ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ ΣΧΟΙΝΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

ΞΑΝΘΗ 1995

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Το παρόν τεύχος αποτελεί μια σύντομη εισαγωγή στη θεωρία των Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους. Απευθύνεται σε φοιτητές κυρίως των Πολυτεχνικών Τμημάτων και μάλιστα στα πρώτα τους χρόνια σπουδών. Για το λόγο αυτό δεν ήταν δυνατό να γίνει αυστηρή παρουσίαση του θέματος η οποία θα απαιτούσε γνώσεις προχωρημένων μαθηματικών όπως Συναρτησιακής Ανάλυσης, Τοπολογίας κ.λ.π.. Μελετώνται κυρίως προβλήματα συνοριακών τιμών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης των γνωστών εξισώσεων της διάδοσης της θερμότητας, της κυματικής εξίσωσης και της εξίσωσης Laplace. Η θεωρία αποσαφηνίζεται με ένα πλήθος λυμένων υποδειγματικών παραδειγμάτων. Για την κατανόηση του κειμένου απαιτούνται μόνο στοιχειώδεις γνώσεις Διαφορικού Λογισμού, Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων και Ειδικών Συναρτήσεων.

Καθηγητής Ι.Χ.Σχοινάς

ΞΑΝΘΗ 1995

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

1. Γενικά. Οι Διαφορικές Εξισώσεις με μερικές παραγώγους (ΔΕΜΠ) είναι εξισώσεις οι οποίες περιέχουν μερικές παραγώγους μιας άγνωστης συνάρτησης. Στην περίπτωση των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από μια μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή. Αντιθέτως στις ΔΕΜΠ η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές. Σ'αυτό το εισαγωγικό μάθημα θα παρουσιάσουμε μια στοιχειώδη μελέτη των ΔΕΜΠ. Η γενική θεωρία των ΔΕΜΠ είναι πέραν του σκοπού αυτού του μαθήματος γιατί απαιτεί γνώσεις και από άλλους κλάδους των μαθηματικών τις οποίες σ'αυτό το επίπεδο δεν κατέχουν οι φοιτητές. Εδώ θα ασχοληθούμε κυρίως με ορισμένες απλές περιπτώσεις Διαφορικών Εξισώσεων πρώτης τάξης και με ορισμένες ειδικές περιπτώσεις Διαφορικών Εξισώσεων δεύτερης τάξης οι οποίες απαντούν συχνά στις εφαρμογές. Στην τελευταία κατηγορία ανήκουν οι κλασσικές εξισώσεις της Μαθηματικής Φυσικής, δηλαδή η εξίσωση της θερμότητας, η εξίσωση Laplace και η κυματική εξίσωση.

Οπως προαναφέρθηκε οι ΔΕΜΠ φαίνεται να διαφέρουν από τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις μόνο στο ότι σ'αυτές η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από περισσότερες της μιας ανεξάρτητες μεταβλητές. Ομως μολονότι η μελέτη των ΔΕΜΠ χρησιμοποιεί συχνά γνωστές μεθόδους από τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, γενικά η θεωρία τους είναι πολύ διαφορετική. Παραδείγματος χάρη, μια από τις απλούστερες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις είναι η γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Η γενική λύση αυτής, όπως γνωρίζετε, εξαρτάται από μια αυθαίρετη σταθερή. Η γενική αυτή λύση μπορεί να παρασταθεί γεωμετρικά από ένα σύνολο καμπύλων του επιπέδου, καθεμιά των οποίων αντιστοιχεί μονοτίμως σε μια τιμή της αυθαίρετης παραμέτρου. Με άλλα λόγια, αν για $x=x_0$ έχουμε $y=y_0$, τότε από το σημείο (x_0,y_0) του επιπέδου διέρχεται μόνο μια λύση της διαφορικής μας εξίσωσης. Οταν, όμως, έχουμε μια πρώτης τάξης ΔΕΜΠ (βλέπε σελ. 5) η θεώρηση είναι τώρα τελείως διαφορετική. Ας υποθέσουμε ότι η άγνωστη συνάρτηση u εξαρτάται από δύο μεταβλητές x και y. Η γενική λύση τώρα μπορεί να παρασταθεί γεωμετρικώς από ένα σύνολο επιφανειών του τριδιάστατου χώρου. Δυστυχώς σ'αυτή την περίπτωση δεν υπάρχουν απλές συνθήκες για να ορίσουν κατά μοναδικό τρόπο μια συγκεκριμένη επιφάνεια λύση της ΔΕΜΠ. Το επόμενο παράδειγμα είναι ακριβώς επάνω στην τελευταία μας παρατήρηση.

<u>Παράδειγμα 1</u>: Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις (α) $u=(x-y)^n$ και (β) $u=f(x-y)$, όπου f αυθαίρετη συνάρτηση, είναι λύσεις της ΔΕΜΠ πρώτης τάξης

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

<u>Λύση</u>: **(α)** $u=(x-y)^n \Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} = n(x-y)^{n-1}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = n(x-y)^{n-1}(-1)$

Συνεπώς $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = n(x-y)^{n-1} - n(x-y)^{n-1} = 0$

(β) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f'(x-y)(1), \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = f'(x-y)(-1).$

Οπότε, $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = f'(x-y) - f'(x-y) = 0.$

Η λύση στην περίπτωση (β) αποσαφηνίζει το γεγονός ότι δεν μπορούμε να αναμένουμε μοναδικότητα της λύσης αν μας δοθεί ένα σημείο του τριδιάστατου χώρου από το οποίο διέρχεται η λύση. Ενα σημείο δεν μπορεί να ορίσει μονότιμα την αυθαίρετη συνάρτηση f. Πιο συγκεκριμένα έστω $f(x-y) = c(x-y)$, όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερή. Αν θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια-λύση περιέχει την αρχή των συντεταγμένων, δηλαδή $u=0$, όταν $x=y=0$, υπάρχει μια απειρία επιφανειών-λύσεων (που αντιστοιχούν στις τιμές της c) οι οποίες διέρχονται από αυτό το σημείο. Η λύση στην περίπτωση (α), εξάλλου, αποσαφηνίζει το γεγονός ότι δεν μπορούμε να αναμένουμε, γενικώς, μοναδικότητα της λύσης αν μας δοθεί μια συγκεκριμένη μερική καμπύλη από την οποία να διέρχεται η λύση. Πιο συγκεκριμένα, αν ζητήσουμε η επιφάνεια-λύση να διέρχεται από την καμπύλη y=x του επιπέδου (με άλλα λόγια αν u=0 όταν y=x), τότε υπάρχει μια απειρία επιφανειών-λύσεων (που αντιστοιχούν στις διάφορες τιμές του n) οι οποίες διέρχονται από την καμπύλη y=x).

Το Παράδειγμα 1 μας δίνει τη δυνατότητα να συμπεράνουμε ότι η μοναδικότητα της λύσης μιας ΔΕΜΠ πρώτης τάξης δεν προσδιορίζεται από την θεώρηση ενός σημείου ή μιας καμπύλης που η λύση να περιέχει. Οι κατάλληλες συνθήκες οι οποίες εξασφαλίζουν τη μοναδικότητα της λύσης, συνήθως, εξαρτώνται από τη μορφή της διαφορικής εξίσωσης.

Ασκήσεις

1) Δείξτε ότι (a) $u=f(x+y)$, όπου f είναι τυχούσα συνάρτηση που έχει συνεχή παράγωγο και (b) $u=(x+y)^n$, όπου n είναι θετικός ακέραιος, είναι λύσεις της ΔΕΜΠ

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Δικαιολογείστε το γιατί υπάρχει απειρία λύσεων οι οποίες διέρχονται από το σημείο (0,0,0).

2) Δείξτε ότι η συνάρτηση $u = f(ax + by)$ όπου f είναι τυχούσα συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και a και b σταθεροί αριθμοί είναι λύση της ΔΕΜΠ

$$b\,\frac{\partial u}{\partial x} - a\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

2. Ορισμοί. Για να απλοποιήσουμε τους συμβολισμούς θα περιορισθούμε μόνο στην περίπτωση όπου η άγνωστη συνάρτηση, την οποία εδώ συμβολίζουμε με u, εξαρτάται μόνο από τις τρεις μεταβλητές x, y, z. Ετσι ορίζουμε την ΔΕΜΠ

$$F(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z,u_{xx},u_{xy},u_{xz},u_{yy},u_{yz},u_{xxx},\dots) = 0. \tag{1}$$

Στην εξίσωση (1) χρησιμοποιήσαμε δείκτες για το συμβολισμό των μερικών παραγωγίσεων, δηλαδή

$$u_z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{xxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \text{ κ.ο.κ..}$$

Υποθέτουμε, βέβαια, ότι η άγνωστη συνάρτηση u έχει παραγώγους όλων των υπαρχόντων τάξεων και οι αντίστοιχες μερικές παραγωγοι είναι ίσες, π.χ., $u_{xy} = u_{yx}$, $u_{xzx} = u_{xyz} = u_{zxx}$ κ.ο.κ..

Οπως και στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, ορίζουμε **τάξη** της ΔΕΜΠ (1) την μεγαλύτερη τάξη της μερικής παραγώγου που εμφανίζεται σ'αυτή. Επιπλέον, η ΔΕΜΠ (1) λέγεται **γραμμική ΔΕΜΠ** αν η F είναι γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών u, u_x, u_y, u_z, u_{xx},..., δηλαδή, η F είναι γραμμικός συνδυασμός με συντελεστές εν γένει συναρτήσεις των x,y,z της άγνωστης συνάρτησης και των μερικών της παραγώγων. Ακόμη, η ΔΕΜΠ (1) λέγεται **ημιγραμμική** αν η F είναι γραμμικός συνδυασμός των παραγώγων της u. Παραθέτουμε μερικές ΔΕΜΠ

(a) $3u_x - u_y = u_z + y^2 - z$, (b) $u_{xx} + u_{yy} = y^2$,

(c) $xyu_{xy} + zu_y - u = 0$, (d) $u_{xy} + 2uu_y + z = 0$.

Η εξίσωση (1) είναι πρώτης τάξης, και οι υπόλοιπες δεύτερης τάξης. Η εξίσωση (d) είναι ημιγραμμική και οι υπόλοιπες γραμμικές.

Θα μελετήσουμε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης. Ετσι η πιο γενική ΔΕΜΠ δεύτερης τάξης έχει τη μορφή

$$a_1u_{xx} + a_2u_{xy} + a_3u_{xz} + a_4u_{yy} + a_5u_{yz} + a_6u_{zz} + a_7u_x + a_8u_y + a_9u_z + a_{10}u = f(x,y,z) \qquad (2)$$

όπου οι συντελεστές a_i i=1,2,...,10 και η f είναι γνωστές συναρτήσεις των x, y, z.

Λύση της ΔΕΜΠ (2) καλούμε μια συνεχή συνάρτηση $u=u(x,y,z)$ με συνεχείς πρώτης και δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους η οποία ικανοποιεί την εξίσωση (2). Π.χ. η συνάρτηση $u=(x-y)^n$ είναι λύση της ΔΕΜΠ $u_x + u_y = 0$, όπως αποδείχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

Αν στην ΔΕΜΠ (2) $f(x,y,z) = 0$ αυτή καλείται **ομογενής** γραμμική ΔΕΜΠ αλλιώς **μη ομογενής** γραμμική ΔΕΜΠ. Ετσι η ΔΕΜΠ (c) που προαναφέραμε είναι ομογενής ενώ οι (a) και (b) μη ομογενείς. Η (d) δεν είναι γραμμική γιατί δεν είναι της γενικής μορφής (2) που προαναφέραμε. Αν οι συντελεστές μιας γραμμικής ΔΕΜΠ είναι σταθεροί αριθμοί λέγεται γραμμική ΔΕΜΠ με **σταθερούς συντελεστές**.

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί μια λύση της ΔΕΜΠ

$$u_x = 3x^2 + y. \tag{3}$$

Λύση: Ολοκληρώνοντας μερικώς ως προς x αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης (3) προκύπτει

$$u = x^3 + xy + c, \tag{4}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερή.

Μερική ολοκλήρωση σημαίνει ολοκληρώνουμε ως προς y θεωρώντας το y σταθερό. Αντίστροφα, τώρα, παρατηρούμε η (4) επαληθεύει την ΔΕΜΠ (3), αν η c θεωρηθεί αυθαίρετη σταθερή. Κατά την επαλήθευση, όμως, βλέπουμε ότι αν, αντί της c, είχαμε μια αυθαίρετη συνάρτηση της μεταβλητής y, έστω $f(y)$, πάλι η

$$u = x^3 + xy + f(y) \tag{5}$$

θα ικανοποιούσε την εξίσωση (3). Το γεγονός αυτό της παρουσίασης αυθαιρέτων συναρτήσεων αντί αυθαίρετων σταθερών στη λύση είναι η κυριότερη διαφορά μεταξύ των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους και των συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

<u>**Παράδειγμα**</u> 2. Βρείτε μια λύση $u = u(x,y,z)$ της ΔΕΜΠ

$$u_{xy} = y + z. \tag{6}$$

<u>**Λύση**</u>: Πρώτα ολοκληρώνουμε μερικώς ως προς y (θεωρώντας τις x και z ως σταθερές) και λαμβάνουμε

$$u_x = y^2 + yz + f_1(x,z),$$

όπου f_1 είναι αυθαίρετη συνάρτηση των x και z. Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε την τελευταία εξίσωση μερικώς ως προς x (θεωρώντας τις y και z ως σταθερές) λαμβάνουμε

$$u = xy^2 + xyz + \int^x f_1(s,z)ds + f_2(y,z),$$

όπου f_2 είναι αυθαίρετη συνάρτηση των y και z. Θέτουμε

$$f(x,z) = \int^x f_1(s,z)ds, \quad g(y,z) = f_2(y,z)$$

και η λύση μας παίρνει τη μορφή

$$u = xy^2 + xyz + f(x,z) + g(y,z), \tag{7}$$

όπου οι συναρτήσεις f και g έχουν συνεχείς πρώτης και δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους ως προς τις μεταβλητές τους.

Τις σχέσεις (5) και (7) όπως και στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, καλούμε **γενική λύση** των εξισώσεων (3) και (6), αντιστοίχως. Η αντικατάσταση των αυθαίρετων συναρτήσεων στις (5) και (7) με συγκεκριμένες συναρτήσεις μας δίνει μια **μερική λύση** των αντίστοιχων ΔΕΜΠ (3) και (6). Ετσι η $u = x^3 + xy + \cos y$ είναι μερική λύση της (3) και η $u = xy^2 + xyz + x^2 + z^2 + e^{yz}$ μερική λύση της (6).

Σε πολύ γενικές γραμμές, θα μπορούσαμε να πούμε ότι **"η**

γενική λύση μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους τάξεως n για μια άγνωστη συνάρτηση εξαρτώμενη από s μεταβλητές περιλαμβάνει n αυθαίρετες συναρτήσεις, κάθε μια των οποίων εξαρτάται από s-1 μεταβλητές" (όχι υποχρεωτικώς το ίδιο σύνολο των s-1 μεταβλητών για κάθε αυθαίρετη συνάρτηση).

Η επαλήθευση της πιο πάνω πρότασης μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τα παραδείγματα της προηγούμενης και αυτής της παραγράφου.

__Ασκήσεις__

1) Αν η άγνωστη συνάρτηση u εξαρτάται μόνο από τις μεταβλητές x και y, βρείτε τη γενική λύση των ΔΕΜΠ

(a) $u_x = x^2 + y$, (b) $u_y = \sin x - \sin y$, (c) $u_{xx} = 0$,

(d) $u_{yy} = \cos y + e^x$ (e) $u_{xy} = \cos y + e^y$.

(Απ. (a) $u = x^3 + xy + f(y)$ (b) $u = y\sin x + \cos y + f(x)$

(c) $u = xf(y) + g(y)$ (d) $u = -\cos y + \frac{1}{2} y^2 e^x + yf(x) + g(x)$

(e) $u = x\sin y + ye^x + f(x) + g(y)$).

2. Αν η άγνωστη συνάρτηση u εξαρτάται από τις τρεις μεταβλητές x,y,z, βρείτε τη γενική λύση των ΔΕΜΠ

(a) $u_{zy} = x$, (b) $u_{xxy} = 0$, (c) $u_{zz} = y + 3x$, (d) $u_{yxz} = 2$.

(Απ. (a) $u = xyz + f(x,z) + g(x,y)$,

(b) $u = f(x,z) + xg(y,z) + h(y,z)$,

(c) $u = \frac{1}{2} yz^2 + \frac{3}{2} xz^2 + zf_1(x,y) + f_2(x,y)$,

(d) $u = 2xyz + f(x,y) + g(y,z) + h(x,z)$).

3. Στη θεωρία ελαστικότητας η συνάρτηση της τάσης Φ του Airy ικανοποιεί τη ΔΕΜΠ

$$\Phi_{xxxx} + 2\Phi_{xxyy} + \Phi_{yyyy} = 0.$$

Ταξινομείστε αυτήν, χρησιμοποιώντας τους ορισμούς αυτής της παραγράφου.

(Απ. 4ης τάξης, γραμμική, ομογενής, με σταθερούς συντελεστές).

3. Η αρχή της υπέρθεσης

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε μια γενική αρχή που πληρεί η λύση μιας γραμμικής ΔΕΜΠ.

Θα θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση της μορφής (2) της Παραγράφου 2. Για την απλούστευση, θα γράψουμε την εξίσωση (2) της Παραγράφου 2 στη σύντομη μορφή

$$A[u] = f. \tag{1}$$

Το σύμβολο A θα καλείται **τελεστής** και ο τρόπος που ο τελεστής A θα εφαρμόζεται πάνω στη συνάρτηση u, δηλαδή το A[u] ορίζεται από το αριστερό μέλος της ΔΕΜΠ (2) της Παραγ.2. Ετσι, γράφουμε,

$$A[u] \equiv a_1(x,y,z)u_{xx} + \ldots + a_{10}(x,y,z)u.$$

Ορισμός 1: Ενας τελεστής A καλείται **γραμμικός τελεστής** αν $A[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1A[u_1] + c_2A[u_2]$ όπου c_1, c_2 σταθερές και κάθε u_1, u_2 είναι συναρτήσεις τέτοιες ώστε $A[u_1]$, $A[u_2]$ και $A[c_1u_1 + c_2u_2]$ να έχουν έννοια.

Ορισμός 2: Η εξίσωση $A[u] = 0$ καλείται **αντίστοιχη ομογενής** της

$A[u] = f$.

Μια πολύ σπουδαία ιδιότητα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους είναι η εξής:

Αρχή της υπέρθεσης: Εστω $f_1, f_2, ..., f_m$ τυχούσες συναρτήσεις και $c_1 c_2, ..., c_m$ τυχούσες σταθερές. Αν A είναι ένας γραμμικός τελεστής και αν $u_1, u_2, ..., u_m$ είναι, αντιστοίχως, λύσεις των εξισώσεων $A[u_1] = f_1$, $A[u_2] = f_2, ..., A[u_m] = f_m$, τότε η $c_1u_1 + ... + c_mu_m$ είναι λύση της εξίσωσης

$$A[u] = c_1f_1 + c_2f_2 + ... + c_mf_m.$$

<u>**Απόδειξη:**</u> Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα του τελεστή A, έχουμε

$$\begin{aligned} A[u] &= A[c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_mu_m] \\ &= c_1A[u_1] + c_2A[u_2] + ... + c_mA[u_m] \\ &= c_1f_1 + c_2f_2 + ... + c_mf_m. \end{aligned}$$

Δύο χρήσιμες συνέπειες της αρχής της υπέρθεσης είναι οι εξής:

(i) Αν $u_1, u_2, ..., u_m$ είναι λύσεις της $A[u] = 0$ και $c_1, c_2, ..., c_m$ είναι σταθερές, τότε η $c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_mu_m$ είναι επίσης λύση της $A[u] = 0$. Δηλαδή τυχόντας γραμμικός συνδυασμός λύσεων της ομογενούς **ΔΕΜΠ** $A(u)=0$ είναι λύση αυτής.

(ii) Αν η u_0 είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης $A[u] = 0$ και u_μ είναι μία μερική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης $A[u] = f$ τότε και $u = u_0 + u_\mu$ είναι λύση της $A[u] = f$. Δηλαδή, **το άθροισμα μιας λύσης της ομογενούς και μιας μερικής λύσης της μη ομογενούς είναι επίσης λύσης της μη ομογενούς εξίσωσης**. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει ως γνωστό απαράλαχτο και για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Το προηγούμενο συμπέρασμα είναι χρήσιμο, μερικές φορές, στην εύρεση της γενικής λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους. Αλλά αυτή η μέθοδος ενώ όπως ξέρουμε εφαρμόζεται απαραίτητα στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους δεν είναι απόλυτα χρήσιμη.

__Παράδειγμα 1__: Αν $u = u(x,y,z)$ να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕΜΠ $u_{xy} = z + x$, θεωρώντας κατάλληλα την αρχή της υπέρθεσης.

__Λύση__: Εστω η αντίστοιχη ομογενής αυτής, $A[u] = u_{xy} = 0$. Οπότε $u_x = \varphi(x,z)$ και $u_0 = x\varphi(x,z) + g(y,z) = f(x,z) + g(y,z)$. Εστω και οι δύο εξισώσεις $A[u] = z$ και $A[u] = x$. Παρατηρούμε επίσης ότι αν $u_1 = xyz$ τότε $A[u_1] = z$ και αν $u_2 = \frac{1}{2} x^2 y$ τότε $A[u_2] = x$. Προφανώς $A[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1A[u_1] + c_2A[u_2]$, δηλαδή ο A είναι γραμμικός τελεστής. Σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης (με $c_1 = c_2 = 1$) έχουμε

$$u_\mu = u_1 + u_2 = xyz + \frac{1}{2} x^2 y$$

είναι μερική λύση της εξίσωσής μας. Συνεπώς η γενική λύση είναι η

$$u = f(x,z) + g(y,z) + xyz + \frac{1}{2} x^2 y.$$

__Ασκήσεις__

1. Να δειχθεί ότι οι επόμενοι τελεστές είναι γραμμικοί

(a) $A[u] = 2u_x - 3u_y + 4u$, (b) $A[u] = u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy}$

(c) $A[u] = u_y - cu_{xx}$, c=σταθ., (d) $A[u] = u_{yy} - c^2u_{xx}$, c=σταθ..

2. Να δειχθεί ότι καθεμιά από τις επόμενες συναρτήσεις είναι γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕΜΠ

(a) $u_0 = yf(x) + g(x)$, $u_{yy} = 0$

(b) $u_0 = yf(x) + g(x) + k(y)$, $u_{xyy} = 0$

(c) $u_0 = yf(x) + g(y)$, $\qquad u_{xy} = 0$.

3. Να δειχθεί ότι η $u_\mu = xy$ είναι μερική λύση της $u_x = y$. Να δοθεί, στη συνέχεια η γενική λύση.
(Απ. $u = f(y) + xy$).

4. Να δειχθεί ότι η $u_\mu = \frac{1}{12} x^2 y^3$ είναι μερική λύση της $u_{xyy} = xy$. Να δοθεί στη συνέχεια η γενική λύση.
(Απ. $u = yf(x) + g(x) + h(y) + \frac{1}{12} x^2 y^3$).

5. Να δειχθεί ότι η $u_\mu = y\sin x$ είναι μερική λύση της $u_y = \sin x$ και $u_\mu = -e^y$ είναι μερική λύση της $u_y = -e^y$. Να δοθεί στη συνέχεια η γενική λύση της $u_y = \sin x - e^y$.
(Απ. $u = y\sin x - e^y + f(x)$).

4. Γραμμικές ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους

Είναι γνωστό ότι θέτοντας σε μια ομογενή γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές ως λύση την $e^{\lambda x}$ καταλήγουμε σε μια πολυωνυμική εξίσωση ως προς λ η οποία καλείται χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης. Την ίδια διαδικασία εφαρμόζουμε και για τις ομογενείς γραμμικές ΔΕΜΠ με σταθερούς συντελεστές. Εστω π.χ. η δεύτερης τάξης εξίσωση

$$a_1 u_{xx} + a_2 u_{xy} + a_3 u_{yy} + a_4 u_x + a_5 u_y + a_6 u = 0 \qquad (1)$$

και ας δοκιμάσουμε αν η συνάρτηση $u = e^{\lambda x + \mu y}$ είναι λύση αυτής. Επειδή $u_x = \lambda e^{\lambda x+\mu y}$, $u_y = \mu e^{\lambda x+\mu y}$, $u_{xx} = \lambda^2 e^{\lambda x+\mu y}$, κ.ο.κ. η (1) δίνει

$$e^{(\lambda x+\mu y)}(a_1\lambda^2 + a_2\lambda\mu + a_3\mu^2 + a_4\lambda + a_5\mu + a_6) = 0.$$

Συνεπώς η $e^{\lambda x+\mu y}$ είναι λύση της (1) αν και μόνο αν, οι λ και μ πληρούν την **χαρακτηριστική εξίσωση** δύο μεταβλητών

$$a_1\lambda^2 + a_2\lambda\mu + a_3\mu^2 + a_4\lambda + a_5\mu + a_6 = 0. \qquad (2)$$

Θα πρέπει εδώ να σημειωθεί η βασική διαφορά που έχει αυτή η χαρακτηριστική εξίσωση από την αντίστοιχη των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, η οποία ήταν αλγεβρική εξίσωση μιας μεταβλητής με ρίζες πεπερασμένου πλήθους πραγματικές ή μιγαδικές, είναι ότι αυτή έχει απειρία λύσεων. Η (2) εδώ εφόσον είναι δύο μεταβλητών είναι γενικώς μια καμπύλη δευτέρου βαθμού του (λ,μ) επιπέδου γένους ελλείψεως, παραβολής, ή υπερβολής (πραγματικής ή φανταστικής) και επομένως υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών (λ,μ) που την ικανοποιούν. Βέβαια αν (λ_1,μ_1) είναι ένα τέτοιο ζεύγος τότε η $e^{\lambda_1 x+\mu_1 y}$ είναι μερική λύση της (1). Ομοίως αν $(\lambda_1,\mu_1),\dots,(\lambda_n,\mu_n)$ είναι n ζεύγη τιμών των λ και μ, από την αρχή της υπέρθεσης, συνεπάγεται ότι και η $\sum_{i=1}^{n} c_i e^{(\lambda_i x+\mu_i y)}$ είναι μερική λύση της (1).

<u>**Παράδειγμα 1**</u>: Βρείτε μια λύση της μορφής $u = e^{\lambda x+\mu y}$ των ΔΕΜΠ

(a) $u_x - 2u_y + u = 0$ (b) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x + 3u_y + 2u = 0.$

<u>**Λύση**</u>: (a) $u = e^{(\lambda x+\mu y)} \Longrightarrow u_x = \lambda e^{(\lambda x+\mu y)}$, $u_y = \mu e^{(\lambda x+\mu y)}$.
Οπότε $u_x - 2u_y + u = e^{(\lambda x+\mu y)}[\lambda - 2\mu + 1] = 0$ ή $\lambda - 2\mu + 1 = 0$ ή $\lambda = 2\mu + 1$.
Συνεπώς $u_\mu = e^{\mu x+(2\mu+1)y}$, για κάθε μ, είναι μερική λύση της εξίσωσης.
(b) Θέτοντας $u = e^{(\lambda x+\mu y)}$ βρίσκουμε

$$\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu + 2 = 0 \text{ ή } (\lambda+\mu)^2 + 3(\lambda+\mu)^2 + 2 = 0 \text{ ή}$$

$$(\lambda+\mu+2)(\lambda+\mu+1) = 0 \text{ ή } \lambda = -\mu - 2 \text{ και ή } \lambda = -\mu - 1.$$

Συνεπώς $u_\mu = e^{(-\mu-2)x+\mu y}$ ή $u_\mu = e^{(-\mu-1)x+\mu y}$ είναι μερικές λύσεις της ΔΕΜΠ.

<u>**Παράδειγμα 3**</u>. Να βρεθεί μια μερική λύση της μη ομογενούς ΔΕΜΠ

$$u_{xx} - 3u_{xy} + 5u_{yy} = 10\ e^{3x-4y},$$

χρησιμοποιώντας μέθοδο ανάλογη εκείνης των συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Λύση: Θέτουμε $u = Ae^{3x+4y}$ και βρίσκουμε $u_x = 3Ae^{3x+4y}$,

$u_y = 4Ae^{3x+4y}$, $u_{xx} = 9Ae^{3x+4y}$ κ.ο.κ.. Οπότε,

$$u_{xx} - 3u_{xy} + 5u_{yy} = e^{3x+4y}[9A - 36A + 80A] = 10e^{3x+4y} \Longrightarrow 53A = 10$$

ή $A = \frac{10}{53}$ και άρα $u_\mu = \frac{10}{53}\ e^{3x+4y}$.

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί μια μερική λύση της μορφής $u = e^{\lambda x+\mu y}$ των επομένων ΔΕΜΠ.

(a) $2u_x + 3u_y - 8u = 0$, (b) $u_x - 2u_y + 5u = 0$.

(Απ. (a) $u = e^{(4-\frac{3}{2}\mu)x+\mu y}$, (b) $u = e^{(2\mu-5)x+\mu y}$).

2. Ομοίως των ΔΕΜΠ

(a) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 2u_x + 2u_y - 3u = 0$

(b) $u_{xx} - u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + 15u_y - 10u = 0$.

(Απ. (a) $u_\mu = e^{(\mu+3)x+\mu y}$ ή $u_\mu = e^{(\mu-1)x+\mu y}$

(b) βρίσκουμε $\lambda^2 - \lambda\mu + \mu^2 - \lambda + 2\mu - 2 = 0$ και για $\mu=1$, $\lambda=1$ οπότε $u_\mu = e^{x+y}$).

3. Να βρεθεί μια μερική λύση της μη ομογενούς ΔΕΜΠ

$$u_{xx} + u_{yy} + u_x - u_y + u = 2x^2 - 3y^2.$$

(Απ. $u_\mu = 2x^2 - 4x - 3y^2 - 6y$).

5. Χωρισμός των μεταβλητών

Μια μέθοδος πολύ συχνά χρησιμοποιούμενη για την εύρεση λύσεων γραμμικών ομογενών ΔΕΜΠ είναι η **μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών**. Στη μέθοδο αυτή προσπαθούμε να γράψουμε τη λύση υπό μορφή γινομένων συναρτήσεων, καθεμιά από τις οποίες εξαρτάται ακριβώς από μια από τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Π.χ. για την ΔΕΜΠ $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ θεωρούμε λύση της μορφής $u = X(x)Y(y)Z(z)$ και στη συνέχεια προσπαθούμε να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις X, Y και Z. Ομοίως για την ΔΕΜΠ $u_{xx} - u_{yy} = 0$ θεωρούμε λύση της μορφής $u = X(x)Y(y)$ και στη συνέχεια προσπαθούμε να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις X και Y. Οι βασικές αρχές και οι απαιτούμενοι υπολογισμοί της μεθόδου περιλαμβάνονται στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί λύση της ΔΕΜΠ $u_{xx} = u_{yy}$ (1) με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών.

Λύση: Θέτουμε $u = X(x)Y(y)$, οπότε $u_x = X'(x)Y(y)$, $u_{xx} = X''(x)Y(y)$, $u_y = X(x)Y'(y)$, $u_{yy} = X(x)Y''(y)$. Η αντικατάσταση των u_{xx} και u_{yy} στη διαφορική εξίσωση (1) δίνει

$$X''(x)Y(y) = X(x)Y''(y) \quad ή \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)}. \tag{2}$$

Αφού ο λόγος $\frac{X''(x)}{X(x)}$ δεν εμπεριέχει την μεταβλητή y, προκύπτει ότι η μεταβολή του y δεν έχει καμία επίδραση σ'αυτόν. Συνεπώς για να ισχύει η ισότητα (2), πρέπει η μεταβολή του y να μην έχει ομοίως επίδραση στην έκφραση $\frac{Y''(y)}{Y(y)}$. Παρομοίως, η μεταβολή του x δεν έχει επίδραση στο λόγο $\frac{X''(x)}{X(x)}$. Το τελικό επομένως συμπέρασμα είναι ότι για να ισχύει η ισότητα (2), οι λόγοι $\frac{X''(x)}{X(x)}$ και $\frac{Y''(y)}{Y(y)}$ πρέπει να είναι σταθερές. Πράγματι, οι λόγοι αυτοί πρέπει να ισούνται με την ίδια σταθερή, λ. Οπότε

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \tag{3}$$

και

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0. \tag{4}$$

$$X(x) = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, & \lambda>0 \\ c_1 + c_2 x, & \lambda=0 \\ c_1 \cos\sqrt{-\lambda}\, x + c_2 \sin\sqrt{-\lambda}\, x, & \lambda<0, \end{cases}$$

$$Y(y) = \begin{cases} c_3 e^{\sqrt{\lambda}y} + c_4 e^{-\sqrt{\lambda}y}, & \lambda>0 \\ c_3 + c_4 y, & \lambda=0 \\ c_3 \cos\sqrt{-\lambda}\, y + c_4 \sin\sqrt{-\lambda}\, y, & \lambda<0. \end{cases}$$

Επομένως η λύση της διαφορικής μας εξίσωσης θα είναι η

$$u = X(x)Y(y) = \begin{cases} (c_1 e^{\sqrt{\lambda}y} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}y})(c_3 e^{-\sqrt{\lambda}y} + c_4 e^{-\sqrt{\lambda}y}), & \lambda>0 \\ (c_1 + c_2 x)(c_3 + c_4 y), & \lambda=0 \\ (c_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{-\lambda}x)(c_3 \cos\sqrt{-\lambda}y + c_4 \sin\sqrt{-\lambda}y), & \lambda<0. \end{cases}$$

Χωρίς επιπλέον πληροφορία δεν υπάρχει τρόπος να βρούμε την τιμή του λ, οπότε και θα επιλέγαμε την ακριβή μορφή της λύσης. Ομως, σε πολλές εφαρμογές υπάρχουν άλλες συνθήκες τις οποίες η λύση πρέπει να πληρεί. Αυτές οι συνθήκες συνήθως μας προσδιορίζουν την τιμή του λ και κατά συνέπεια και τη μορφή της λύσης.

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί λύση με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών της ΔΕΜΠ

$$3u_x - 2u_y - 5u_z = 0.$$

Λύση: Εστω $u = X(z)Y(y)Z(z)$. Τότε,

$$u_x = X'(x)Y(y)Z(z), \quad u_y = X(x)Y'(y)Z(z), \quad u_z = X(x)Y(y)Z'(z).$$

Η αντικατάσταση αυτών στη διαφορική εξίσωση δίνει

$$3X'(x)Y(y)Z(z) - 2X(x)Y'(y)Z(z) - 5X(x)Y(y)Z'(z) = 0.$$

Υποθέτοντας ότι $u \neq 0$ και διαιρώντας με $u = X(x)Y(y)Z(z)$ λαμβάνουμε

$$\frac{3X'(x)}{X(x)} = \frac{2Y'(y)}{Y(y)} + \frac{5Z'(z)}{Z(z)}. \tag{5}$$

Με τον ίδιο συλλογισμό του Παραδείγματος 1, συμπεραίνουμε ότι η μόνη περίπτωση να ισχύει η (5) είναι ότι αμφότερα τα μέλη είναι ίσα με λ. Δηλαδή

$$\frac{3X'(x)}{X(x)} = \lambda, \tag{6}$$

$$\frac{2Y'(y)}{Y(y)} + \frac{5Z'(z)}{Z(z)} = \lambda. \tag{7}$$

Η διαφορική εξίσωση (6) έχει λύση $X(x) = c_1 e^{(\lambda/3)x}$. Η (7) μπορεί να γραφεί

$$\frac{2Y'(y)}{Y(y)} = \lambda - \frac{5Z'(z)}{Z(z)}. \tag{8}$$

Με τον ίδιο πάλι συλλογισμό για να ισχύει η (8), πρέπει

$$\frac{2Y'(y)}{Y(y)} = \mu, \tag{9}$$

$$\lambda - \frac{5Z'(z)}{Z(z)} = \mu, \tag{10}$$

όπου μ είναι νέα παράμετρος. Η (9) έχει λύση $Y(y) = c_2 e^{(\mu/2)y}$ και η (10) $Z(z) = c_3 e^{[(\lambda-\mu)/5]z}$. Συνεπώς η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$u = (c_1 e^{(\lambda/3)x})(c_2 e^{(\mu/2)y})(c_3 e^{[(\lambda-\mu)/5]z}) =$$

$$= ke^{(\lambda/3)x + (\mu/2)y + [(\lambda-\mu)/5]z}.$$

Παρατηρήσεις:

1. Στη μέθοδο "χωρισμού των μεταβλητών" δεν είναι απαραίτητο, όπως στα παραδείγματα 1,2, οι **ΔΕΜΠ** να είναι με σταθερούς συντελεστές.

2. Η μέθοδος του "χωρισμού των μεταβλητών" δεν είναι εφαρμόσιμη σε όλες τις γραμμικές ΔΕΜΠ.

Στη συνέχεια δίνουμε ένα παράδειγμα όπου η μέθοδος "χωρισμού των μεταβλητών" δεν εφαρμόζεται.

Παράδειγμα 3: Να δειχθεί ότι δεν εφαρμόζεται η μέθοδος "χωρισμού των μεταβλητών" στην εξίσωση

$$u_{xy} + u_{xx} + u = 0.$$

Λύση: Ας δοκιμάσουμε αν υπάρχει λύση της μορφής $u = X(x)Y(y)$. Τότε $u_x = X'(x)Y(y)$, $u_{xy} = X'(x)Y'(y)$, $u_{xx} = X''(x)Y(y)$ και άρα η ΔΕΜΠ δίνει

$$X'(x)Y'(y) + X''(x)Y(y) + X(x)Y(y) = 0.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι με κανένα τρόπο, αλγεβρικές πράξεις να μετασχηματίσουν την τελευταία εξίσωση στη μορφή $P(x) = Q(x)$. Συνεπώς η μέθοδος "χωρισμού των μεταβλητών" δεν εφαρμόζεται.

Το επόμενο είναι ένα παράδειγμα από την Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία.

Παράδειγμα 4: Οταν μια επιμήκης χάλκινη ράβδος γειωθεί και διεγερθεί με ηλεκτρικό ρεύμα, τότε η διαφορική εξίσωση που διέπει την ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι η

$$rH_{rr} + H_r = \frac{4\pi r}{\rho} H_t,$$

όπου t είναι ο χρόνος, r η απόσταση από τον άξονα της ράβδου και ρ σταθερή χαρακτηριστική του χαλκού.

(a) Να τεθεί $H = R(r)T(t)$ και να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις για τις R και T. (Να τεθεί $-\lambda$ αντί λ).

(b) Να βρεθεί η T.

(c) Να δειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση για την R είναι ειδική μορφή της διαφορικής εξίσωσης του Bessel.

Λύση: (a) Θέτουμε $H = R(r)T(t)$. Οπότε $H_r = R'T$, $H_{rr} = R''T$, $H_t = RT'$. Αντικαθιστούμε τις H_r, H_{rr}, H_t στη διαφορική εξίσωση και βρίσκουμε

$$rR''T + R'T = \frac{4\pi r}{\rho} RT' \quad \text{ή} \quad \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} = \frac{4\pi}{\rho}\frac{T'}{T} = -\lambda.$$

$$\text{Αρα} \quad T' + \frac{\lambda\rho}{4\pi} T = 0, \qquad rR'' + R' + \lambda rR = 0.$$

(b) Η πρώτη από τις προηγούμενες διαφορικές εξισώσεις δίνει,

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\lambda\rho}{4\pi} dt \quad \text{ή} \quad \text{Ln } T = -\frac{\lambda\rho}{4\pi} t + c_1.$$

Οπότε, $T = ce^{-(\lambda\rho/4\pi)t}$.

(c) Θέτουμε $r = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} x$ και βρίσκουμε

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dx}\frac{dx}{dr} = \sqrt{\lambda}\,\frac{dR}{dx} \quad \text{και} \quad \frac{d^2R}{dr^2} = \sqrt{\lambda}\,\frac{d^2R}{dx^2}\frac{dx}{dr} = \lambda\,\frac{d^2R}{dx^2}.$$

Τελικώς, η διαφορική εξίσωση, μετά την αντικατάσταση των παραγώγων της R ως r με εκείνες ως προς x, παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, x \left[\lambda\, \frac{d^2R}{dx^2}\right] + \sqrt{\lambda}\,\frac{dR}{dx} + \lambda \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, x\right] R = 0$$

ή

$$x\,\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{dR}{dx} + xR = 0$$

η οποία είναι η διαφορική εξίσωση Bessel με n=0.

Το επόμενο παράδειγμα είναι από την Κβαντομηχανική.

Παράδειγμα 5: Ως γνωστό η Κυματική εξίσωση του Schrodinger της Κβαντομηχανικής, είναι η

$$\frac{ih}{2\pi}\,\Phi_t = -\,\frac{h^2}{8m\pi^2}\,(\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}) + V(x,y,z)\Phi.$$

(a) Να μετασχηματιστεί η εξίσωση θέτοντας $\Phi(x,y,z,t) = e^{-(i2\pi Et)/h}\,u(x,y,z)$, όπου E σταθερή.

(b) Θεωρούμε V=0 οπότε έχουμε την εξίσωση του Helmholtz. Να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις των x, y, z με τη μέθοδο "χωρισμού των μεταβλητών".

Λύση: (a) Εχουμε $\Phi_t = -\,\frac{i2\pi E}{h}\, e^{-(i2\pi Et)/h}\, u$ και

$$\Phi_{xx} = e^{-(i2\pi Et)/h} u_{xx}, \quad \Phi_{yy} = e^{-(i2\pi Et)/h} u_{yy},$$

$$\Phi_{zz} = e^{-(i2\pi Et)/h} u_{zz}.$$

Αντικαθιστώντας τις Φ_t, Φ_{xx}, Φ_{yy}, Φ_{zz} και απλοποιώντας, βρίσκουμε

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{8m\pi^2}{h^2} (E - V(x,y,z)u = 0.$$

(b) Αν $V = 0$ τότε η διαφορική εξίσωση γίνεται η

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{8m\pi^2 E}{h^2} u = 0.$$

Αν $u = X(x)Y(y)Z(z)$, $u \neq 0$

$$u_{xx} = \frac{X''}{X} u, \quad u_{yy} = \frac{Y''}{Y} u, \quad u_{zz} = \frac{Z''}{Z} u,$$

και άρα

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + \frac{8m\pi^2 E}{h^2} = 0$$

ή

$$\frac{X''}{X} \; \frac{8m\pi^2 E}{h^2} = - \frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = \lambda.$$

Αρα,

$$X'' + \left(\frac{8m\pi^2 E}{h^2} - \lambda \right) X = 0, \quad \frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = \lambda, \quad \frac{Y''}{Y} + \lambda = - \frac{Z''}{Z}.$$

Οπότε

$$\frac{Y''}{Y} + \lambda = \mu, \qquad -\frac{Z''}{Z} = \mu.$$

Συνεπώς, τελικώς

$$X'' + \left(\frac{8m\pi^2 E}{h^2} - \lambda\right)X = 0, \quad Y'' + (\lambda-\mu)Y = 0, \quad Z'' + \mu Z = 0.$$

Για τις γραμμικές ομογενείς ΔΕΜΠ με σταθερούς συντελεστές της μορφής

$$a_1 u_{xx} + a_2 u_{xy} + a_3 u_{yy} = 0 \tag{11}$$

η $u = f(y + \lambda x)$ όπου f τυχούσα συνάρτηση με συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης είναι λύση αυτής, τότε μόνο αν

$$a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \tag{12}$$

Πράγματι, $u_x = \lambda f'$, $u_{xx} = \lambda^2 f''$, $u_{xy} = \lambda f''$, $u_y = f'$, $u_{yy} = f''$. Συνεπώς $u = f(x + \lambda x)$ λύση της (11) $\Longleftrightarrow$

$$(a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3)f'' = 0 \Longleftrightarrow a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Συνεπώς, (i) αν λ_1, λ_2 ρίζες της (12) και $\lambda_1 \neq \lambda_2$, τότε η γενική λύση της (11) είναι η

$$u = f_1(y + \lambda_1 x) + f_2(y + \lambda_2 x).$$

(ii) Αν $\lambda_1 = \lambda_2$ ρίζες της (12), τότε η γενική λύση της (11) είναι η

$$u = f_1(y + \lambda_1 x) + x\, f_2(y + \lambda_1 x).$$

Ορισμός: Η ΔΕΜΠ

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = 0 \qquad (13)$$

καλείται **υπερβολική** αν $b^2 - ac > 0$, **παραβολική** αν $b^2 - ac = 0$ και **ελλειπτική** αν $b^2 - ac < 0$.

Εξάλλου η χαρακτηριστική εξίσωση της ΔΕΜΠ είναι, όπως είδαμε στην Παραγ.4, καμπύλη δευτέρου βαθμού στο (λ, μ) επίπεδο, γένους υπερβολής, παραβολής ή έλλειψης, αντίστοιχα αν $b^2 - ac > 0$, $b^2 - ac = 0$ και $b^2 - ac < 0$.

Παράδειγμα 6: Αφού ταξινομηθεί η ΔΕΜΠ

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 12u_{yy} = 0 \qquad (14)$$

να βρεθεί η γενική λύση αυτής.

Λύση: Εδώ $a=1$, $b=3$, $c=12$. Συνεπώς, $b^2 - ac = 9-12 = -3 < 0$. Αρα η ΔΕΜΠ είναι ελλειπτική.

Επειδή $\lambda^2 + 6\lambda + 12 = 0$ και $\lambda_{1,2} = -3 \pm i\sqrt{3}$ έχουμε ότι $u = f_1[y + (-3 + i\sqrt{3})x] + f_2[y + (-3 + i\sqrt{3})x]$.

Ασκήσεις

1. Να δειχθεί ότι αν θέσουμε $u = X(x)Y(y)$ σε καθεμιά από τις επόμενες ΔΕΜΠ οι μεταβλητές διαχωρίζονται και στη συνέχεια βρείτε τις διαφορικές εξισώσεις που πληρούν οι μεταβλητές x και y.

(a) $4u_x + 3u_y = 0$, (b) $u_x + u_y + u = 0$, (c) $u_{xx} + u_{yy} + u_x + u_y = 0$,

(d) $u_{xx} - u_{yy} - u_x + u_y = 0$, (e) $5u_{xx} - 6u_{yy} + u_x - 3u_y + u = 0$,

(Απ. (a) $4X'-\lambda X=0$, $3Y'+\lambda Y=0$ (b) $X'+(1-\lambda)X=0$, $Y'+\lambda Y=0$
(c) $X''+X'-\lambda X=0$, $Y''+Y'+\lambda Y=0$, (d) $X''-X'-\lambda X=0$, $Y''-Y'-\lambda Y=0$,
(e) $5X''+X'+(1-\lambda)X=0$, $6Y''+3Y'-\lambda Y=0$).

2. Ομοίως για τις ΔΕΜΠ:

(a) $u_y + 2u_y - 2u_z = 0$, (b) $u_x + u_y + u_z + u = 0$,

(c) $u_y - u_{xx} - u_{zz} = 0$, (d) $2u_{xx} - u_{yy} + u_{zz} + u = 0$.

(Απ. (a) $X' - \lambda X = 0$, $2Y' - \mu Y = 0$, $2Z' - (\lambda+\mu)Z = 0$

(b) $X''+(1-\lambda)X = 0$, $Y' + \mu Y = 0$, $Z' + (\lambda-\mu)Z = 0$

(c) $X'' - \lambda X = 0$, $Y' + \lambda Y = 0$, $Z'' + (\lambda-\mu)Z = 0$

(d) $2X''+(1-\lambda)X = 0$, $Y'' + \mu Y = 0$, $Z'' + (\lambda-\mu)Z = 0$).

3. Ταξινομείστε καθεμιά από τις επόμενες ΔΕΜΠ και βρείτε τη γενική λύση τους.

(a) $u_{xx} + 20u_{xy} + 64u_{yy} = 0$, (b) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$,

(c) $6u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0$.

(Απ. (a) $u = f_1(y-4y) + f_2(y-16x)$,

(b) $u = f_1(y-x) + x\, f_2(y-x)$

(c) $u = f_1\left[y + \left(\frac{-2+ i\sqrt{2}}{6}\right)x\right] + f_2\left[y + \left(\frac{-2+ i\sqrt{2}}{6}\right)x\right]$.)

4. Η μη γραμμική ΔΕΜΠ παρουσιάζεται στη διάδοση του ήχου στην Ακουστική

$$(u_x)^{n+1}u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

όπου a είναι η ταχύτητα του ήχου στο μέσον διάδοσης. Να βρεθούν οι εξισώσεις που πληρούν τα X και Y αν $u = X(x)Y(y)$.

(Απ. $X'' - \frac{\lambda}{a^2}(X')^{n+1} = 0, \quad T^n T'' = \lambda.$)

5. Η ΔΕΜΠ

$$u_{xy} - \frac{a}{x+y}(u_x + u_y) = 0$$

είναι η εξίσωση μιας διάστασης μιας ισεντροπικής ροής ενός ασυμπίεστου ρευστού, όπου a σταθερή εξαρτώμενη από το ρευστό. Να λυθεί με τη μέθοδο "χωρισμού των μεταβλητών".
(Απ. $u = kc(\lambda+x)^a(y-\lambda)^a.$)

6. Να βρεθεί λύση της ΔΕΜΠ $(u_x)^2 + (u_y)^2 = 1$ θέτοντας $u = X(x) + Y(y)$.

(Απ. $u = \sqrt{\lambda}\, x + \sqrt{1-\lambda}\, y + c, \quad 0<\lambda<1.$)

6. Προβλήματα αρχικών - συνοριακών τιμών

Στις επόμενες παραγράφους θα μελετήσουμε προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών τα οποία, στη γενική τους μορφή, παρουσιάζονται ως εξής:

Πρόβλημα: 'Εστω η ΔΕΜΠ δεύτερης τάξης

$$a_1(x,y)u_{xx} + a_2(x,y)u_{xy} + a_3(x,y)u_{yy} + a_4(x,y)u_x + a_5(x,y)u_y + a_6(x,y)u = F(x,y), \quad 0<x<\ell,\ 0<y<m. \qquad (1)$$

Ζητούμε λύση u=u(x,y) της ΔΕΜΠ (1) που να πληρεί τις συνθήκες:

$$A_1u(0,y) + A_2u_x(0,y) = f_1(y), \qquad 0<y<m, \qquad (2)$$

$$A_3u(\ell,y) + A_4u_x(\ell,y) = f_2(y), \qquad 0<y<m, \qquad (3)$$

$$A_5u(x,0) = f_3(x), \qquad 0<x<\ell, \qquad (4)$$

$$A_6u_y(x,0) = f_4(x), \qquad 0<x<\ell, \qquad (5)$$

όπου a_i, $i=1,2,\ldots,6$, $F(x,y)$, f_i, $i=1,\ldots,4$ είναι γνωστές συναρτήσεις και A_i, $i=1,\ldots,6$, ℓ, m είναι σταθερές.

Ο ℓ ή ο m ή αμφότεροι μπορεί να είναι και άπειρο. Το προηγούμενο πρόβλημα (1)-(5) αναφέρεται ως **πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών**. Οι συνθήκες (2) και (3) λέγονται **συνοριακές συνθήκες** και οι (4) και (5) **αρχικές συνθήκες**. Σε ορισμένα προβλήματα μία ή περισσότερες συνοριακές συνθήκες ή μία ή περισσότερες αρχικές συνθήκες μπορεί να μην υπάρχουν.

7. Η κυματική εξίσωση

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τρεις τυπικές μορφές ΔΕΜΠ της Μαθηματικής Φυσικής, την κυματική εξίσωση, την εξίσωση διάδοσης της θερμότητας και την εξίσωση Laplace.

'Εστω χορδή, η οποία αποτελείται από πλήρως εύκαμπτο υλικό, πακτωμένη στα άκρα της $x=0$ και $x=\ell$. Τότε (βλέπε βιβλίο, "Ειδικά Κεφάλαια Ανωτέρων Μαθηματικών" σελ. 233) η κατακόρυφη απομάκρυνση $u=u(x,t)$ η οποία θεωρείται μικρή, είναι συνάρτηση του μήκους της x και του χρόνου t, επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, \qquad 0<x<\ell, \quad t>0 \qquad (1)$$

όπου $c^2=T/\rho$, T η σταθερή δύναμη που οφείλεται στο τέντωμα της χορδής και ρ η μάζα της ανά μονάδα μήκους.

Για ευνόητους λόγους η εξίσωση (1) αναφέρεται συχνά ως η εξίσωση της **παλλόμενης χορδής**. Συνηθίζεται, επίσης, να καλείται **κυματική εξίσωση μιας διάστασης**. Ας σημειωθεί, επίσης, ότι σύμφωνα με την ταξινόμηση (σελ.22) είναι διαφορική εξίσωση **υπερβολικού τύπου**.

'Ενα τυπικό πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών για την κυματική εξίσωση μιας διάστασης είναι το εξής:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad 0<x<\ell, \quad t>0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0<x<\ell, \tag{3}$$

$$u_t(x,0) = g(x), \qquad 0<x<\ell, \tag{4}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad t>0, \tag{5}$$

$$u(\ell,t) = 0, \qquad t>0. \tag{6}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι αν οι f και g πληρούν τις συνθήκες Dirichlet (βλ. Ειδικά Κεφάλαια Ανωτέρων Μαθηματικών σελ. 118-119) το πρόβλημα (2)-(6) έχει μοναδική λύση.

Οι συνοριακές συνθήκες (5) και (6) όπου $u=0$ για $x=0$ και $x=\ell$, λέγονται **ομογενείς συνοριακές συνθήκες**. Στην περίπτωση αυτή τα άκρα της χορδής $x=0$ και $x=\ell$ είναι σταθερά. Η αρχική συνθήκη (3) δίνει την αρχική θέση της χορδής, ενώ η αρχική συνθήκη (4) δίνει την αρχική ταχύτητα.

Στην περίπτωση ομογενών συνοριακών συνθηκών οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός λύσεων που πληρούν τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες θα πληρεί επίσης τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

Η πιο συνηθισμένη μέθοδος λύσεως του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών, είναι η μέθοδος του "χωρισμού των μεταβλητών" σε συνδυασμό με τις "Σειρές Fourier" (βλ. Ειδ. Κεφ. Ανωτ. Μαθ. σελ. 113). Για το σκοπό αυτό, ως γνωστό, υποθέτουμε ότι η λύση της εξίσωσης (2) γράφεται στη μορφή

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{7}$$

όπου X,T είναι άγνωστες συναρτήσεις που ζητούμε να τις προσδιορίσουμε. Αντικαθιστούμε την u(x,t) από την (7) στη (2) και λαμβάνουμε

$$XT'' - c^2X''T = 0 \quad \text{και} \quad \frac{T''}{T} = \frac{c^2X''}{X} = \lambda,$$

όπου λ είναι σταθερή. Συνεπώς, το πρόβλημά μας χωρίζεται σε δύο προβλήματα:

$$\frac{T''}{T} = \lambda \tag{8}$$

$$\frac{c^2X''}{X} = \lambda. \tag{9}$$

Η συνθήκη (5) τώρα γίνεται $u(0,t) = X(0)T(t) = 0$ για όλα τα $t>0$, οπότε $X(0) = 0$. Ομοίως, από τη συνθήκη (6) προκύπτει $X(\ell) = 0$. Από την (9) η συνάρτηση X, συνεπώς, είναι λύση του προβλήματος ιδιοτιμών:

$$X'' - \frac{\lambda}{c^2}\, x = 0, \qquad x(0) = x(\ell) = 0.$$

Επειδή οι λύσεις $X = X(x)$ είναι φραγμένες η τελευταία διαφορική εξίσωση έχει λύση

$$X(x) = c_1\cos\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}\, x + c_2\sin\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}\, x$$

και λόγω των συνοριακών συνθηκών

$$X(0) = c_1 = 0 \qquad \text{και άρα} \quad X(\ell) = c_2 \sin \frac{\sqrt{-\lambda}}{c}\,\ell = 0 \implies$$

$$\implies \frac{\sqrt{-\lambda}}{c}\,\ell = n\pi \implies \lambda = -\,\frac{n^2\pi^2c^2}{\ell^2}, \qquad n=1,2,\ldots\;, \tag{10}$$

που είναι οι ιδιοτιμές του προβλήματος. Συνεπώς οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \qquad n=1,2,\ldots\;. \tag{11}$$

Με την τιμή του λ που δίνεται από την (10) η εξίσωση (8) παίρνει τη μορφή

$$T'' + \frac{n^2\pi^2c^2}{\ell^2}\,T = 0$$

και όθεν

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi c}{\ell}\,t + b_n \sin \frac{n\pi c}{\ell}\,t, \quad n=1,2,\ldots\;, \tag{12}$$

όπου a_n, b_n είναι αυθαίρετες σταθερές.

Επομένως το γινόμενο $X_n(x)T_n(t)$ είναι λύση της εξίσωσης (2) που ικανοποιεί τις συνθήκες (5) και (6). Μένει, ακόμη, να επιδιώξουμε να πληρούνται και οι συνθήκες (3) και (4). Ας θεωρήσουμε τις συνθήκες (3). Εχουμε $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$, με το n απροσδιόριστο. Αλλά

$$u(x,0) = f(x) \implies X_n(x)T_n(0) = f(x) \implies \left(\sin \frac{n\pi x}{\ell}\right) a_n = f(x). \tag{13}$$

Η μόνη περίπτωση ώστε να ισχύει η (13) είναι η $f(x) = A\sin \frac{n\pi x}{\ell}$ όπου A σταθερή. Με αυτή την τιμή της f η συνθήκη (4) επιβάλλει να ισχύει η

$$\left(\sin \frac{n\pi x}{\ell}\right)\left(\frac{n\pi c}{\ell}\,b_n\right) = g(x) \tag{14}$$

που μας υποχρεώνει να θεωρήσουμε την $g(x) = B\sin \frac{n\pi x}{\ell}$ όπου B σταθερή.

Οι συνθήκες (13) και (14) περιορίζουν αρκετά τη μορφή των συναρτήσεων f και g. Για το λόγο αυτό θεωρούμε μια άλλη προσέγγιση.

Αφού το γινόμενο $X_n(x)T_n(t)$ είναι λύση της (2) για κάθε n, (n=1,2,...) και αφού η εξίσωση (2) είναι γραμμική ΔΕΜΠ, είναι λογικό να αναμένουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$ είναι λύση της (2) υπό την προϋπόθεση ότι αυτή θα συγκλίνει. Θεωρούμε λοιπόν την

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t), \tag{15}$$

όπου η X_n δίνεται από την (11) και η T_n από την (12), η οποία πληρεί την εξίσωση (2) και προφανώς και τις συνθήκες (5) και (6). Για να ικανοποιεί επίσης η $u(x,t)$ και τη συνθήκη (3) πρέπει

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = f(x),$$

η οποία (βλ. Ειδ. Κεφ. Ανωτ. Μαθ. σελ. 134) είναι το ημιτονικό ανάπτυγμα Fourier της $f(x)$ στο διάστημα $0 \le x \le \ell$.

Συνεπώς οι συντελεστές a_n δίνονται από τη σχέση

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx. \tag{16}$$

Ακριβώς, ομοίως, η συνθήκη (4) θα ικανοποιείται αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi c}{\ell} b_n\right) \sin \frac{n\pi x}{\ell} = g(x)$$

οπότε,

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx. \tag{17}$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο εξής συμπέρασμα: Η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (2)-(6) της παλλόμενης χορδής, έχει λύση την

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{\ell} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{\ell} t \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \tag{18}$$

όπου οι συντελεστές a_n και b_n προσδιορίζονται από τις σχέσεις (16) και (17), αντίστοιχα.

Ενα ανάλογο πρόβλημα όπως το πρόβλημα (2)-(6) είναι εκείνο όπου οι ομογενείς συνοριακές συνθήκες (5) και (6) αντικαθιστούνται με τις μη ομογενείς συνθήκες

$$u(0,t) = A, \quad t>0 \tag{5'}$$

$$u(\ell,t) = B, \quad t>0 \tag{6'}$$

όπου Α, Β σταθερές.

Θα δείξουμε ότι αν

$$v(x,t) = u(x,t) + \left(\frac{x-\ell}{\ell}\right)A - \frac{x}{\ell} B \tag{19}$$

τότε η συνάρτηση v είναι λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0, \qquad 0<x<\ell, \quad t>0, \tag{20}$$

$$v(x,0) = f(x) + \left(\frac{x-\ell}{\ell}\right)A - \frac{x}{\ell} B, \qquad 0<x<\ell, \tag{21}$$

$$v_t(x,0) = g(x), \qquad 0<x<\ell \tag{22}$$

$$v(0,t) = 0, \qquad t>0 \tag{23}$$

$$v(\ell,t) = 0, \qquad t>0. \tag{24}$$

Απόδειξη: Προφανώς από την (19) έχουμε ότι $v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0$ και

$$v(x,0) = u(x,0) + \left(\frac{x-\ell}{\ell}\right)A - \frac{x}{\ell} B = f(x) + \left(\frac{x-\ell}{\ell}\right)A - \frac{x}{\ell} B$$

δηλαδή η (21) ισχύει. Ομοίως, από την (19),

$$v_t(x,t) = u_t(x,t) \Longrightarrow v_t(x,0) = u_t(x,0) = g(x),$$

δηλαδή η (22) ισχύει. Ομοίως, από την (5′), (6′) και (19) προκύπτει $v(0,t) = u(0,t) - A = A - A = 0$, $v(\ell,t) = u(\ell,t) - B = B - B = 0$, δηλαδή ισχύουν και οι (23) και (24).

Είναι προφανές ότι ένας γραμμικός συνδυασμός λύσεων, που πληρούν τις ίδιες μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες, δεν πληρούν τις ίδιες αυτές συνοριακές συνθήκες.

Παράδειγμα 1: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (2)-(6) αν $c=1$, $\ell=1$, $f(x) = x(1-x)$, $g(x) = 0$.

Λύση: Επειδή $g(x) = 0$, $b_n = 0$ και θα χρειασθεί μόνο να υπολογίσουμε τον συντελεστή a_n. Αφού $c=1$, $\ell=1$, $f(x) = x(1-x)$, από τη σχέση (16), εφαρμόζοντας διαδοχικά τη μέθοδο ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, έχουμε

$$a_n = 2\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\,dx = -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x(1-x)(\cos n\pi x)'dx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\Big[x(1-x)\cos n\pi x\Big]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (1-2x)\cos n\pi x\,dx =$$

$$= -\frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 (1-2x)(\sin n\pi x)'dx =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\Big[(1-2x)(\sin n\pi x)\Big]_0^1 + \frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin n\pi x\, dx =$$

$$= -\frac{4}{n^3\pi^3}\Big[(\cos n\pi x\Big]_0^1 =$$

$$= -\frac{4}{n^3\pi^3}\Big[(-1)^n - 1\Big] =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = \text{άρτιος} \\ \dfrac{8}{n^3\pi^3}, & n = \text{περιττός}. \end{cases}$$

Αρα, από την (18), έχουμε, ότι η ζητούμενη λύση είναι η

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^3\pi^3} \cos (2n-1)\,\pi t \sin n\pi x.$$

Παράδειγμα 2: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (2), (3), (4), (5′), (6′) με $c=1$, $\ell=1$, $f(x) = x(1-x)$, $g(x) = 0$, $A=3$ και $B=0$.

Λύση: Το πρόβλημα αυτό είναι το ίδιο με το προηγούμενο αλλά με μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

Λύση: Για τη συνάρτηση v:

$$a_n = 2\int_0^1 \left[f(x) + \left(\frac{x-1}{1}\right)3\right]\sin n\pi x\, dx = 2\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\, dx +$$

$$+ 6\int_0^1 (x-1)\sin n\pi x\, dx.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα το υπολογίσαμε στο Παράδειγμα 1. Οπότε

$$6\int_0^1 (x-1)\sin n\pi x\, dx = \frac{6}{n\pi}\int_0^1 (x-1)(\cos n\pi x)'\, dx =$$

$$= -\frac{6}{n\pi}\Big[(x-1)\cos n\pi x)\Big]_0^1 + \frac{6}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\, dx =$$

$$= -\frac{6}{n\pi}\Big[(x-1)\cos n\pi x)\Big]_0^1 + \frac{6}{n^2\pi^2}\Big[\sin n\pi x\Big]_0^1 = -\frac{6}{n\pi}.$$

Συνεπώς

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{6}{n\pi}, & n = \text{άρτιος} \\ \dfrac{8}{n^3\pi^3} - \dfrac{6}{n\pi}, & n = \text{περιττός}. \end{cases}$$

Αφού $g(x) = 0$, έπεται ότι $b_n = 0$. Αρα

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi c}{\ell} t \sin\frac{n\pi x}{\ell} = \sum_{n=1}^{\infty} (-3/n\pi)\cos 2n\pi t \sin 2n\pi x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8}{(2n-1)^3\pi^3} - \frac{6}{(2n-1)\pi}\right]\cos(2n-1)\pi t \sin(2n-1)\pi x$$

και

$$u(x,t) = v(x,t) + (1-x).$$

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που στις συνθήκες (3) και (4) οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι άθροισμα τριγωνομετρικών όρων της μορφής $\sin\frac{n\pi x}{\ell}$ δεν χρησιμοποιούνται οι τύποι (16) και (17).

Παράδειγμα 3: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = 4\sin 3\pi x - 6\sin 7\pi x, \quad u_t(x,0) = 0,$$
$$u(0,t) = u(4,t) = 0.$$

Λύση: Από τον τύπο (18) για $b_n = 0$

$$u(x,t) = a_1 \cos \frac{\pi c}{\ell} t \sin \frac{\pi x}{\ell} + a_2 \cos \frac{2\pi c}{\ell} t \sin \frac{2\pi x}{\ell} + \dots .$$

Αρα, αφού c=2, ℓ=4,

$$u(x,0) = a_1 \cos \frac{\pi x}{\ell} + a_2 \sin \frac{2n\pi}{\ell} + \dots \cong 4\sin 3\pi x - 6\sin 7\pi x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a_n \sin \frac{n\pi x}{4} = 4\sin 3\pi x \quad \acute{\eta} \quad \frac{n\pi}{4} = 3\pi \quad \Longrightarrow \quad n = 12 \quad \text{και} \quad a_{12} = 4.$$

Ομοίως,

$$a_n \sin \frac{n\pi x}{4} = -6\sin 7\pi x \quad \acute{\eta} \quad \frac{n\pi}{4} = 7\pi \quad \Longrightarrow \quad n = 28 \quad \text{και} \quad a_{28} = -6.$$

Ολοι οι άλλοι συντελεστές για n≠12 και n≠28, $a_n = 0$, επομένως,

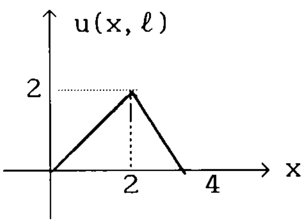
$$u(x,t) = 4\cos 6\pi t \sin 3\pi x - 6\cos 14\pi t \sin 7\pi x.$$

Παράδειγμα 4: Να λυθεί το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 2 \\ 4-x, & 2 \le x \le 4 \end{cases}, \quad u_t(x,0) = 0,$$

$$u(0,t) = u(4,t) = 0.$$

Λύση: Η μορφή της f(x) = u(x,0) είναι αυτό που παριστάνεται στο επόμενο σχήμα: Επομένως, αφού ℓ=4,



$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{l} u(x,0) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx = \frac{2}{4} \int_0^{2} x \sin \frac{n\pi x}{4}\, dx +$$

$$+ \frac{2}{4} \int_2^{4} (4-x) \sin \frac{n\pi x}{4}\, dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^2 x\left[\cos\frac{n\pi x}{4}\right]' dx - \frac{2}{n\pi}\int_2^4 (4-x)\left[\cos\frac{n\pi x}{4}\right]' dx =$$

$$=-\frac{2}{n\pi}x\left[\cos\frac{n\pi x}{4}\right]_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{4}dx - \frac{2}{n\pi}\left[(4-x)\cos\frac{n\pi x}{4}\right]_2^4 - \frac{2}{n\pi}\int_2^4 \cos\frac{n\pi x}{4}dx =$$

$$= - \frac{2}{n\pi}x\left[\cos\frac{n\pi x}{4}\right]_0^2 + \frac{8}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi x}{4}\right]_0^2 - \frac{2}{n\pi}\left[(4-x)\cos\frac{n\pi x}{4}\right]_2^4 - \frac{8}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi x}{4}\right]_2^4 =$$

$$= - \frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{16}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} .$$

Οπότε,

$$u(x,t) = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi}{4}x\cos\frac{c(2n+1)}{4}t.$$

Παράδειγμα 5: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, \quad 0<x<\ell, \quad t>0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0<x<\ell,$$

$$u_t(x,0) = g(x), \quad 0<x<\ell,$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad t>0,$$

$$u_x(\ell,t) = 0, \quad t>0.$$

Λύση: Η μόνη διαφορά του προβλήματος αυτού από το Πρόβλημα (2)-(6) είναι ότι σε αυτό είναι διαφορετικές οι δύο τελευταίες συνοριακές συνθήκες. Κατά τα άλλα η πορεία της μελέτης είναι η ίδια. Θέτουμε $u(x,t) = X(x)T(t)$ και βρίσκουμε όπως στο Πρόβλημα (2)-(6) ότι ο X πληρεί το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$X'' - \frac{\lambda}{c^2} X = 0, \qquad X'(0) = X'(\ell) = 0$$

και

$$T'' - \lambda T = 0.$$

Εχουμε, $$X(x) = c_1 \cos \frac{\sqrt{-\lambda}}{c} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{-\lambda}}{c} x.$$

Οπότε, $$X'(x) = - \frac{\sqrt{-\lambda}}{c} c_1 \sin \frac{\sqrt{-\lambda}}{c} x + \frac{\sqrt{-\lambda}}{c} c_2 \cos \frac{\sqrt{-\lambda}}{c} x.$$

Συνεπώς, $$X'(0) = \frac{\sqrt{-\lambda}}{c} c_2 = 0 \Longrightarrow c_2 = 0$$

και άρα

$$X'(\ell) = - \frac{\sqrt{-\lambda}}{c} c_1 \sin \frac{\sqrt{-\lambda}}{c} \ell = 0 \Longrightarrow \frac{\sqrt{-\lambda}}{c} \ell = n\pi \Longrightarrow \lambda = - \frac{n^2\pi^2c^2}{\ell^2}$$

$n=1,2,3,\dots$ που είναι οι ιδιοτιμές του προηγουμένου προβλήματος ιδιοτιμών.

Επομένως οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι οι

$$X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{\ell}, \qquad n=1,2,3\dots .$$

Η εξίσωση ως προς T, γίνεται τώρα $T'' + \frac{n^2\pi^2c^2}{\ell^2} T = 0$, οπότε

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi c}{\ell} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{\ell} t, \qquad n=1,2,3,\dots .$$

Επομένως, η λύση $u(x,t)$ δίνεται από τη σειρά

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{\ell} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{\ell} t \right) \cos \frac{n\pi x}{\ell},$$

οπότε,

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^t f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx,$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^t g(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx.$$

Δηλαδή, οι a_n και $(\frac{n\pi c}{\ell})b_n$ είναι οι συντελεστές των συνημιτονικών σειρών Fourier των δοθέντων συναρτήσεων f και g, αντίστοιχα.

<u>Ασκήσεις</u>

1. Να λυθούν τα επόμενα προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών:

(a) $u_{tt} - 4u_{xx} = 0$, $u(x,0) = x(\pi-x)$, $u_t(x,0) = 0$,
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

(b) $u_{tt} - 25u_{xx} = 0$, $u(x,0) = \sin 3x$, $u_t(x,0) = 4$,
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

(Απ. (a) $u(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos 2(2n+1)t\,\sin(2n+1)x$

(b) $u(x,t) = \cos 15t\,\sin 3x +$

$$+\frac{16}{5\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sin 5(2n+1)t\,\sin(2n+1)x.$$)

2. Να λυθούν τα επόμενα προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών:

(a) $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $u(x,0) = x^2(\pi-x)$, $u_t(x,0) = 0$,
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

(b) $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $u(x,0) = x(\pi-x)^2$, $u_t(x,0) = 0$,
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

(c) $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $u(x,0) = x(\pi-x)$, $u_t(x,0) = 3$,

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$

(Απ. (a) $u(x,t) = -4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}[1+2(-1)^n]\cos nt\ \sin nx$

(b) $u(x,t) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}[2+(-1)^n]\cos nt\ \sin nx$

(c) $u(x,t) = -\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cos 2nt\ \sin 2nx +$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{4}{(2n-1)^3}\cos(2n-1)t + \frac{12}{(2n-1)^3\pi}\sin(2n-1)t\right]\sin(2n-1)x.\ )$$

3. Να λυθούν τα επόμενα προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών με μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες:

(a) $u_{tt} - u_{xx} = 0,\quad u(x,0) = x^2(\pi-x),\quad u_t(x,0) = 0,$
$u(0,t) = 2,\quad u(\pi,t) = 2.$

(b) $u_{tt} - u_{xx} = 0,\quad u(x,0) = x(\pi-x)^2,\quad u_t(x,0) = 0,$
$u(0,t) = -3,\quad u(\pi,t) = 2.$

(Απ. (a) $u(x,t) = -\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cos 2nt\ \sin 2nx +$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{8}{(2n-1)^3} - \frac{8}{(2n-1)\pi}\right]\cos(2n-1)t\ \sin(2n-1)x + 2$$

(b) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8+4(-1)^n}{n^3} - \frac{6+4(-1)^n}{n\pi}\right]\cos nt\ \sin nx + \frac{5x-3\pi}{\pi}.\ )$

4. Να λυθούν τα επόμενα προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών:

(a) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x),$
$u(0,t) = 0, \quad u_x(\ell,t) = 0.$

(b) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x),$
$u_x(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0.$

(Απ. (a) $u(x,t) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{(2n+1)\pi c}{2\ell} t + b_n \sin \frac{(2n+1)\pi c}{2\ell} t \right] \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} dx,$$

$$b_n = \frac{4}{(2n+1)\pi c} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} dx,$$

(b) $u(x,t) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{(2n+1)\pi c}{2\ell} t + b_n \sin \frac{(2n+1)\pi c}{2\ell} t \right] \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell},$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} dx,$$

$$b_n = \frac{4}{(2n+1)\pi c} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} dx. \text{)}$$

5. (Η κυματική εξίσωση με απόσβεση). Αν θεωρήσουμε στην ταλαντωμένη χορδή ότι επενεργεί και η αντίσταση του αέρα, τότε η εξίσωση έχει τη μορφή

$$u_{tt} + 2au_t - c^2u_{xx} = 0,$$

όπου a>0 είναι ο συντελεστής απόσβεσης.

(a) Εστω $u(x,t) = e^{-at}v(x,t)$. Να δειχθεί ότι η v πληρεί τη ΔΕΜΠ

$$v_{tt} - a^2v - c^2u_{xx} = 0.$$

(b) Εστω $v(x,t) = w(x)e^{ibt}$ στην προηγούμενη ΔΕΜΠ. Να δειχθεί ότι η w πληρεί τη Δ.Ε.

$$w'' + dw = 0, \quad \text{όπου} \quad d = (a^2 + b^2)/c^2.$$

(c) Εστω $v(x,t) = w(x)e^{-ibt}$ στην προηγούμενη ΔΕΜΠ. Να δειχθεί ότι η w πληρεί τη Δ.Ε.

$$w'' + dw = 0, \quad \text{όπου} \quad d = (a^2 + b^2)/c^2.$$

(d) Με τη βοήθεια των (b) και (c), επαληθεύσετε ότι η ΔΕΜΠ $u_{tt} + 2au_t - c^2u_{xx} = 0$ έχει δύο μερικές λύσεις u_1 και u_2 της μορφής

$$u_1 = Ae^{-at}e^{i(\sqrt{d}\ x-bt)}, \quad u_2 = Be^{-at}e^{-i(\sqrt{d}\ x-bt)}.$$

Ας σημειωθεί ότι τα u_1 και u_2 είναι δύο κύματα που διαδίδονται προς τα δεξιά με ταχύτητα $b/\sqrt{d}$.

6. Συνήθως όταν παίζουμε λ.χ. μια κιθάρα τραβούμε με το δάκτυλο μια χορδή της απομακρύνοντάς την από την οριζόντια θέση σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} mx, & 0 \le x \le x_0 \\ \dfrac{mx_0}{\ell - x_0}(\ell - x), & x_0 \le x \le \ell, \end{cases}$$

η οποία είναι τριγωνικής μορφής με κορυφή στο σημείο $x=x_0$ και ύψος mx_0, m>0 και μετά αφήνεται να δονηθεί. Να βρεθεί η απομάκρυνση της χορδής u(x,t) όταν αυτή ανασηκώνεται στο μέσο αυτής και μετά απελευθερώνεται. Να ληφθεί $c=\ell=1$, $m = \frac{1}{4}$.

(Απ. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2} \cos(2n-1)\pi t \sin(2n-1)\pi x.$)

7. **Αρμονικές:** Ο τύπος (18) γράφεται $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$, όπου

$$u_n(x,t) = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell} t - \beta\right).$$

Μόνη της η $u_n(x,t)$ είναι μια δυνατή δόνηση της χορδής και καλείται η n-οστή αρμονική. Ειδικώς η u_1 καλείται η βασική αρμονική ταλάντωση περιόδου $p_n = 2\ell/nc$ και συχνότητας $v_n = nc/2\ell$. Η v_n καλείται n-στή φυσική συχνότητα και η v_1 καλείται συχνότητα της δόνησης. Βρείτε τους τρεις πρώτους αρμονικούς και τις τρεις πρώτες φυσικές συχνότητες του Παραδείγματος 1.

(Απ. $u_1 = \frac{8}{\pi^3} \cos \pi t \sin \pi x$, $\quad u_2 = \frac{8}{3^3\pi^3} \cos 3\pi t \sin 3\pi x$,

$u_3 = \frac{8}{5^3\pi^3} \cos 5\pi t \sin 5\pi x$, $\quad v_1 = \frac{1}{2}$, $\quad v_2 = 2$, $\quad v_3 = \frac{3}{2}$.)

8. Η ΔΕΜΠ $LCu_{tt} + (LG + RC)u_t + RGu = u_{xx}$ καλείται **τηλεγραφική εξίσωση** και διέπει τη διαφορά δυναμικού $u(x,t)$ κατά την κυκλοφορία του ρεύματος σε αγωγό, χωρητικότητας C ανά μονάδα μήκους, αγωγιμότητας G ανά μονάδα μήκους, αυτεπαγωγή L ανά μονάδα μήκους και αντίσταση R ανά μονάδα μήκους. Διαιρώντας με LC η τηλεγραφική εξίσωση γράφεται $u_{tt} + (\alpha+\beta)u_t + \alpha\beta u = c^2u_{xx}$, όπου $c^2 = 1/LC$, $\alpha = G/C$, $\beta = R/L$.

(a) Εστω $u(x,t) = e^{-1/2(\alpha+\beta)t}v(x,t)$. Δείξτε ότι αν u είναι λύση της τηλεγραφικής εξίσωσης, τότε η v επαληθεύει τη ΔΕΜΠ

$$v_{tt} - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 v = c^2 v_{xx}.$$

(b) Αν $\alpha=\beta$, δηλαδή αν GL=RC, δείξτε ότι η v πληρεί μια κυματική εξίσωση μιας διάστασης, της οποίας μολονότι δεν έχουμε αρχικές συνθήκες αυτή έχει τη μορφή

$$v(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct).$$

Η έκφραση $f(x+ct)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα "κύμα" που κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα c και η έκφραση $g(x-ct)$ ως ένα "κύμα" που κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα c. Ετσι η λύση u της (a) μπορεί να θεωρηθεί ότι περιγράφει τη διαφορά δυναμικού, όταν έχουμε απόσβεση, η οποία διαδίδεται σε αμφότερες τις διευθύνσεις του αγωγού. Ετσι, για κατάλληλες ιδιότητες του αγωγού, $(\alpha=\beta)$, τα σήματα μπορούν να διαδοθούν κατά μήκος του αγωγού απαραμόρφωτα μολονότι αποσβένονται χρονικά.

8. Η εξίσωση της Θερμότητας

'Εστω ράβδος μήκους ℓ και σταθερής διατομής. Το υλικό από το οποίο είναι κατασκευασμένη η ράβδος διαδίδει τη θερμότητα ομοιομόρφως. Η παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου είναι μονωμένη ώστε οι γραμμές ροής της θερμότητας, να είναι ευθείες κάθετες προς την κάθετη διατομή της ράβδου. Ο άξονας 0x θεωρείται ο παράλληλος άξονας και στην ίδια διεύθυνση με τη ροή της θερμότητας. Το σημείο $x=0$ είναι ένα των άκρων και το $x=\ell$ το άλλο των άκρων της ράβδου. Εστω $u(x,t)$ η θερμότητα της ράβδου στη διατομή σε απόσταση x μονάδες από το άκρο $x=0$ και τη χρονική στιγμή $t>0$. Αν υποτεθεί ότι τα άκρα της ράβδου διατηρούνται σε σταθερή θερμοκρασία 0 και η αρχική θερμοκρασία έχει κατανομή $f(x)$ για $t=0$, τότε η θερμοκρασία $u(x,t)$ ικανοποιεί το επόμενο πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$u_t - au_{xx} = 0, \qquad 0<x<\ell, \qquad t>0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad t>0, \tag{2}$$

$$u(\ell,t) = 0, \qquad t>0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0<x<\ell, \tag{4}$$

όπου a σταθερή εξαρτώμενη από το υλικό της ράβδου.

Αποδεικνύεται ότι αν η f πληρεί τις συνθήκες Dirichlet το πρόβλημα (1)-(4) έχει μοναδική λύση.

Λύση. Η λύση αυτή βρίσκεται με τη μέθοδο "χωρισμού των μεταβλητών". Εστω λοιπόν $u(x,t) = X(x)T(t)$, οπότε από τις (1), (2), (3) προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$X'' - \frac{\lambda}{a} X = 0, \tag{5}$$

$$X(0) = X(\ell) = 0, \tag{6}$$

$$T' - \lambda T = 0. \tag{7}$$

Το πρόβλημα ιδιοτιμών (5), (6) δίνει

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{-\frac{\lambda}{a}}\, x + c_2 \sin \sqrt{-\frac{\lambda}{a}}\, x \Longrightarrow X(0) = c_1 = 0$$

και

$$X(\ell) = c_2 \sin \sqrt{-\frac{\lambda}{a}}\, \ell = 0 \Longrightarrow \sqrt{-\frac{\lambda}{a}}\, \ell = n\pi \Longrightarrow \lambda = -\frac{n^2\pi^2 a}{\ell}. \tag{8}$$

Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι οι:

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \qquad n=1,2,\dots\ . \tag{9}$$

Για την τιμή του λ που δίνεται από την (8) η Δ.Ε. έχει γενική λύση

$$T_n(t) = c_n e^{-(n^2\pi^2 a/\ell^2)t}. \tag{10}$$

Κατά συνέπεια, αν $X_n(x)$ και $T_n(t)$ ληφθούν από τις (9) και (10) η

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t),$$

είναι η λύση της ΔΕΜΠ (1) η οποία πληρεί τις συνθήκες (2) και (3). Για να πληρεί η λύση αυτή και τη συνθήκη (4) πρέπει

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = f(x).$$

Επομένως, οι σταθερές c_n είναι συντελεστές της ημιτονικής σειράς Fourier της $f(x)$, δηλαδή

$$c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx.$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο εξής συμπέρασμα:

Το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών της διάδοσης της θερμότητας (1)-(4) έχει λύση:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n^2\pi^2 a/\ell^2)t} \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \tag{11}$$

όπου

$$c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx. \tag{12}$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι τα άκρα της ράβδου παραμένουν σε σταθερή θερμοκρασία A και B αντίστοιχα, έχουμε το **μη ομογενές** πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$u_t - au_{xx} = 0, \qquad 0<x<\ell, \quad t>0, \tag{13}$$

$$u(0,t) = A, \qquad t>0, \tag{14}$$

$$u(\ell, t) = B, \qquad t>0, \tag{15}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0<x<\ell. \tag{16}$$

Λύση. Αν u είναι λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (13)-(14), τότε η

$$v(x,t) = u(x,t) + \left(\frac{x-\ell}{\ell}\right)A - \frac{x}{\ell}\,B \tag{17}$$

φαίνεται εύκολα ότι είναι λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$v_t - av_{xx} = 0, \qquad 0<x<\ell, \quad t>0, \tag{18}$$

$$v(0,t) = 0, \qquad t>0, \tag{19}$$

$$v(\ell,t) = 0, \qquad t>0, \tag{20}$$

$$v(x,0) = f(x) + \left(\frac{x-\ell}{\ell}\right)A - \frac{x}{\ell}\,B, \quad 0<x<\ell. \tag{21}$$

Συνεπώς, αφού λύσουμε το γνωστό ομογενές πρόβλημα (18)-(21), από την (17) βρίσκουμε την u(x,t) του μη ομογενούς προβλήματος (13)-(16).

Παράδειγμα 1: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 1-x.$$

Λύση: Επειδή ℓ=1, a=1, ο τύπος (12) δίνει

$$c_n = \frac{2}{1}\int_0^1 (1-x)\sin n\pi x dx = -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 (1-x)(\cos n\pi x)' dx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[(1-x)\cos n\pi x\right]_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[(1-x)\cos n\pi x\right]_0^1 - \frac{2}{n^2\pi^2}\left[\sin n\pi x\right]_0^1 = \frac{2}{n\pi}.$$

Αρα, από τον τύπο (11),

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\, e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x.$$

<u>**Παράδειγμα 2:**</u> Να λυθεί το μη ομογενές πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = 3-3x, \quad u(0,t) = 3, \quad u(1,t) = 1.$$

<u>**Λύση:**</u> Εχουμε $\ell=1$, a=1, A=3, B=1, οπότε, από την (21)

$$v(x,0) = 3-3x + (x-1)3-x = 3-3x + 3x-3 - x = -x.$$

'Αρα

$$c_n = 2\int_0^1 -x \sin n\pi x dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x(\cos n\pi x)' dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[x\cos n\pi x\right]_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[x\cos n\pi x\right]_0^1 - \frac{2}{n^2\pi^2}\left[\sin n\pi x\right]_0^1 = \frac{2(-1)^n}{n\pi}.$$

Από την (17),

$$u(x,t) = v(x,t) - \left(\frac{x-\ell}{\ell}\right)A + \frac{x}{\ell}B =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x + (3-2x).$$

Παράδειγμα 3: Να δειχθεί ότι αν lim $u(x,t) = 0$ όταν $t \to \infty$, η ΔΕΜΠ $u_t - au_{xx} = 0$ έχει λύση την

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n^2\pi^2 a/l)t} \cos (nx + \varepsilon_n) \tag{21}$$

και μετά να δειχθεί ότι

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos (nx + \varepsilon_n). \tag{22}$$

Λύση: Σύμφωνα με τη θεωρία της μεθόδου "χωρισμού των μεταβλητών"

$$X'' - \lambda x = 0, \qquad T' - a\lambda T = 0,$$

οπότε $X(x) = A\cos nx + B\sin nx$, $T(t) = Ce^{-an^2t}$ όπου θέσαμε $-n^2$ για λ, ώστε

$$u_n(x,t) = (A_n \cos nx + B_n \sin nx)\, Ce^{-an^2t} \to 0, \quad t \to \infty.$$

Σύμφωνα με την "αρχή της υπέρθεσης" και η

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)\, Ce^{-an^2t} \tag{23}$$

είναι λύση της ΔΕΜΠ.

Αλλά

$$A_n \cos nx + B_n \sin nx = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \left(\frac{A_i}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} \cos nx + \frac{B_i}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} \sin nx \right)$$

$$c_n (\cos \varepsilon_n \cos nx + \sin \varepsilon_n \sin nx) = c_n \cos(nx + \varepsilon_n) \tag{24}$$

Τέλος, αντικαθιστώντας την (24) στην (23) λαμβάνουμε τη σχέση που θέλουμε (21).

Προφανώς η (21) για $t=0$ δίνει την (22).

<u>Ασκήσεις</u>

1. Να λυθούν τα επόμενα προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών (1)-(4) της εξίσωσης της θερμότητας με:

(a) $a=1,\ \ell=1,\ f(x) = x$ (b) $a=4,\ \ell=\pi,\ f(x) = x^2$

(c) $a=4,\ \ell=\pi,\ f(x) = \sin x$, (d) $a=2,\ \ell=1,\ f(x) = \sin^2 x$

(e) $a=1,\ \ell=1,\ f(x) = x(1-x)$, (f) $a=2,\ \ell=\pi,\ f(x) = x(\pi-x)^2$.

(Απ. Αντικαθιστούμε στον τύπο (11) όπου:

(a) $c_n = \dfrac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$

(b) $c_n = -\dfrac{2\pi}{n}$ αν n = άρτιος και $c_n = -\dfrac{2\pi}{n} - \dfrac{8}{\pi n^2}$ αν n = άρτιος

(c) $c_n = 0$ αν $n\neq 1$, $c_n = 1$ αν $n=1$

(d) $c_n = \dfrac{1}{n\pi}\left[[1-(-1)^n] + [1-(-1)^n\cos 2]\left(\dfrac{n\pi}{n^2\pi^2-4}\right)\right]$

(e) $c_n = 0$ αν n = άρτιος και $c_n = \dfrac{n\pi}{n^3\pi^3}$ αν n = περιττός

(f) $c_n = \dfrac{12}{n^3}$ αν n = άρτιος και $c_n = \dfrac{8\pi^2}{n} + \dfrac{4}{n^3}$ αν n = περιττός.)

2. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (13)-(16) αν:

(a) $a=5$, $\ell=\pi$, $f(x) = x$, $A=10$, $B=0$

(b) $a=1$, $\ell=1$, $f(x) = x(1-x)$, $A=7$, $B=3$.

(Απ. (a) $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} [10+(-1)^{n+1}\pi]e^{-5n^2t}\sin nx + \frac{10}{\pi}(\pi-x)$$

(b) $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ \frac{2}{n\pi} [3(-1)^n 7] + \frac{2}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n]\right\} e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x + 7(1-x) + 3x. \text{)}$$

3. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (1)-(4) όταν:

$$f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < \frac{\ell}{2} \\ 0, & \frac{\ell}{2} < x < \ell, \end{cases}$$

A = σταθερή.

(Απ. $$u(x,t) = \frac{24}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right) e^{-(n^2\pi^2 a/l^2)t}\sin\frac{n\pi x}{\ell}. \text{)}$$

9. Η διαφορική εξίσωση δυναμικού (εξίσωση Laplace)

Με διαφορικές εξισώσεις αυτού του τύπου περιγράφονται διάφορα φυσικά μεγέθη, όπως το δυναμικό στατικού ηλεκτρικού πεδίου, η κατανομή της θερμοκρασίας μέσα σε σώματα που είναι σε θερμική ισορροπία, κ.λ.π..

Η διδιάστατη διαφορική εξίσωση δυναμικού (Laplace) έχει τη μορφή

$$\Delta^2[u] = u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{1}$$

Ας σημειωθεί ότι η ΔΕΜΠ (1) είναι ελλειπτικού τύπου. Το τυπικό πρόβλημα που επιλύεται για τη ΔΕΜΠ (1) είναι εκείνο όπου γνωρίζουμε τις τιμές της u σε έναν ορισμένο τύπο R του Oxy επιπέδου. Συνεπώς έχουμε ένα συνοριακό πρόβλημα, που αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως **Πρόβλημα Dirichlet**. Η γεωμετρική μορφή του τύπου R και η φύση των συνοριακών συνθηκών καθορίζουν κατά πόσον είναι δυνατόν να λυθεί το Πρόβλημα Dirichlet.

Το τυπικό πρόβλημα του Dirichlet στο ορθογώνιο, $0<x<\ell$, $0<y<m$ που εύκολα λύνεται, είναι το πιο κάτω:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad 0<x<\ell, \qquad 0<y<m \tag{2}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0<x<\ell, \tag{3}$$

$$u(x,m) = g(x), \qquad 0<x<\ell, \tag{4}$$

$$u(0,y) = 0, \qquad 0<y<m \tag{5}$$

$$u(\ell,y) = 0, \qquad 0<y<m. \tag{6}$$

Λύση: Ζητούμε λύση της μορφής $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Συνεπώς, με τη μέθοδο "χωρισμού των μεταβλητών", βρίσκουμε ότι η X πρέπει να πληρεί το πρόβλημα των ιδιοτιμών:

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{7}$$

$$X(0) = 0, \quad X(\ell) = 0 \tag{8}$$

και Y πρέπει να πληρεί τη Δ.Ε.

$$Y'' - \lambda Y = 0. \tag{9}$$

Οι ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος (7)-(8) δίνονται αντίστοιχα από τις

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}, \quad n=1,2,3,\ldots \tag{10}$$

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad n=1,2,3,\ldots\ . \tag{11}$$

Με την τιμή του λ που δίνεται από την (10), η γενική λύση της Δ.Ε. (9) είναι η

$$Y_n(y) = a_n\cosh\frac{n\pi y}{\ell} + b_n\sinh\frac{n\pi y}{\ell}. \tag{12}$$

Ετσι, ζητούμε λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (2)-(6) της μορφής

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y). \tag{13}$$

Τώρα η (13) πληρεί καθεμιά από τις (2), (5) και (6) και για να πληρεί και τις (3) και την (4) αντιστοίχως πρέπει

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(0)\sin\frac{n\pi x}{\ell} = f(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(m)\sin\frac{n\pi x}{\ell} = g(x).$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι $Y_n(0)$, $Y_n(m)$ θα πρέπει να είναι οι συντελεστές της ημιτονικής σειράς Fourier της f και g αντιστοίχως, δηλαδή,

$$Y_n(0) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx, \quad Y_n(m) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx.$$

Αλλά, από τη (12),

$$Y_n(0) = a_n \quad \text{και} \quad Y_n(m) = a_n\cosh\frac{n\pi m}{\ell} + b_n\sinh\frac{n\pi m}{\ell}.$$

'Οθεν,

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \tag{14}$$

και

$$b_n = \frac{1}{\sinh \frac{n\pi m}{\ell}} \left[\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx - \right.$$

$$\left. - \left(\cosh \frac{n\pi m}{\ell}\right) \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \right]. \tag{15}$$

Τελικό επομένως συμπέρασμα είναι το εξής: Η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (2)-(6) δίνεται από την

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cosh \frac{n\pi y}{\ell} + b_n \sinh \frac{n\pi y}{\ell} \right] \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \tag{16}$$

όπου οι συντελεστές a_n και b_n δίνονται από τους τύπους (14) και (15), αντιστοίχως.

Με αναλλαγή του ρόλου των μεταβλητών X και Y λύνουμε, επίσης, το πρόβλημα συνοριακών τιμών του Dirichlet στο ορθογώνιο, $0<x<\ell$, $0<y<m$:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad 0<x<\ell, \qquad 0<y<m \tag{17}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad 0<x<\ell, \tag{18}$$

$$u(x,m) = 0, \qquad 0<x<\ell, \tag{19}$$

$$u(0,y) = h(y), \qquad 0<y<m, \tag{20}$$

$$u(\ell,y) = k(y), \qquad 0<y<m, \tag{21}$$

και λαμβάνουμε

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cosh \frac{n\pi x}{m} + b_n \sinh \frac{n\pi x}{m} \right] \sin \frac{n\pi y}{m}, \tag{22}$$

όπου

$$a_n = \frac{2}{m} \int_0^m h(y) \sin \frac{n\pi y}{m} \, dy \tag{23}$$

και

$$b_n = \frac{1}{\sinh \frac{n\pi \ell}{m}} \left[\frac{2}{m} \int_0^m k(y) \sin \frac{n\pi y}{m} \, dy - \left(\cosh \frac{n\pi \ell}{m} \right) \frac{2}{m} \int_0^m h(y) \sin \frac{n\pi y}{m} \, dy \right].$$

Με συνδυασμό των προηγουμένων προβλημάτων συνοριακών τιμών, λύνεται και το επόμενο πρόβλημα Dirichlet στο ορθογώνιο $0<x<\ell$, $0<y<m$:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad 0<x<\ell, \qquad 0<y<m \tag{24}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0<x<\ell, \tag{25}$$

$$u(x,m) = g(x), \qquad 0<x<\ell, \tag{26}$$

$$u(0,y) = h(y), \qquad 0<y<m, \tag{27}$$

$$u(\ell,y) = k(y), \qquad 0<y<m. \tag{28}$$

Για να λύσουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (24)-(28) θεωρούμε τη λύση $u_1(x,y)$ του προβλήματος (2)-(6) που δίνεται από τον τύπο (16) και τη λύση $u_2(x,y)$ του προβλήματος (17)-(21) που δίνεται από τον τύπο (22), οπότε η λύση $u(x,y)$ του προβλήματος (24)-(28) θα είναι

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y).$$

Παράδειγμα 1: Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών του Dirichlet (2)-(6) με $\ell=1$, $m=1$, $f(x) = x$, $g(x) = 0$.

Λύση: Από τον τύπο (14), βρίσκουμε,

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = 2\int_0^1 x\sin n\pi x dx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x((\cos n\pi x)'dx = -\frac{2}{n\pi}\Big[x\cos n\pi x\Big]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x dx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\Big[x\cos n\pi x\Big]_0^1 + \frac{2}{n^2\pi^2}\Big[\sin n\pi x\Big]_0^1 = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Ομοίως, από τον τύπο (15),

$$b_n = \frac{2}{\sinh n\pi}\left[-\cosh n\pi\int_0^1 x\sin n\pi x dx\right] = \frac{2(-1)^n}{n\pi}\cosh n\pi.$$

Και, επομένως, η ζητούμενη λύση

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\cosh n\pi y + \frac{2(-1)^n}{n\pi}\cosh n\pi\sinh nTy\right]\sin n\pi x.$$

Ασκήσεις

1. Να λυθούν τα προβλήματα συνοριακών τιμών του Dirichlet

(a) (2)-(6) με $\ell=1$, $m=1$, $f(x) = 0$, $g(x) = x$

(b) (17)-(21) με $\ell=1$, $m=1$, $h(y) = \cos y$, $k(y) = 0$

(c) (24)-(28) με $\ell=1$, $m=1$, $f(x) = x$, $g(x) = 0$,
$h(y) = \sin y$, $k(y) = 0$.

(Απ. (a) $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{(n\pi)\sinh n\pi} \sinh n\pi y \sin n\pi x$

(b) $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi\ (1+(-1)^{n+1}\cos 1)}{n^2\pi^2 - 1} \Big[\cosh n\pi x -$

$- (\cosh n\pi)(\sinh n\pi x\Big]\sin n\pi y$

(c) Το άθροισμα των λύσεων των (a) και (b).)

2. Μια ορθογώνια ομογενής θερμικώς αγώγιμη πλάκα από υλικό με πλάτος 10 cm και ύψος 15 cm είναι τοποθετημένη στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων με τις πλευρές της τοποθετημένες επί των αξόνων. Να βρείτε τη θερμοκρασία της θερμικής ισορροπίας της πλάκας, αν η πλευρά x=0 διατηρείται στη θερμοκρασία $100^{o}C$ και οι άλλες τρεις πλευρές διατηρούνται στη θερμοκρασία $0^{o}C$.

(Απ. $a_n = \frac{200}{n\pi}[1-(-1)^n]$, $b_n = \frac{200}{n\pi}[(-1)^n-1]\coth\frac{3n\pi}{2}$ και αντικαταστείστε τα a_n και b_n στον τύπο (16).)

10. Μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους- πρώτη μέθοδος

Για τη λύση μη ομογενών προβλημάτων αρχικών-συνοριακών τιμών θα εφαρμόσουμε δύο μεθόδους.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το πιο κάτω πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$u_t - au_{xx} = F(x,t), \qquad 0<x<\ell, \qquad t>0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad t>0, \tag{2}$$

$$u(\ell,t) = 0, \qquad t>0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0<x<\ell, \tag{4}$$

Λύση: Η λύση του αντιστοίχου ομογενούς προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (1)-(4) δηλαδή του προβλήματος (1)-(4) με $F(x,t) = 0$, (Παράδ.6) δίνεται από τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n^2\pi^2 a/l^2)t} \sin \frac{n\pi x}{\ell},$$

όπου

$$c_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx.$$

Ας θεωρήσουμε (Ειδ. Κεφ. Ανωτ. Μαθ. σελ. 113) το ορθομοναδιαίο σύστημα στο $[0,\ell]$

$$\Phi_n(x) = \sqrt{2/\ell}\, \sin \frac{n\pi x}{\ell} \tag{5}$$

οπότε

$$(\Phi_n, \Phi_m) = \int_0^{\ell} \Phi_n(x)\Phi_m(x)dx = \begin{cases} 0, & n\neq m \\ 1, & n=m. \end{cases}$$

Αν $\psi(x)$ είναι μια συνάρτηση δύο φορές διαφορίσιμη και πληρεί τις

$\psi(0) = \psi(\ell) = 0$, τότε $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi,\Phi_n)\Phi_n$.

Ζητούμε μια λύση του προβλήματος (1)-(4) της μορφής

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\Phi_n(x)$$

όπου $T_n(t)$ είναι άγνωστες συναρτήσεις προς προσδιορισμό. Από την ορθογωνιότητα των Φ_n, μπορούμε να γράψουμε

$$T_n(t) = (u,\Phi_n) = \int_0^{\ell} u(x,t)\Phi_n(x)dx. \tag{6}$$

Υποθέτοντας ότι η διαφορισιμότητα υπό το σύμβολο ολοκλήρωσης ισχύει, έχουμε

$$T_n'(t) = \int_0^{\ell} u_t(x,t)\Phi_n(x)dx.$$

Επειδή, $u_t = au_{xx} + F(x,t)$,

$$T_n'(t) = \int_0^{\ell} [au_{xx}(x,t) + F(x,t)]\Phi_n(x)dx =$$

$$= a\int_0^{\ell} u_{xx}(x,t)\Phi_n(x)dx + \int_0^{\ell} F(x,t)\Phi_n(x)dx. \tag{7}$$

Αφού οι συναρτήσεις $F(x,t)$ και $\Phi_n(x)$ είναι γνωστές, το δεύτερο ολοκλήρωμα στη σχέση (7) είναι μια γνωστή συνάρτηση του t, έστω η $k_n(t)$. Για το πρώτο ολοκλήρωμα της σχέσης (7) εφαρμόζουμε την ολοκλήρωση κατά παράγοντες δύο φορές και λαμβάνουμε

$$\int_0^{\ell} u_{xx}(x,t)\Phi_n(x)dx = \Big[u_{xx}(x,t)\Phi_n(x)\Big]_0^{\ell} - \int_0^{\ell} u_x(x,t)\Phi_n'(x)dx =$$

$$= \int_0^{\ell} u(x,t)\Phi_n''(x)dx, \tag{8}$$

αφού $\Phi_n(0) = \Phi_n(\ell) = u(0,t) = u(\ell,t) = 0$.

Επειδή, από την (5), $\Phi_n''(x) + \mu_n\Phi_n(x) = 0$ και $\Phi_n(0) = \Phi_n(\ell)$ έπεται ότι, $\Phi_n''(x) = -\mu_n\Phi_n(x)$ όπου $\mu_n = \dfrac{n^2\pi^2}{\ell^2}$ και συνεπώς η (8) γίνεται

$$\int_0^{\ell} u_{xx}(x,t)\Phi_n(x)dx = -\mu_n\int_0^{\ell} u(x,t)\Phi_n(x)dx = -\mu_n T_n(t).$$

Αντικαθιστώντας το προηγούμενο ολοκλήρωμα στην (7), καταλήγουμε στο ότι η $T_n(x)$ ικανοποιεί τη Δ.Ε.

$$T'_n(t) + a\mu_n T_n(t) = k_n(t). \tag{9}$$

Η (9) είναι γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με λύση, ως γνωστό,

$$T_n(t) = e^{-a\mu_n t}\left[T_n(0) + \int_0^t k_n(s)e^{a\mu_n s}\,ds\right]. \tag{10}$$

Αλλά, από τις (5) και (6), έχουμε ότι

$$T_n(0) = \int_0^\ell u(x,0)\Phi_n(x)dx = \int_0^\ell f(x)\Phi_n(x)dx. \tag{11}$$

Τελικώς, η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (1)-(4) δίνεται από την

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\Phi_n(x)$$

όπου η $\Phi_n(x)$ δίνεται από την (5) και η $T_n(t)$ από την (10) και (11).

Τελικό συμπέρασμα: Η λύση του προβλήματος (1)-(4) δίνεται από την

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\left(\sqrt{2/\ell}\,\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right), \tag{a}$$

$$T_n(t) = e^{-a\mu_n t}\left[\sqrt{2/\ell}\int_0^\ell f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx + \int_0^t k_n(s)e^{a\mu_n s}\,ds\right], \tag{b}$$

$$k_n(t) = \sqrt{2/\ell}\int_0^\ell F(x,t)\,\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx, \quad \mu_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}. \tag{c}$$

Παρατήρηση: Η προηγούμενη μέθοδος είναι χρήσιμη σε όλα τα προβλήματα που λύσαμε στις Παραγράγους 5, 6 και 7. Είναι σημαντικό ότι το πρόβλημα που αντιστοιχεί θέτοντας $F(x,t) = 0$ να είναι επιλύσιμο (δηλαδή η $f(x)$ να πληρεί τις συνθήκες Dirichlet) και οι συνοριακοί όροι στην ολοκλήρωση κατά παράγοντες είτε να μηδενίζονται ή να είναι γνωστοί ως συναρτήσεις του t. Αυτό βεβαίως συμβαίνει όταν έχουμε ομογενείς συνοριακές συνθήκες $u(0,t) = 0$ και $u(\ell,t) = 0$. Αν δεν ισχύει αυτό, είναι δυνατό σε μερικές περιπτώσεις να χρησιμοποιήσουμε αλλαγή μεταβλητών, ώστε να μεταβούμε σε πρόβλημα με ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

Παράδειγμα 1: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), \qquad 0<x<\ell, \quad t>0, \tag{12}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0<x<\ell, \tag{13}$$

$$u_t(x,0) = g(x) \qquad 0<x<\ell, \tag{14}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad t>0, \tag{15}$$

$$u(\ell,t) = 0, \qquad t>0. \tag{16}$$

Λύση: Οταν $F(x,t) = 0$ το πρόβλημα (12)-(16) έχει λύση που δίνεται στην Παράγραφο 5, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, θέτουμε $\Phi_n(x) = \sqrt{2/\ell}\,\sin\frac{n\pi x}{\ell}$ και ζητούμε λύση του προβλήματος (12)-(16) της μορφής

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\Phi_n(x)$$

όπου οι συναρτήσεις $T_n(x)$ είναι προς προσδιορισμό. Είναι, όμως

$$T_n(t) = \int_0^{\ell} u(x,t)\Phi_n(x)dx. \tag{17}$$

Από την (17) προκύπτει

$$T'_n(t) = \int_0^\ell u_t(x,t)\Phi_n(x)dx \tag{18}$$

$$T''_n(t) = \int_0^\ell u_{tt}(x,t)\Phi_n(x)dx. \tag{19}$$

Οι (12) και (19) δίνουν

$$T''_n(t) = \int_0^\ell [c^2 u_{xx}(x,t) + F(x,t)]\Phi_n(x)dx =$$

$$= c^2\int_0^\ell u_{xx}(x,t)\Phi_n(x)dx + \int_0^\ell F(x,t)\Phi_n(x)dx = \ldots$$

$$= c^2 \int_0^\ell u(x,t)\Phi''_n(x)dx + k_n(t)$$

όπου ολοκληρώσαμε κατά παράγοντες και λάβαμε υπόψη ότι οι συνοριακοί όροι εξαφανίζονται για $x=0$ και $x=\ell$. Αλλά $\Phi''_n = -\mu_n\Phi_n$, με $\mu_n = \dfrac{n^2\pi^2}{\ell^2}$, οπότε η $T_n(t)$ πληρεί τη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$T''_n(t) + c^2\mu_n T_n(t) = k_n(t). \tag{20}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (13) και (17) και τις (14) και (18), βρίσκουμε ότι η $T_n(t)$ πρέπει να πληρεί τις συνθήκες

$$T_n(0) = \int_0^\ell f(x)\Phi_n(x)dx, \tag{21}$$

$$T'_n(0) = \int_0^\ell g(x)\Phi_n(x)dx. \tag{22}$$

Αν η συνάρτηση $k_n(t)$ είναι συνεχής για $t>0$ το πρόβλημα αρχικών τιμών (20)-(22) έχει μοναδική λύση $T_n(t)$ και επομένως η λύση του προβλήματος (12)-(16) έχει επιτευχθεί.

<u>**Τελικό συμπέρασμα:**</u> Η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (12)-(16) δίνεται από την

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sqrt{2/\ell}\,\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \tag{a}$$

όπου

$$T_n''(t) + \frac{n^2\pi^2c^2}{\ell^2}\,T_n(t) = k_n(t) \tag{b}$$

$$k_n(t) = \sqrt{2/\ell}\int_0^{\ell} F(x,t)\,\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \tag{c}$$

$$T_n(0) = \sqrt{2/\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \tag{d}$$

$$T_n'(0) = \sqrt{2/\ell}\int_0^{\ell} g(x)\,\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx. \tag{e}$$

<u>**Παράδειγμα 1:**</u> Να λυθεί το πρόβλημα (1)-(4) με $a=1$, $\ell=1$, $f(x) = x$, $F(x,t) = xt$.

<u>**Λύση:**</u> Έχουμε

$$\int_0^{\ell} f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{\ell} = \int_0^1 x\,\sin n\pi x dx = \frac{1}{n\pi}\,(-1)^{n+1},$$

$$k_n(t) = \sqrt{2}\int_0^1 xt\,\sin n\pi x dx = t\sqrt{2}\int_0^1 x\,\sin n\pi x dx = \frac{t\sqrt{2}}{n\pi}\,(-1)^{n+1},$$

$$\int_0^t k_n(s)\,e^{a\mu_n s}\,ds = \int_0^t \frac{\sqrt{2}(-1)^{n+1}}{n\pi}\,s\,e^{n^2\pi^2 s}\,ds = \text{ολοκ. κατά παράγ.} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(-1)^{n+1}}{n\pi}\left[\frac{1+n^2\pi^2 t\; e^{n^2\pi^2 t} - e^{n^2\pi^2 t}}{n^4\pi^4}\right].$$

Συνεπώς, τύπος (b),

$$T_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t}\left\{\frac{\sqrt{2}(-1)^{n+1}}{n\pi}\left[\frac{1+n^2\pi^2 t\; e^{n^2\pi^2 t} - e^{n^2\pi^2 t}}{n^4\pi^4}\right] + \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\right\},$$

και, τύπος (a),

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}e^{n^2\pi^2 t}}{n^5\pi^5}\left[1+n^4\pi^4 - (1-n^2\pi^2 t)e^{n^2\pi^2 t}\right]\sin n\pi x.$$

Ασκήσεις

1. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (1)-(4) με $a=1$, $\ell=\pi$, $f(x) = x^2$, $F(x,t) = xe^t$.

(Απ. $$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\left\{\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n(n^2+1)}\left[1 - e^{(1+n^2)t}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}\left[(-1)^n - 1\right] - \frac{\pi^2}{n}\right\}\sin n\pi x.$$)

2. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (12)-(16) με $c=1$, $\ell=1$, $f(x) = x(1-x)$, $g(x) = 0$, $F(x,t) = x + t$.

(Απ. $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin n\pi x}{n^4\pi^4}\{n\pi[2-3(-1)^n]\cos n\pi t +$$

$$+ [(-1)^n - 1]\sin n\pi t + (-1)^n\pi + [1-(-1)^n]n\pi t\}\sin n\pi x.$$)

3. Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος αυτής της παραγράφου για τη λύση του προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών:

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, $u(0,t) = 0$, $u_x(\ell,t) = 0$.

$$(\text{Απ.}\quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\Phi_n(x), \quad \Phi_n(x) = \sqrt{2/\ell}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}$$

$$T_n''(t) + c^2\mu_n T_n(t) = \int_0^1 F(x,t)\Phi_n(x)dx, \quad \mu_n = \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4\ell^2}$$

$$T_n(0) = \int_0^{\ell} f(x)\Phi_n(x)dx, \quad T_n'(0) = \int_0^{\ell} g(x)\Phi_n(x)dx. \;)$$

11. Μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους- Δεύτερη μέθοδος

Πρώτα γράφουμε τη ΔΕΜΠ στην Παράγραφο 6 στη μορφή $A[u] = F(x,y)$, όπου A είναι ένας γραμμικός τελεστής. Θέτουμε τη λύση $u(x,y)$ της ΔΕΜΠ ως

$$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y) \tag{1}$$

όπου η συνάρτηση $v(x,y)$ είναι η νέα άγνωστη συνάρτηση, και $w(x,y)$ είναι επίσης άγνωστη που πρόκειται να την προσδιορίσουμε. Η αντικατάσταση της (1) στο Πρόβλημα της Παραγράφου 6 δίνει το:

Πρόβλημα 1:

Εστω το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$A[v] = F(x,t) - A[w]$$

$$A_1v(0,y) + A_2v_x(0,y) = f_1(y) - A_1w(0,y) - A_2w_x(0,y)$$

$$A_3v(\ell,y) + A_4v_x(\ell,y) = f_2(y) - A_3w(\ell,y) - A_4w_x(\ell,y)$$

$$A_5v(x,0) = f_3(x) - A_5w(x,0)$$

$$A_6v_y(x,0) = f_4(x) - A_6w_y(x,0).$$

Η ιδέα της μεθόδου είναι να εκλέξουμε την $w(x,t)$ έτσι ώστε το Πρόβλημα 1 να μετατρέπεται σε ένα πρόβλημα το οποίο να είναι επιλύσιμο ή με τη μέθοδο της προηγούμενης παραγράφου είτε με τη μέθοδο των Παραγράφων 6, 7, 8. Για ένα δοσμένο πρόβλημα μπορούμε να έχουμε ευελιξία στην εκλογή του $w(x,y)$, αφού το μόνο κριτήριο είναι το Πρόβλημα 1 να είναι επιλύσιμο. Αφού θα εκλεγεί η $w(x,y)$ και η $v(x,y)$ υπολογισθεί, η ζητούμενη λύση θα προκύψει από την (1).

Πρόβλημα 2: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$u_t - au_{xx} = F_1(x,y), \qquad 0<x<\ell, \qquad t>0,$$

$$u(0,t) = f_1(t), \qquad t>0,$$

$$u(\ell,t) = 0, \qquad t>0,$$

$$u(x,0) = f_3(x), \qquad 0<x<\ell.$$

Λύση: Θέτουμε $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ και λαμβάνουμε

$$v_t - av_{xx} = F_1(x,t) + aw_{xx} - w_t, \qquad 0<x<\ell, \qquad t>0,$$

$$v(0,t) = f_1(t) - w(0,t), \qquad t>0,$$

$$v(\ell,t) = -w(\ell,t), \qquad t>0,$$

$$v(x,0) = f_3(x) - w(x,0), \qquad 0<x<\ell.$$

Για να πληρεί το πρόβλημα αυτό ομογενείς συνοριακές συνθήκες και να μπορεί να λυθεί με βάση τη μέθοδο της προηγούμενης παραγράφου, πρέπει

$$f_1(t) - w(0,t) = 0, \tag{2}$$

$$- w(\ell, t) = 0. \tag{3}$$

Η συνθήκη (3) μπορεί να ικανοποιείται με πολλούς τρόπους, αλλά ένας απλός τέτοιος είναι η

$$w(x,t) = (x-\ell)g(t)$$

όπου η g θα είναι προς προσδιορισμό.

Με αυτή την εκλογή, η συνθήκη (2) γίνεται

$$f_1(t) + \ell\, g(t) = 0,$$

και έτσι

$$g(t) = (-1/\ell)f_1(t).$$

Επομένως, μια κατάλληλη εκλογή για την w είναι

$$w(x,t) = \left(\frac{\ell-x}{\ell}\right)f_1(t).$$

Οπότε, η v θα είναι λύση του προβλήματος:

$$\begin{aligned}
& v_t - av_{xx} = F(x,t), && 0<x<\ell, \quad t>0,\\
& v(0,t) = 0, && t>0,\\
& v(\ell,t) = 0, && t>0,\\
& v(x,0) = f(x), && 0<x<\ell
\end{aligned}$$

όπου

$$F(x,t) = F_1(x,t) - \left(\frac{\ell-x}{\ell}\right)f_1'(t) \quad \text{και} \quad f(x) = f_3(x) - \left(\frac{\ell-x}{\ell}\right)f_1(0).$$

Η εύρεση της λύσης v του προβλήματος αυτού επιτυγχάνεται με τη μέθοδο της προηγουμένης παραγράφου. Κατά συνέπεια η ζητούμενη λύση είναι u = v+w.

Τελικό συμπέρασμα: Η λύση του προβλήματος δίνεται από την

$$u(x,t) = v(x,t) + \left(\frac{\ell-x}{\ell}\right) f_1(x), \tag{a}$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \left(\sqrt{2/\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right) \tag{b}$$

$$T_n(t) = e^{-a\mu_n t} \left\{ \int_0^t k_n(s)\, e^{a\mu_n s} ds + \sqrt{2/\ell} \int_0^\ell \left[f_3(x) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{\ell-x}{\ell}\right) f_1(0) \right] \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \right\} \tag{c}$$

$$k_n(t) = \sqrt{2/\ell} \int_0^\ell \left[F_1(x,t) - \left(\frac{\ell-x}{\ell}\right) f_1'(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \tag{d}$$

$$\mu_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}. \tag{e}$$

Πρόβλημα 3: Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$u_{xx} + u_{yy} = x^2, \qquad 0<x<\ell, \quad 0<y<m,$$

$$u(x,0) = f_1(x), \qquad 0<x<\ell,$$

$$u(x,m) = g_1(x), \qquad 0<x<\ell,$$

$$u(0,y) = 0, \qquad 0<y<m,$$

$$u(\ell,y) = 0, \qquad 0<y<m.$$

Λύση: Το πρόβλημα αυτό είναι το γνωστό μη ομογενές πρόβλημα Dirichlet της Παραγράφου 7. Ας θέσουμε $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$. Οπότε

$$v_{xx} + v_{yy} = x^2 - w_{xx} - w_{yy}, \qquad 0<x<\ell, \quad 0<y<m,$$

$$v(x,0) = f_1(x) - w(x,0), \qquad 0<x<\ell,$$

$$v(x,m) = g_1(x) - w(x,m), \qquad 0<x<\ell,$$

$$v(0,y) = -w(0,y), \qquad 0<y<m,$$

$$v(\ell,y) = -w(\ell,y), \qquad 0<y<m.$$

Εκλέγουμε,

$$w(x,y) = \frac{1}{12}\, x(x^3 - \ell^3).$$

Τότε,

$$w(0,y) = 0, \quad w(\ell,y) = 0, \quad w_{yy} = 0, \quad w_{xx} = x^2,$$

οπότε,

$$v_{xx} + v_{yy} = 0, \qquad 0<x<\ell, \quad 0<y<m,$$

$$v(x,0) = f(x), \qquad 0<x<\ell,$$

$$v(x,m) = g(x), \qquad 0<x<\ell,$$

$$v(0,y) = 0, \qquad 0<y<m,$$

$$v(\ell,y) = 0, \qquad 0<y<m,$$

όπου

$$f(x) = f_1(x) - \frac{1}{12}\, x(x^3 - \ell^3) \quad \text{και} \quad g(x) = g_1(x) - \frac{1}{12}\, x(x^3 - \ell^3)$$

που είναι το πρώτο πρόβλημα που λύσαμε στην Παράγραφο 7. Συνεπώς, λύνουμε το πρόβλημα αυτό, βρίσκουμε τη συνάρτηση v και στη συνέχεια την $u(x,y)$ από τη σχέση

$$u(x,y) = v(x,y) + \frac{1}{12}\, x(x^3 - \ell^3).$$

Παρατήρηση 1: Ας σημειωθεί ότι οποιαδήποτε εκλογή του w η οποία έχει την ιδιότητα, $x^2 - w_{xx} - w_{yy} = 0$ θα ανάγει το Πρόβλημα 3 σε επιλύσιμο πρόβλημα. Για παράδειγμα, η εκλογή

$$w(x,y) = \frac{1}{12}\, x^4 + \alpha x + \beta y + \gamma$$

ανάγει το Πρόβλημα 3 στο πρόβλημα

$$\begin{aligned}
&v_{xx} + v_{yy} = 0, && 0<x<\ell, \quad 0<y<m,\\
&v(x,0) = f(x), && 0<x<\ell,\\
&v(x,m) = g(x), && 0<x<\ell,\\
&v(0,y) = h(y), && 0<y<m,\\
&v(\ell,y) = k(y), && 0<y<m,
\end{aligned}$$

όπου

$$f(x) = f_1(x) - \frac{1}{12}\, x^4 - \alpha x - \gamma,$$

$$g(x) = g_1(x) - \frac{1}{12}\, x^4 - \alpha x - \beta m - \gamma,$$

$$h(y) = -\beta y - \gamma,$$

$$k(y) = -\frac{1}{12}\ell^4 - \alpha\ell - \beta y - \gamma.$$

Το πρόβλημα αυτό λύνεται στην Παράγραφο 7.

Για το προηγούμενο πρόβλημα υπάρχει μόνο μια λύση u. Συνεπώς, διαφορετικές επιλογές για την w (και αντιστοίχως διαφορετικές λύσεις v) δεν δίνουν διαφορετικές λύσεις, αλλά μάλλον διαφορετικές εκδοχές της ίδιας συνάρτησης.

3. Η χρησιμότητα της μεθόδου αυτής της παραγράφου, βασίζεται στην ικανότητα να επινοήσουμε κατάλληλες μορφές για την w. Συχνά η δυσκολία της επινόησης αυτής εξαρτάται από τις μορφές των συναρτήσεων F, f_1, f_3 και f_4.

<u>**Παράδειγμα 1**</u>: Να λυθεί το πρόβλημα 2, με $F_1(x,t) = (x-1)\sin t$, $f_1(t) = \cos t$, $f_3(x) = x(1-x)$.

<u>**Λύση**</u>: 'Εχουμε,

$$\int_0^1 [f_3(x) - (1-x)f_1(0)]\sin n\pi x dx = \int_0^1 [x(1-x) - (1-x)]\sin n\pi x dx =$$

$$= -\int_0^1 (1-x)^2 \sin n\pi x dx = -\frac{1}{n\pi} + \frac{2}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n],$$

$$k_n(t) = \sqrt{2/\ell}\int_0^\ell \left[F_1(x,t) - \left(\frac{\ell-x}{\ell}\right)f_1'(x)\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 [(1-x)\sin t - (1-x)(-\sin t)]\sin n\pi x dx = 0,$$

$$T_n(t) = e^{-a\mu_n t}\left\{\int_0^t k_n(s)\, e^{a\mu_n s}ds + \sqrt{2/\ell}\int_0^\ell \left[f_3(x) - \right.\right.$$

$$- \left(\frac{\ell-x}{\ell}\right) f_1(0) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\Bigg] dx\Bigg\} \; e^{-n^2\pi^2 t}\left\{\sqrt{2}\left[-\frac{1}{n\pi} + \frac{2}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right)\right]\right\},$$

$$u(x,t) = v(x,t) + \left(\frac{\ell-x}{\ell}\right) f_1(x) = v(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\left(\sqrt{2/\ell}\,\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right) =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t}\left[-\frac{1}{n\pi} + \frac{2}{n^3\pi^3}\,[1-(-1)^n]\right]\sin n\pi x + (1-x)\cos t.$$

__Παράδειγμα 2:__ Να λυθεί το Πρόβλημα 3 με $f_1(x) = \frac{1}{12}x^4$, $g_1(x) = = \frac{1}{12}x(x^3-1)$.

__Λύση:__ Παρατηρώ, αν ληφθεί $w(x,y) = \frac{1}{12}x(x^3-1)$, ότι $w(0,y) = w(1,y) = 0$ και $x^2 - w_{xx} - w_{yy} = 0$. Συνεπώς σύμφωνα με τους τύπους (14), (15) και (16) της Παραγράφου 7

$$a_n = 2\int_0^1\left[\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{12}x(x^3-1)\right]\sin n\pi x dx = \frac{1}{6}\int_0^1 x \sin n\pi x dx =$$

$$= \frac{1}{6n\pi}(-1)^{n+1},$$

$$\beta_n = \frac{1}{\sinh n\pi}\left\{2\int_0^1\left[\frac{1}{12}x(x^3-1) - \frac{1}{12}x(x^3-1)\right]dx - \right.$$

$$\left. - (\cosh n\pi)\frac{1}{6n\pi}(-1)^{n+1}\right\} = -(\cosh n\pi)\frac{1}{6n\pi}(-1)^{n+1}.$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n\pi}(-1)^{n+1}[\cosh n\pi y - (\coth n\pi)\sinh n\pi y]\sin n\pi x +$$

$$+ \frac{1}{12}x(x^3-1).$$

Ασκήσεις

1. Να λυθεί το Πρόβλημα 2 με $F_1(x,t) = xe^t$, $f_1(t) = -e^t$, $f_3(x) = 3x$.

(Απ. $$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,e^{-n^2\pi^2 t}\left\{\frac{1-(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\left(1 - e^{(1+n^2\pi^2)t}\right) + \left[1 - 3(-1)^n\right]\right\}\sin n\pi x + (1-x)e^t.$$

2. Να λυθεί το Πρόβλημα 3 με $f_1(x) = 0$, $g_1(x) = x$.

(Απ. $$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{-2}{n^5\pi^5}\left[2+(n^2\pi^2-2)(-1)^n\right]\cosh n\pi y + \left\{\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{n^5\pi^5}\left[2+(n^2\pi^2-2)(-1)^n\right]\left[\cosh n\pi - 2\right]\right\}\frac{\sinh n\pi y}{\sinh n\pi}\right\}\sin n\pi x + \frac{1}{12}x(x^3-1).\ )$$

3. Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$u_{xx} + u_{yy} = (2-x^2)\sin y, \quad 0<x<1, \quad 0<y<\pi,$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0<x<1,$$

$$u(x,\pi) = 0, \quad 0<x<1,$$

$$u(0,y) = h(y), \quad 0<y<\pi,$$

$$u(\ell,y) = k(y), \qquad 0<y<\pi,$$

βρίσκοντας μια κατάλληλη συνάρτηση $w(x,y)$, έτσι ώστε η συνάρτηση $v(x,y) = u(x,y) - w(x,y)$ να είναι λύση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών για το οποίο η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους να είναι ομογενής.
(Υπόδ.: Να τεθεί $w(x,y) = Ax^2\sin y$ και να προσδιοριστεί το A).

(Απ. $A = 1$).

12. Η δισδιάστατη κυματική εξίσωση

Θα μελετήσουμε την κυματική εξίσωση δύο διαστάσεων

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}).$$

Η λύση u θα εξαρτάται από τρεις μεταβλητές x, y, t, δηλαδή $u = u(x,y,t)$. Θα λύσουμε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών στο ορθογώνιο $R = \{(x,y) : (x,y) \in (0,\ell) \times (0,m)\}$,

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0<x<\ell, \quad 0<y<m, \quad t>0, \tag{1}$$

$$u(x,0,t) = 0, \quad 0<x<\ell, \quad t>0, \tag{2}$$

$$u(0,y,t) = 0, \quad 0<y<m, \quad t>0, \tag{3}$$

$$u(x,y,0) = f(x,y), \quad 0<x<\ell, \quad 0<y<m, \tag{4}$$

$$u_t(x,y,0) = 0, \quad 0<x<\ell, \quad 0<y<m. \tag{5}$$

Σημειωτέο ότι οι συνθήκες (2) και (3) είναι ομογενείς συνοριακές συνθήκες και οι συνθήκες (4) και (5) είναι αρχικές συνθήκες οι οποίες δίνουν την αρχική θέση και αρχική ταχύτητα. Το πρόβλημα αυτό δίνει τις δονήσεις μιας ορθογώνιας μεμβράνης.

Θα εργασθούμε πάλι με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών. Θέτουμε στην (1),

$$u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t),$$

οπότε

$$XYT'' = c^2(X''YT + XY''T)$$

ή

$$\frac{T''}{c^2T} - \frac{Y''}{Y} = \frac{X''}{X} = \lambda.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτουν οι δύο εξισώσεις

$$X'' - \lambda x = 0, \tag{6}$$

και

$$\frac{T''}{c^2T} - \lambda = \frac{Y''}{Y}. \tag{7}$$

Οπως γνωρίζουμε (Παράδειγμα 5), η (7) δίνει

$$\frac{T''}{c^2T} - \lambda = \frac{Y''}{Y} = \mu \tag{7}$$

ή

$$T'' - c^2(\lambda+\mu)T = 0 \tag{8}$$

και

$$Y'' - \mu Y = 0. \tag{9}$$

Προφανώς,

$$X(0) = X(\ell) = 0. \tag{10}$$

Το πρόβλημα ιδιοτιμών (6), (10) έχει ιδιοτιμές:

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}, \qquad n=1,2,3,\ldots \tag{11}$$

και ιδιοσυναρτήσεις

$$X_n = A_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x. \tag{12}$$

Ομοίως,

$$Y(0) = Y(m) = 0 \tag{13}$$

και το πρόβλημα ιδιοτιμών (9), (13) έχει ιδιοτιμές

$$\mu_k = -\frac{k^2\pi^2}{m^2}, \qquad k=1,2,\ldots$$

και ιδιοσυναρτήσεις

$$Y_k = B_k \sin\frac{k\pi}{m}y. \tag{14}$$

Τώρα η Δ.Ε. για το T, δίνει

$$T'' + c^2\left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{k^2}{m^2}\right)\pi^2 T = 0,$$

η οποία έχει λύση

$$T = C\cos\left(c\sqrt{\frac{n^2}{\ell^2}+\frac{k^2}{m^2}}\,\pi t\right) + D\sin\left(c\sqrt{\frac{n^2}{\ell^2}+\frac{k^2}{m^2}}\,\pi t\right).$$

Αφού $T'(0) = 0$, έπεται ότι $D=0$, οπότε

$$T_{nk} = C_{nk}\cos\left(c\sqrt{\frac{n^2}{\ell^2}+\frac{k^2}{m^2}}\,\pi t\right). \tag{15}$$

Από τις (12), (14), (15) έπεται ότι η

$$u_{nk} = K_{nk}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,\sin\frac{k\pi}{m}y\,\cos\left(c\sqrt{\frac{n^2}{\ell^2}+\frac{k^2}{m^2}}\,\pi t\right)$$ πληρεί την Δ.Ε.

(1) και τις ομογενείς συνθήκες (2), (3) και (5). Επομένως, σύμφωνα με την "αρχή της υπέρθεσης" το ίδιο θα ισχύει και για την

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} K_{nk}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,\sin\frac{k\pi}{m}y\,\cos\left(c\sqrt{\frac{n^2}{\ell^2}+\frac{k^2}{m^2}}\,\pi t\right). \tag{16}$$

Συνεπώς, για να πληρούται η (5), η (16) δίνει,

$$u(x,y,0) = f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} K_{nk}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,\sin\frac{k\pi}{m}y. \tag{17}$$

Αλλά η (17) μας λέει ότι η $f(x,y)$ έχει διπλό ανάπτυγμα Fourier στο ορθογώνιο R, το αριστερό αυτής μέλος και κατά συνέπεια

$$K_{nk} = \frac{4}{\ell m}\int_0^{l}\int_0^{m} f(x,y)\,\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,\sin\frac{m\pi}{m}y\,dxdy. \tag{18}$$

Εχουμε λοιπόν, ως τελικό συμπέρασμα το εξής:

"Το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών (1)-(5) έχει λύση που δίνεται από τον τύπο (16), όπου οι συντελεστές K_{nk} προσδιορίζονται από τον τύπο (18)".

<u>**Παράδειγμα 1:**</u> Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών (1)-(5) με $c=1$, $\ell=1$, $m=1$, $f(x,y) = x(x-1)y(y-1)$.

<u>**Λύση:**</u> Από τον τύπο (18), έχουμε

$$K_{nk} = 4 \int_0^1 \int_0^1 x(x-1)y(y-1)\sin n\pi x \sin n\pi y \, dxdy.$$

Επειδή οι μεταβλητές του διπλού ολοκληρώματος χωρίζονται, σύμφωνα με το Παράδειγμα 1 σελ. 31

$$K_{nk} = \frac{4}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right] \frac{4}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right] = \begin{cases} 0, & n \text{ ή } k = \text{άρτιος} \\ \dfrac{64}{n^3\pi^3} & n \text{ και } k = \text{περιττοί}. \end{cases}$$

Από τον τύπο (16), άρα βρίσκουμε ως λύση την

$$u(x,y,t) = \frac{64}{\pi^6} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin (2n-1)\pi x \sin(2k-1)\pi y \cdot$$

$$\cdot \cos \sqrt{(2n-1)^2 + (2k-1)^2}\,\pi t.$$

<u>**Ασκήσεις**</u>

1. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad u(x,0,t) = u(x,1,t) = u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0$$

$$u(x,y,0) = x(1-x)y(1-y).$$

(Απ. $u(x,y,t) = \frac{64}{\pi^6} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin(2n-1)\pi x \cdot$

$$\cdot \sin(2k-1)\pi y \; e^{[(2n-1)^2 + (2k-1)^2 \pi^2 c^2 t]}. \;)$$

13. <u>Κυκλικοί, Κυλινδρικοί και Σφαιρικοί Τόποι</u>

Τα προβλήματα συνοριακών τιμών σε κυκλικούς τόπους λύνονται συνήθως πιο εύκολα με την αναγωγή σε πολικές συντεταγμένες. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να αλλάξουμε τις μεταβλητές x, y σε r, θ μέσω των γνωστών σχέσεων

$$x = r \cos\theta, \qquad y = r \sin\theta. \tag{1}$$

Ως γνωστόν, αν $x^2 + y^2 \neq 0$, ισχύει

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2}$$

Από τις (2), λαμβάνουμε τις παραγώγους

$$r_x = x(x^2 + y^2)^{-1/2} = \frac{x}{r}, \qquad \theta_x = \frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} = -\frac{y}{r^2}, \tag{3}$$

$$r_y = y(x^2 + y^2)^{-1/2} = \frac{y}{r}, \qquad \theta_y = \frac{1/x}{1+(y/x)^2} = -\frac{x}{r^2}. \tag{4}$$

Εστω, τώρα, η Λαπλασιανή

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}. \tag{5}$$

Θέλουμε να βρούμε τη μορφή της Δu αν αντί των καρτεσιανών συντεταγμένων x, y εισάγουμε τις πολικές συντεταγμένες r, θ.

Από τις σχέσεις (2), (3) με τη βοήθεια του κανόνα της αλυσίδας, λαμβάνουμε

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x = \frac{x}{r} u_r - \frac{y}{r^2} u_\theta . \tag{6}$$

Ομοίως, από την (5), λαμβάνουμε,

$$u_{xx} = \frac{1}{r} u_r - \frac{y}{r^2} \frac{x}{r} u_r + \frac{x^2}{r^2} u_{rr} + \frac{x}{r} \left(- \frac{x}{r^2} \right) u_{r\theta} + \frac{2y}{r^3} \frac{r}{x} u_\theta - \frac{y}{r^2} \left(\frac{x}{r} \right) u_{r\theta} -$$

$$- \frac{y}{r^2} \left(- \frac{y}{r^2} \right) u_{r\theta} = \frac{x^2}{r^2} u_{rr} - \frac{2xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{y^2}{r^3} u_r + \frac{2xy}{r^4}. \tag{7}$$

Με τον ίδιο τρόπο από τις σχέσεις (4) και τον κανόνα της αλυσσίδας λαμβάνουμε

$$u_{yy} = \frac{y^2}{r^2} u_{rr} + \frac{2xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{x^2}{r^3} u_r - \frac{2xy}{r^4} u_\theta . \tag{8}$$

Αντικαθιστώντας τις (7) και (8) στην (5) λαμβάνουμε:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} . \tag{9}$$

Η μετάβαση σε κυλινδρικές συντεταγμένες μέσω των τύπων

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \tag{10}$$

είναι ακριβώς η ίδια. Ετσι για τη Λαπλασιανή στις τρεις διαστάσεις

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \tag{11}$$

έχουμε

$$\Delta_u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_{zz}. \qquad (12)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα σφαιρικές συντεταγμένες

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi. \qquad (13)$$

Η αντιστροφή αυτών δίνει

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \qquad \varphi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z},$$

$$\theta = \begin{cases} \cot^{-1} \dfrac{x}{y}, & \text{αν} \quad y>0 \\ \pi + \cot^{-1} \dfrac{x}{y}, & \text{αν} \quad y<0. \end{cases}$$

Εργαζόμενοι όπως προηγουμένως, (οι πράξεις είναι πολλές) αποδεικνύεται ότι η έκφραση της Λαπλασιανής (11) σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι:

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{\cot \varphi}{r^2} u_\varphi + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} u_{\theta\theta} = 0. \qquad (14)$$

14. Λύσεις τύπου Fourier-Bessel προβλημάτων συνοριακών τιμών

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση της διάδοσης της θερμότητας (Παράγ.8)

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \qquad (1)$$

σε ένα κυλινδρικό σωλήνα ακτίνας r. Τότε σύμφωνα με την Παράγ. 13 η Δ.Ε. (1) λαμβάνει σε κυλινδρικές συντεταγμένες τη μορφή:

$$u_t = \alpha^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}\, u_r + \frac{1}{r^2}\, u_\theta + u_{zz}\right). \qquad (2)$$

Για να απλοποιήσουμε το πρόβλημά μας θα υποθέσουμε ότι η θερμοκρασία σε οποιοδήποτε σημείο του κυλίνδρου εξαρτάται μόνο από το t και την απόσταση r από τον άξονα του κυλίνδρου (άξονας του κυλίνδρου θεωρείται εδώ ο άξονας Oz).

Τότε, $u_\theta = u_z = 0$ και η Δ.Ε. (2) γίνεται

$$u_t = \alpha^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}\, u_r\right), \qquad 0 \le r < k, \qquad t > 0. \qquad (3)$$

'Εστω,

$$u(k,t) = 0, \qquad t > 0, \qquad (4)$$

$$u(r,0) = f(r), \qquad 0 < r < k, \qquad (5)$$

όπου k η ακτίνα της κάθετης κυκλικής διατομής του σωλήνα.

'Εστω,

$$u(r,t) = R(r)T(t). \qquad (6)$$

Τότε,

$$\frac{T'}{\alpha^2 T} = \frac{R'' + \frac{1}{r}\, R'}{R} = \lambda.$$

Οπότε,

$$R'' + \frac{1}{r}\, R' - \lambda R = 0, \qquad (7)$$

$$T' - \lambda \alpha^2 T = 0. \qquad (8)$$

Θεωρούμε την περίπτωση μόνο, όπου $\lambda = -a^2 < 0$, αφού, αν $\lambda \geq 0$, το πρόβλημα (3)-(5) δεν έχει φραγμένες λύσεις.

Η Δ.Ε. (8) έχει λύση

$$T = e^{-a^2 \alpha^2 t} \tag{9}$$

και η Δ.Ε. (7), γίνεται

$$r^2 R'' + rR' + a^2 r^2 R = 0$$

η οποία είναι Δ.Ε. Bessel τάξης 0. Η λύση αυτής είναι η

$$R(r) = AJ_0(ar) + BY_0(ar). \tag{10}$$

Επειδή όμως $Y_0(r) \to -\infty$ όταν $r \to 0$, το οποίο είναι φυσικώς απαράδεκτο, εκλέγουμε B=0 και έτσι έχουμε ως λύση την

$$u_a(r,t) = A_a J_0(ar) e^{-a^2 \alpha^2 t}, \tag{11}$$

η οποία πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες (4) και (5). Επομένως,

$$u_a(k,t) = A_a J_0(ak) e^{-a^2 \alpha^2 t} = 0,$$

οπότε

$$J_0(ak) = 0.$$

Γνωρίζουμε, όμως, ότι η Bessel συνάρτηση $J_0(x)$ τέμνει τον άξονα Οx σε άπειρου πλήθους σημεία, έστω τα $q_1, q_2, \ldots$. Επομένως, εκλέγουμε

$$a_n k = q_n \quad \text{και} \quad a_n = \frac{q_n}{k}, \quad n=1,2,\ldots \, . \tag{12}$$

Οπότε, η (11) δίνει

$$u_n(r,t) = A_n J_0(a_n r) e^{-a_n^2 \alpha^2 t}.$$

Πρέπει τώρα να ορίσουμε τους συντελεστές A_n, με τη βοήθεια της συνοριακής συνθήκης (5). Από την "αρχή της υπέρθεσης", έχουμε

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r)\, e^{-a_n^2 \alpha^2 t}. \tag{13}$$

Οπότε,

$$u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r) = f(r). \tag{14}$$

Αλλά αυτή είναι ένα ανάπτυγμα Fourier της f(r) όπου αντί για ημίτονα έχουμε συναρτήσεις Bessel μηδενικής τάξης. Εδώ, όμως, η συνθήκη ορθογωνιότητας είναι η

$$\int_0^k r J_0(a_n r) J_0(a_m r)\,dr = 0, \quad \text{αν} \quad n \neq m.$$

Συνεπώς, πολλαπλασιάζοντας αμφότερα τα μέλη της (14) επί $rJ_0(a_m r)$, προκύπτει

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n r J_0(a_n r) J_0(a_m r) = r f(r) J_0(a_m r).$$

Ολοκληρώνοντας από 0 έως k την τελευταία σχέση, βρίσκουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^k r J_0(a_n r) J_0(a_m r)\,dr = A_m \int_0^k r J_0^2(a_m r)\,dr =$$

$$= \int_0^k rf(r)J_0(a_m r)dr.$$

Αρα,

$$A_m = \frac{\int_0^k rf(r)J_0(a_m r)dr}{\int_0^k r\ J_0^2(a_m r)dr}, \qquad m=1,2,\dots . \tag{15}$$

Συνεπώς, η λύση του προβλήματος (3)-(5) δίνεται από την (13), όπου οι συντελεστές A_m, $m=1,2,\dots$ βρίσκονται από την (15). Αποδεικνύεται στη Θεωρία των "Ειδικών Συναρτήσεων" ότι

$$A_m = \frac{2}{k^2}\ \frac{\int_0^k rJ_0^2(a_m r)dr}{J_1^2(a_m r)}.$$

<u>Ασκηση</u>

1. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r - Au, \qquad 0\le r<1, \qquad t>0, \quad A>0,$$

$$u(1,t) = 0, \qquad t>0,$$

$$u(r,0) = k, \qquad 0\le r<1.$$

(Απ. $u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(a_n r)e^{-At}e^{-a_n^2 t}$, όπου a_n είναι η n-οστή θετική ρίζα της $J_0(x)$ και $A_n = \dfrac{\int_0^1 rk\, J_0(a_n r)dr}{\int_0^1 r\, J_0^2(a_n r)dr} = \dfrac{2k}{a_n}\dfrac{1}{J_1(a_n)}$.)

15. Λύσεις τύπου Fourier-Legendre προβλημάτων συνοριακών τιμών

Ας θεωρήσουμε ένα πρόβλημα Dirichlet για μια στερεά σφαίρα ακτίνας k που έχει κέντρο την αρχή. Δηλαδή, θέλουμε μια συνάρτηση η οποία πληρεί τη Δ.Ε. Laplace εντός της σφαίρας και να έχει δοσμένες τιμές στην επιφάνεια της σφαίρας.

Οπως ξέρουμε, (Παράγ. 13, σχέση (14)), έχουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{\cot\varphi}{r^2}u_\varphi + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}u_{\theta\theta} = 0.$$

'Η

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\sin\varphi\right) = 0.$$

Θεωρούμε την ειδική περίπτωση όπου η u είναι ανεξάρτητη της θ και διαμορφώνουμε το επόμενο πρόβλημα

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\sin\varphi\right) = 0, \quad 0\le r<k, \quad 0\le\varphi\le\pi, \tag{1}$$

$$u(k,\varphi) = f(\varphi), \qquad 0<\varphi<\pi. \tag{2}$$

Το πρόβλημα αυτό απαντά στην εύρεση του ηλεκτροστατικού δυναμικού u μέσα σε σφαίρα αν δεν υπάρχουν φορτία μέσα στη σφαίρα, με την υπόθεση ότι το δυναμικό u δίνεται πάνω στη σφαίρα από τη σχέση $u = f(\varphi)$.

Για να λύσουμε το πρόβλημα (1), (2) θέτουμε $u(r,\varphi) =$

$R(r)\Phi(\varphi)$ μέσα στη Δ.Ε. (1) και προκύπτει

$$\frac{r(rR)''}{R} = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{(\Phi'\sin\varphi)'}{\Phi} = \lambda. \tag{3}$$

Συνεπώς, η (3) δίνει τις δύο εξισώσεις:

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0, \qquad 0 \le r < k \tag{4}$$

$$\frac{1}{\sin\varphi}[\Phi' \sin\varphi]' + \lambda\Phi = 0, \qquad 0<\varphi<\pi. \tag{5}$$

Στην Δ.Ε. (5) θέτουμε $x = \cos\varphi$. Αφού $0<\varphi<\pi$, $-1<x<1$ έχουμε

$$\Phi' \sin\varphi = \frac{1-\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\frac{d\Phi}{d\varphi} = -(1-x^2)\frac{d\Phi}{dx}.$$

Οπότε, η (5) γίνεται

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Phi}{dx}\right] + \lambda\Phi = 0, \quad -1<x<1. \tag{6}$$

Για $\lambda=n(n+1)$, $n=0,1,2,\dots$ η Δ.Ε. (6) έχει λύσεις τα γνωστά πολυώνυμα Legendre $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$. Επιπλέον, όταν $\lambda = n(n+1)$ η Δ.Ε. (4) γίνεται

$$r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0,$$

η οποία είναι Δ.Ε. μορφής Euler και έχει, ως γνωστό, λύσεις

$$R = Ar^n + Br^{-n-1}.$$

Αφού, $r^{-n-1}\to\infty$, όταν $r\to0$, πρέπει να εκλέξουμε $B=0$. Ετσι

$$u_n(r,\varphi) = C_n r^n P_n(\cos\varphi).$$

Για να πληρεί η λύση αυτή τη συνθήκη $u(k,\varphi) = f(\varphi)$ πρέπει, σύμφωνα με την "αρχή της υπέρθεσης", να θεωρήσουμε την

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos\varphi). \tag{7}$$

Οπότε,

$$u(k,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n k^n P_n(\cos\varphi) = f(\varphi). \tag{8}$$

Αλλά η (8) δίνει το ανάπτυγμα της $f(\varphi)$ σε σειρά Fourier με πολυώνυμα Legendre. Η ορθογωνιότητα των πολυωνύμων Legendre μας δίνει τη δυνατότητα να βρούμε τα C_n. Επαναθέτοντας $x = \cos\varphi$, θέλουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n k^n P_n(x) = f(\cos^{-1}x). \tag{9}$$

Πολλαπλασιάζοντας με $P_m(x)$ τα μέλη της σχέσης (9) και ολοκληρώνοντας από -1 έως 1, λαμβάνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n k^n \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \int_{-1}^{1} f(\cos^{-1}x)P_m(x)dx. \tag{10}$$

Αλλά, είναι γνωστό ότι,

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{αν } n\neq m \\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{αν } n=m. \end{cases}$$

Ετσι, η άθροιση στην (10) συρρικνώνεται σε ένα μόνο όρο και συνεπώς έχουμε

$$C_m = \frac{2m+1}{2k^m} \int_{-1}^{1} f(\cos^{-1}x)P_m(x)dx. \tag{11}$$

Τελικό συμπέρασμα λοιπόν είναι το εξής:

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών (1), (2) έχει λύση η οποία δίνεται από τον τύπο (7), όπου οι συντελεστές C_n βρίσκονται από τον τύπο (11).

Ασκηση

1. Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών στην ημισφαίρα, όταν

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + \frac{1}{r^2 \sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\sin\varphi\right) = 0, \quad 0 \le r < k, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

$$u(k,\varphi) = f(\varphi),$$

και η τιμή της u στον κύκλο, $x^2 + y^2 \le k^2$ είναι ίση με A.

$$(\text{Απ. } u(r,\varphi) = A \sum_{n=1}^{\infty} (4n+1) \left(\frac{r}{k}\right)^{n-1} \frac{(-1)^{2n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2 n} P_{2n-1}(\cos\varphi). \;)$$

16. Σφαιρικές Αρμονικές Συναρτήσεις

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τη θεωρία των συναρτήσεων των Σφαιρικών Αρμονικών οι οποίες συνδέονται με τον τελεστή του Laplace και τα πολυώνυμα Legendre και οι οποίες παίζουν βασικό ρόλο στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.

Μια συνάρτηση $\Phi(x,y,z)$ καλείται **ομογενής** βαθμού n αν $\Phi(\lambda x,\lambda y,\lambda z) = \lambda^n\Phi(x,y,z)$ για κάθε λ σταθερό αριθμό.

Η συνάρτηση $\Phi(x,y,z)$ καλείται **συμπαγή σφαιρική αρμονική βαθμού n** αν

$$\Delta\Phi(x,y,z) = 0$$

και αν η $\Phi(x,y,z)$ είναι ομογενής βαθμού n.

Εστω η Δ.Ε. Laplace

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0. \tag{1}$$

Μετασχηματίζουμε αυτή σε σφαιρικές συντεταγμένες και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με r^2 και λαμβάνουμε

$$r \frac{\partial^2(r\Phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0. \tag{2}$$

Στην Παράγ.15 είδαμε ότι χρησιμοποιώντας τη μέθοδο "χωρισμού μεταβλητών" καταλήξαμε σε μία Δ.Ε. μορφής του Legendre και σε μια Δ.Ε. της μορφής του Euler. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η Δ.Ε. (1) μπορεί να έχει λύσεις της μορφής του γινομένου

$$\Phi = r^n\Psi_n(\theta,\varphi). \tag{3}$$

Αν η Φ είναι συμπαγής σφαιρική αρμονική βαθμού n, τότε η Ψ_n που συνδέεται με τη Φ με τη σχέση (3) λέγεται **επιφάνεια σφαιρική αρμονική.**

Ο όρος "επιφάνεια" επιλέχθηκε για προφανείς λόγους, διότι για σταθερό r, η Φ ανάγεται σε μια συνάρτηση ορισμένη επάνω στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας r και η Ψ_n ανάγεται ως η συνάρτηση Φ επάνω στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας 1.

Αντικαθιστούμε την (3) στην (2) και λαμβάνουμε

$$r \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^{n+1}\Psi_n) + \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}(r^n\Psi_n)\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 r^n\Psi_n}{\partial\theta^2} = 0,$$

ή

$$\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi_n\right) + n(n+1)\Psi_n + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Psi_n = 0. \tag{4}$$

Θέτουμε στην (4) $x = \cos\varphi$ και προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial\Psi_n}{\partial x}\right) + n(n+1)\Psi_n + \frac{1}{1-x^2}\,\frac{\partial^2\Psi_n}{\partial\theta^2} = 0. \tag{5}$$

Για να βρούμε μια ρητή παράσταση των επιφανειών σφαιρικών αρμονικών, θέτουμε στην (5),

$$\Psi_n = X(x)\Theta(\theta) \tag{6}$$

και εργαζόμενοι με τον καθιερωμένο τρόπο, φθάνουμε στη

$$\Theta'' + \mu^2\Theta = 0 \tag{7}$$

και στην προσαρτημένη Δ.Ε. του Legendre

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)X'\right]^2 + \left[n(n+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2}\right]X = 0. \tag{8}$$

Η (8) έχει λύσεις τις **προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre**

$$X(x) = P_n^{\mu}(x) = (1-x^2)^{\mu/2}\,\frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}}\,P_n(x). \tag{9}$$

Από τις (7), (9) και (6) προκύπτει ότι οι επιφάνειες σφαιρικές αρμονικές έχουν τη μορφή

$$\Psi_n^{(\mu)}(\theta,\varphi) = (A\cos\mu\theta + B\sin\mu\theta)P_n^{\mu}(\cos\varphi). \tag{10}$$

Από την (3) και (10) συμπεραίνουμε ότι οι συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές βαθμού n έχουν τη μορφή:

$$\Phi^{(n)}(r,\theta,\varphi) = r^n(A\cos\mu\theta + B\sin\mu\theta)P_n^{\mu}(\cos\varphi).$$

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

[1] **Andrews, L.,** Elementary partial differential equations with boundary value problems. Academic Press, New York, 1986.

[2] **Bajpai, A., Mustoe, L., Walker, D.,** Advanced Engineering Mathematics. John Wiley and Sons, Inc., 1977.

[3] **Κυβεντίδης, Θ.,** Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1988.

[4] **O'Neil, P.,** Advanced Engineering Mathematics. Wadsworth Publishing Inc. Belmont, California, 1987.

[5] **Sagan, H.,** Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics. Dover Publications, Inc., New York 1961.

[6] **Σχοινάς, Ι.,** Ειδικά Κεφάλαια Ανωτέρων Μαθηματικών. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1990.

[7] **Σχοινάς, Ι.,** Εξισώσεις Διαφορών και Ειδικές Συναρτήσεις. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1990.

[8] **Sneddon, I.,** Elementary of partial differential equations. McGraw-Hill Book Co., Tokyo 1957.

[9] **Sokolnikoff, I., Redheffer, R.,** McGraw-Hill Book Co., Tokyo 1966.

[10] **Wylie, C.,** Advanced Engineering Mathematics. McGraw-Hill Book Co., Tokyo, 1975.