρχική μόνιμη κατάσταση των 3 g/L και μειώνεται εκθετικά στην τιμή 2 g/L σε, περίπου, 30 min.

Η μοντελοποίηση της διεργασίας ανάμιξης μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη συγκέντρωση του συστατικού A στο ρεύμα τροφοδοσίας του αντιδραστήρα. Η δυνατότητα να προβλέπουμε τη δυναμική συμπεριφορά μιας διεργασίας είναι σημαντική στη σχεδίαση του συστήματος ρύθμισης.

Ως ένα επιπλέον παράδειγμα ανάπτυξης δυναμικού προτύπου θα θεωρήσουμε το ισοζύγιο ενέργειας για τη διεργασία που μόλις περιγράψαμε. Οι συνθήκες πριν την επέμβαση του χειριστή παρουσιάζονται στο Σχ. 2-4. Το ρεύμα 1 έχει θερμοκρασία 25 °C και το ρεύμα 2 έχει θερμοκρασία 55 °C. Ο θερμαντήρας προσθέτει ενέργεια στο δοχείο, έτσι ώστε η θερμοκρασία του ρεύματος τροφοδοσίας στον αντιδραστήρα να είναι 80 °C. Αρχικά θα καταστρώσουμε το ισοζύγιο ενέργειας για την



ΣΧΗΜΑ 2-3 Συγκέντρωση ρεύματος εξόδου από το θερμαντήρα σαν συνάρτηση του χρόνου.



ΣΧΗΜΑ 2-4 Διάγραμμα ροής διεργασίας ανάμιξης στο οποίο φαίνονται και οι αρχικές θερμοκρασίες των ρευμάτων.

γειας γύρω από το σημείο ανάμιξης μας παρέχει τη θερμοκρασία του ρεύματος 3,

$$\begin{pmatrix} \text{Ρυθμός εισροής} \\ \text{ενέργειας} \\ \text{από το ρεύμα 1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Ρυθμός εισροής} \\ \text{ενέργειας} \\ \text{από το ρεύμα 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Ρυθμός εκροής} \\ \text{ενέργειας} \\ \text{με το ρεύμα 3} \end{pmatrix}$$

$$\rho v_1 C_p (T_1 - T_{ref}) + \rho v_2 C_p (T_2 - T_{ref}) = \rho v_3 C_p (T_3 - T_{ref})$$

όπου έχουμε κάνει την παραδοχή σταθερής πυκνότητας ρ και ειδικής θερμοχωρητικότητας C_p και έχουμε χρησιμοποιήσει τη θερμοκρασία αναφοράς T_{ref} στον υπολογισμό της ενθαλπίας. Το ισοζύγιο ενέργειας απλοποιείται στην μορφή

$$v_1 T_1 + v_2 T_2 = v_3 T_3$$

Επιλύοντας για την θερμοκρασία T_3 έχουμε

$$T_3 = \frac{v_1 T_1 + v_2 T_2}{v_3} = \frac{10 \cdot 25 + 20 \cdot 55}{30} = 45 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το ποσό θερμότητας που απαιτείται να προστεθεί στον θερμαντήρα για να αυξηθεί η θερμοκρασία του ρεύματος 3 στους $80 \text{ } ^\circ\text{C}$. Το ισοζύγιο ενέργειας για το δοχείο σε μόνιμες συνθήκες είναι

$$\begin{pmatrix} \text{Ρυθμός εισροής} \\ \text{ενέργειας στο δοχείο} \\ \text{από το ρεύμα 3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Ρυθμός πρόσδωσης} \\ \text{θερμότητας στο δοχείο} \\ \text{από τον θερμαντήρα} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Ρυθμός εκροής} \\ \text{ενέργειας από το δοχείο} \end{pmatrix}$$

$$\rho v_3 C_p (T_3 - T_{ref}) + Q = \rho v_3 C_p (T - T_{ref})$$

Επιλύουμε για το φορτίο του θερμαντήρα (οι ιδιότητες του νερού που χρησιμοποιούνται είναι πυκνότητα 1000 g/L και ειδ. θερμοχωρητικότητα $4.19 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot (\text{ } ^\circ\text{C})^{-1}$)

$$Q = \rho v_3 C_p (T - T_3) = \left(1000 \frac{\text{g}}{\text{L}} \right) \left(30 \frac{\text{L}}{\text{min}} \right) \left(4.19 \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{ } ^\circ\text{C}} \right) (80 \text{ } ^\circ\text{C} - 45 \text{ } ^\circ\text{C})$$

$$= 4,399,500 \frac{\text{J}}{\text{min}} = 73,325 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 73.325 \text{ kW}$$

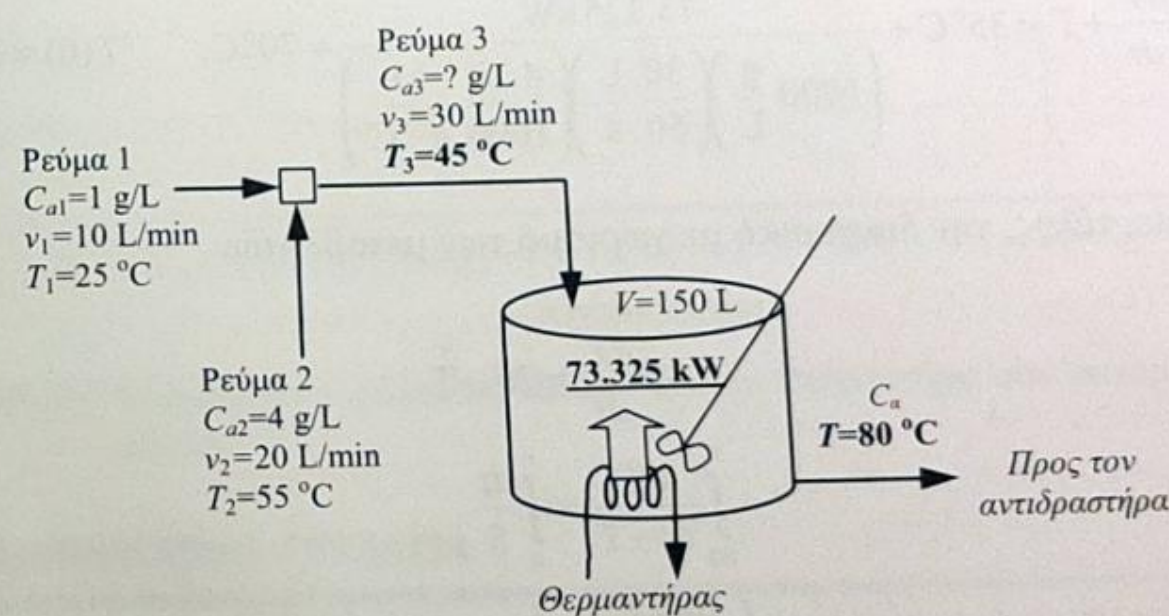
Η δύναμη κατάσταση πριν την επέμβαση του χειριστή συνοψίζεται στο Σχ. 2-5. Η

θερμοκρασία του ρεύματος 3 μετά την επέμβαση του χειριστή υπολογίζεται όπως και παραπάνω

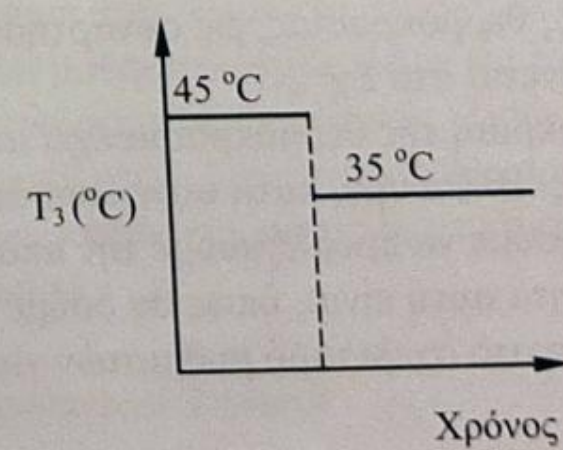
$$T_3 = \frac{v_1 T_1 + v_2 T_2}{v_3} = \frac{20 \cdot 25 + 10 \cdot 55}{30} = 35 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Η μεταβολή της θερμοκρασίας του ρεύματος 3 φαίνεται στο Σχήμα 2-6.

Για να προσδιορίσουμε την επίδραση αυτής της μεταβολής της θερμοκρασίας του ρεύματος 3 στην τροφοδοσία στον αντιδραστήρα χρειάζεται να καταστρώσουμε το ισοζύγιο ενέργειας του δοχείου υπό δυναμικές συνθήκες. Μπορούμε, πριν προχωρήσουμε στους λεπτομερείς υπολογισμούς, να προβλέψουμε ότι εάν η θερμοκρασία του ρεύματος εισόδου παραμείνει στους $35 \text{ } ^\circ\text{C}$ για ικανό χρονικό διάστημα, τότε η θερμοκρασία της τροφοδοσίας του αντιδραστήρα θα μειωθεί κατά την ίδια τιμή ($45 \text{ } ^\circ\text{C} - 35 \text{ } ^\circ\text{C} = 10 \text{ } ^\circ\text{C}$). Το ισοζύγιο ενέργειας για το δοχείο γράφεται ως



ΣΧΗΜΑ 2-5 Διάγραμμα ροής διεργασίας ανάμιξης στο οποίο φαίνονται και οι αρχικές θερμοκρασίες των ρευμάτων και το φορτίο του θερμαντήρα.



ΣΧΗΜΑ 2-6 Μεταβολή θερμοκρασίας ρεύματος 3.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Ρυθμός εισροής} \\ \text{ενέργειας στο δοχείο} \\ \text{από το ρεύμα 3} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{Ρυθμός εκροής} \\ \text{ενέργειας} \\ \text{από το δοχείο} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Ρυθμός πρόσδεσης} \\ \text{θερμότητας στο δοχείο} \\ \text{από τον θερμαντήρα} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Ρυθμός} \\ \text{συσσώ} \\ \text{ενέργει} \\ \text{στο δο} \end{array} \right)$$

$$\rho v_3 C_p (T_3 - T_{ref}) - \rho v_3 C_p (T - T_{ref}) + Q = \frac{d}{dt} [\rho V C_p (T - T_{ref})]$$

Απλοποιούμε το ισοζύγιο

$$\left(\frac{V}{v_3} \right) \frac{dT}{dt} + T = T_3 + \frac{Q}{\rho C_p v_3}$$

και αντικαθιστούμε τις αριθμητικές τιμές

$$(5 \text{ min}) \frac{dT}{dt} + T = 35^\circ \text{C} + \frac{73.325 \text{ kW}}{\left(1000 \frac{\text{g}}{\text{L}} \right) \left(\frac{30 \text{ L}}{60 \text{ s}} \right) \left(\frac{4.19 \text{ kJ}}{1000 \text{ g} \cdot ^\circ \text{C}} \right)} = 70^\circ \text{C}, \quad T(0) = 80^\circ \text{C}$$

Επιλύουμε, τέλος, την διαφορική με χωρισμό των μεταβλητών

$$5 \frac{dT}{dt} = 70 - T$$

$$\int_{80}^T \frac{dT}{70 - T} = \int_0^t \frac{dt}{5}$$

$$-\ln \left(\frac{70 - T}{-10} \right) = \frac{t}{5}$$

$$T = 70 + 10e^{-t/5} \quad (2.4)$$

Η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας, ως συνάρτηση του χρόνου μετά την επέμβαση του χειριστή, δίνεται στο Σχ. 2-7.

Παρατηρήστε ότι η απόκριση της θερμοκρασία έχει ακριβώς την ίδια μορφή με αυτή της συγκέντρωσης. Βλέπουμε, κατά συνέπεια, ότι με κατάλληλη εφαρμογή βασικών αρχών μπορούμε να προβλέψουμε την απόκριση μιας διεργασίας σε διαταραχές. Η δυνατότητα αυτή είναι, όπως θα δούμε σε μεταγενέστερα κεφάλαια, εξαιρετικά χρήσιμη στο σχεδιασμό ρυθμιστών για την αυτόματη ρύθμιση διεργασιών.