3.1 ΜΕΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν θα δειχθεί η εφαρμογή της τεχνικής της ανάλυσης σε μερικά κλάσματα για την αποτελεσματική αντιστροφή του μετα-σχηματισμού της λύσης.

Παράδειγμα 3.1. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dt} + y = 1$$
$$y(0) = 0$$

Λύση: Μετασχηματίζοντας τη διαφορική εξίσωση λαμβάνουμε

$$sy(s) + y(s) = \frac{1}{s}$$

ή

$$y(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Η θεωρία της ανάλυσης σε μερικά κλάσματα μας επιτρέπει να γράψουμε

$$y(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} \qquad (3.1$$

όπου A και B είναι σταθερές. Από τον Πίνακα 2.1 μπορούμε να υπολογίσουμε τι λύση

$$y(t) = A + Be^{-t} \qquad (3.$$

Έτσι, εάν οι σταθερές A και B ήταν γνωστές η λύση θα είχε βρεθεί. Οι σταθερ A και B πρέπει να ικανοποιούν την Εξ. (3.1). Για να υπολογίσουμε την A πολλ τλασιάζουμε και τα δύο μέλη της Εξ (3.1) με s

$$\frac{1}{s+1} = A + \frac{sB}{s+1} \qquad (3$$

Εξ. (3.3) πρέπει να ισχύει για κάθε s άρα και για s=0, οπότε η Εξ. (3.3) δίν

$$A = 1$$

Για να βρούμε το B πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της Εξ. (3.1) με $s+1$, οπότε

$$\frac{1}{s} = (s+1)\frac{A}{s} + B \tag{3.4}$$

Η Εξ. (3.4) πρέπει να ισχύει για κάθε s άρα και για $s=-1$, οπότε η Εξ. (3.4) δίνει

$$B = -1$$

Η παραπάνω διαδικασία για τον υπολογισμό των σταθερών καλείται ανάπτυγμα Heaviside. Ένας γρήγορος τρόπος για τον υπολογισμό των σταθερών βασίζεται στην νοητή απαλοιφή του παράγοντα που βρίσκεται στον παρονομαστή του κλάσματος κάθε σταθεράς από την έκφραση για την $y(s)$ και στον υπολογισμό της τιμής του πηλίκου για τη ρίζα του συγκεκριμένου παράγοντα του παρονομαστή.

Για να υπολογίσουμε, για παράδειγμα, την τιμή της σταθεράς A απαλείφουμε νοητά τον όρο s στον παρονομαστή της $y(s)$ και υπολογίζουμε το πηλίκο για $s=0$

$$A = \frac{1}{\cancel{s}(\underbrace{s}_{=0}+1)} = 1$$

Για τη σταθερά B απαλείφουμε τον όρο $s+1$ στον παρονομαστή της $y(s)$ και υπολογίζουμε το πηλίκο για $s=-1$

$$B = \frac{1}{\underbrace{s}_{=-1}\cancel{(s+1)}} = \frac{1}{-1} = -1$$

Η παραπάνω γρήγορη τεχνική "δουλεύει" μόνο στην περίπτωση όπου οι ρίζες του παρονομαστή είναι απλές. Η περίπτωση πολλαπλών (επαναλαμβανόμενων) ριζών θα συζητηθεί σε λίγο.

Με γνωστές τις τιμές των σταθερών A και B έχουμε την λύση

$$y(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \tag{3.5}$$

και

$$y(t) = 1 - e^{-t} \tag{3.6}$$

Η ισοδυναμία του δεξιού μέλους με το αριστερό μέλος στην (3.5) μπορεί να πιστοποιηθεί κάνοντας και πάλι τα μερικά κλάσματα ομώνυμα. Το γεγονός ότι η Εξ. (3.6) δίνει πράγματι τη λύση μπορεί να επιβεβαιωθεί με αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση.

ι ρίζες του παρονομαστή είναι $-1-j$ και $-1+j$. Εάν χρησιμοποιήσουμε τις μιγαδι-
ές ρίζες τότε η άλγεβρα γίνεται ιδιαίτερα απαιτητική. Στη συνέχεια παρουσιάζε-
αι μια τεχνική με την οποία αποφεύγονται πολύπλοκες αλγεβρικές πράξεις μετα-
ύ μιγαδικών αριθμών.

άν επιλέξουμε να μην παραγοντοποιήσουμε τον δευτεροβάθμιο όρο τότε θα
ρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη ανάλυση σε μερικά κλάσματα

$$y(s) = \frac{2}{s(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

Παρατηρήστε ότι στο δεύτερο όρο εμφανίζεται ο δευτεροβάθμιος όρος στον
ιρονομαστή. Ο αριθμητής κάθε όρου είναι πολυώνυμο του s βαθμού κατά ένα
κρότερου από τον αντίστοιχο παρονομαστή. Η σταθερά A υπολογίζεται κατά
ι γνωστά

$$A = \left.\frac{2}{s^2+2s+2}\right|_{s=0} = 1$$

ίε αντικατάσταση της τιμής του A έχουμε

$$y(s) = \frac{2}{s(s^2+2s+2)} = \frac{1}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

ολλαπλασιάζοντας με τον παρονομαστή του αριστερού μέλους λαμβάνουμε

$$2 = s^2 + 2s + 2 + Bs^2 + Cs$$

$$(B+1)s^2 + (2+C)s + 2 = 2$$

Με εξίσωση των συντελεστών λαμβάνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις για τα B
αι C

$$s^2: \quad B+1=0 \Rightarrow B=-1$$

$$s^1: \quad 2+C=0 \Rightarrow C=-2$$

αι έτσι

$$y(s) = \frac{2}{s(s^2+2s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+2} \tag{3.9}$$

Για να αντιστρέψουμε το δεύτερο όρο συμπληρώνουμε το τετράγωνο στον παρονομαστή για να καταλήξουμε σε γνωστό όρο. Αυτό επιτυγχάνεται παρατηρώντας ότι $s^2+as+(a/2)^2=(s+a/2)^2$, οπότε

$$\frac{s+2}{\left(s^2+\underbrace{2}_{a}s+\underbrace{1}_{(a/2)^2}\right)+2-1}=\frac{s+2}{(s+1)^2+1}$$

Η μετασχηματισμένη λύση είναι

$$y(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+2}{(s+1)^2+1} \tag{3.10}$$

Μένει ακόμη ένα βήμα πριν αντιστρέψουμε τη μετασχηματισμένη λύση. Από τον Πίνακα 2.1 έχουμε ότι

$$L\{e^{-at}\sin(kt)\}=\frac{k}{(s+a)^2+k^2} \tag{3.11.a}$$

$$L\{e^{-at}\cos(kt)\}=\frac{(s+a)}{(s+a)^2+k^2} \tag{3.11.b}$$

Συγκρίνοντας την Εξ. (3.10) με τις Εξ. (3.11) παρατηρούμε ότι πρέπει να κάνουμε τις ακόλουθες τροποποιήσεις για να εμφανίσουμε τον όρο $(s+1)$ και στον αριθμητή

$$y(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+2}{(s+1)^2+1}=\frac{1}{s}-\frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+1^2}=\frac{1}{s}-\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1^2}-\frac{1}{(s+1)^2+1^2}$$

Με απλή επισκόπηση βλέπουμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση είναι η

$$y(t)=1-e^{-t}(\cos t+\sin t)$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να συνοψίσουμε τα βήματα για την αντιστροφή δευτεροβάθμιων όρων με μιγαδικές ρίζες:

Βήμα 1. Σχηματίζουμε την ανάλυση σε μερικά κλάσματα του δευτεροβάθμιου όρου χρησιμοποιώντας πολυώνυμο πρώτου βαθμού ως προς το s στον αριθμητή.

Βήμα 2. Υπολογίζουμε τις σταθερές όλων των μερικών κλασμάτων πλην του κλάσματος που αντιστοιχεί στον δευτεροβάθμιο όρο.

Βήμα 3. Πολ/ζουμε και τα δύο μέλη της έκφρασης της μετασχηματισμένης λύσης με τον παρονομαστή και εξισώνουμε τους συντελεστές των όρων ίσου βαθμού για να υπολογίσουμε τις σταθερές που αντιστοιχούν στον δευτεροβάθμιο όρο.

Βήμα 4. Συμπληρώνουμε το τετράγωνο για τον δευτεροβάθμιο όρο.

Βήμα 5. Αναδιατάσσουμε τον αριθμητή του δευτεροβάθμιου όρου έτσι, ώστε εάν στον παρονομαστή εμφανίζεται ο όρος $(s+a)^2$, τότε όπου εμφανίζεται το s εμφανίζεται ως $s+a$.

Βήμα 6. Αντιστρέφουμε τους δύο όρους που προκύπτουν σε συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί εξετάζουμε την περίπτωση εμφάνισης πολλαπλών ριζών στον παρονομαστή της $y(s)$.

Παράδειγμα 3.5 Αντιστροφή μετασχηματισμένης με πολλαπλές ρίζες στον παρονομαστή. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^3y}{dt^3}+3\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+y=1$$

$$y(0)=y'(0)=y''(0)=0$$

Λύση Μετασχηματίζοντας την διαφορική εξίσωση λαμβάνουμε

$$y(s)=\frac{1}{s(s^3+3s^2+3s+1)}$$

Η ανάλυση σε απλά κλάσματα είναι (παρατηρήστε ότι ο παρονομαστής έχει μια τριπλή ρίζα στο -1)

$$y(s)=\frac{1}{s(s+1)^3}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+1)^3}+\frac{C}{(s+1)^2}+\frac{D}{(s+1)} \qquad (3.12)$$

Για να υπολογίσουμε το A πολ/ζουμε και τα δύο μέλη με s και υπολογίζουμε το αριστερό μέλος για $s=0$ για να πάρουμε $A=1$. Πολ/ζοντας, στη συνέχεια, και τα δύο μέλη με $(s+1)^3$ λαμβάνουμε

$$\frac{1}{s}=\frac{A}{s}(s+1)^3+B+C(s+1)+D(s+1)^2 \qquad (3.13)$$