ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ

Βελτιστοποίηση

Δρ. Βασίλης Μπέλλος

Εισαγωγή

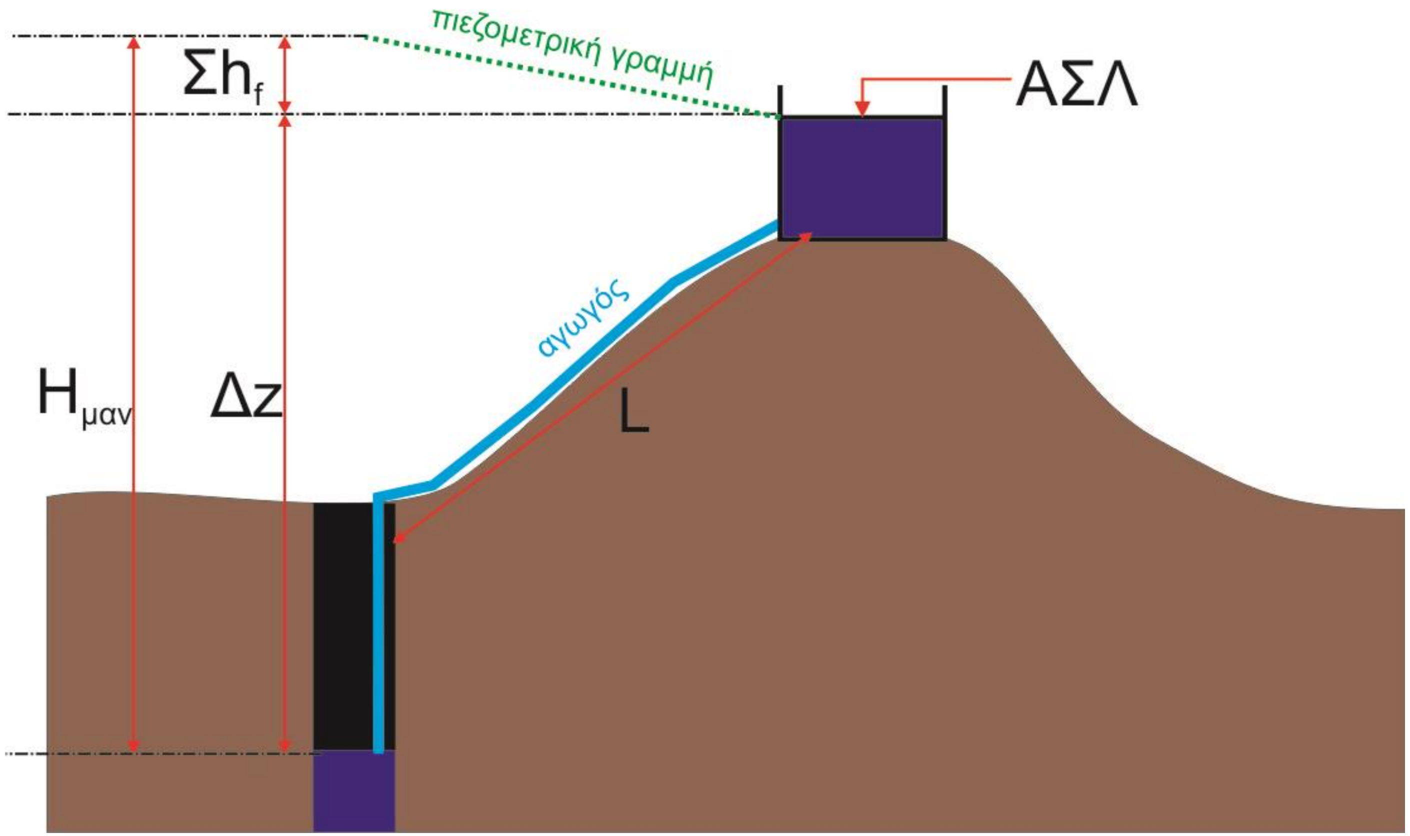
- **Αριθμητικά μοντέλα**
  - Σχεδιασμός έργου ή συστήματος έργων
  - Διαχείριση λειτουργίας έργου ή συστήματος έργων
- **Εμπειρικές μέθοδοι διαχείρισης**
  - Εναλλακτικές στρατηγικές
- **Υποκειμενική διάσταση**
  - Δε βρίσκαμε πάντα τη βέλτιστη λύση

Αριθμητικά μοντέλα

- **Χρησιμοποιούν κάποιες παραμέτρους**
- **Αν υπάρχουν δεδομένα εισόδου και εξόδου μήπως θα μπορούσαμε να βρούμε το βέλτιστο διάνυσμα παραμέτρων;**
  - Αντίστροφο πρόβλημα ή βαθμονόμηση

Παράδειγμα I

σχεδιασμός καταθλιπτικού αγωγού



Απαιτούμενο μανομετρικό ύψος

$$H_{\mu\alpha\nu} = \Delta z + \sum h_f$$

Απαιτούμενη ισχύς

$$N = \frac{gQH_{\mu\alpha\nu}}{\beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ \alpha\pi\acute{o}\delta o\sigma\eta\varsigma}$$

Απώλειες

$$h_f = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5} Q^2$$

Παράδειγμα Ι

σχεδιασμός καταθλιπτικού αγωγού

άρα επιλέγουμε τη μεγαλύτερη διάμετρο;

Απαιτούμενο μανομετρικό ύψος

$$H_{\mu\alpha\nu} = \Delta z + \sum h_f$$

Απαιτούμενη ισχύς

$$N = \frac{gQH_{\mu\alpha\nu}}{\beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ \alpha\pi\acute{o}\delta o\sigma\eta\varsigma}$$

Απώλειες

$$h_f = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5} Q^2$$

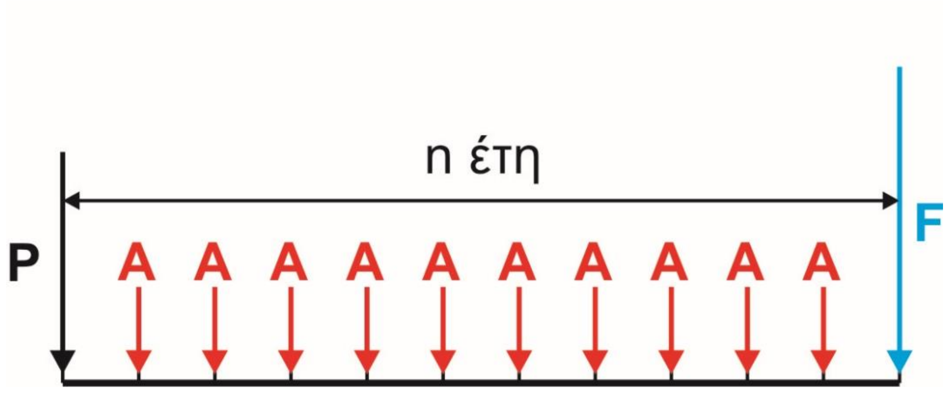
Παράδειγμα Ι

σχεδιασμός καταθλιπτικού αγωγού

- **Τεχνικο-οικονομικά κριτήρια**
  - Άνω και κάτω περιορισμοί σε ταχύτητα ροής
  - Μικρότερο κόστος κατασκευής και λειτουργίας
- **Μεγάλη διάμετρος**
  - Μεγάλο κόστος κατασκευής
  - Μικρότερη δαπάνη σε ενέργεια κάθε χρόνο
- **Μικρή διάμετρος**
  - Μικρό κόστος κατασκευής
  - Μεγαλύτερη δαπάνη σε ενέργεια κάθε χρόνο
- **Κριτήριο →** Ισοδύναμη Ετήσια Δαπάνη

Παράδειγμα Ι

σχεδιασμός καταθλιπτικού αγωγού

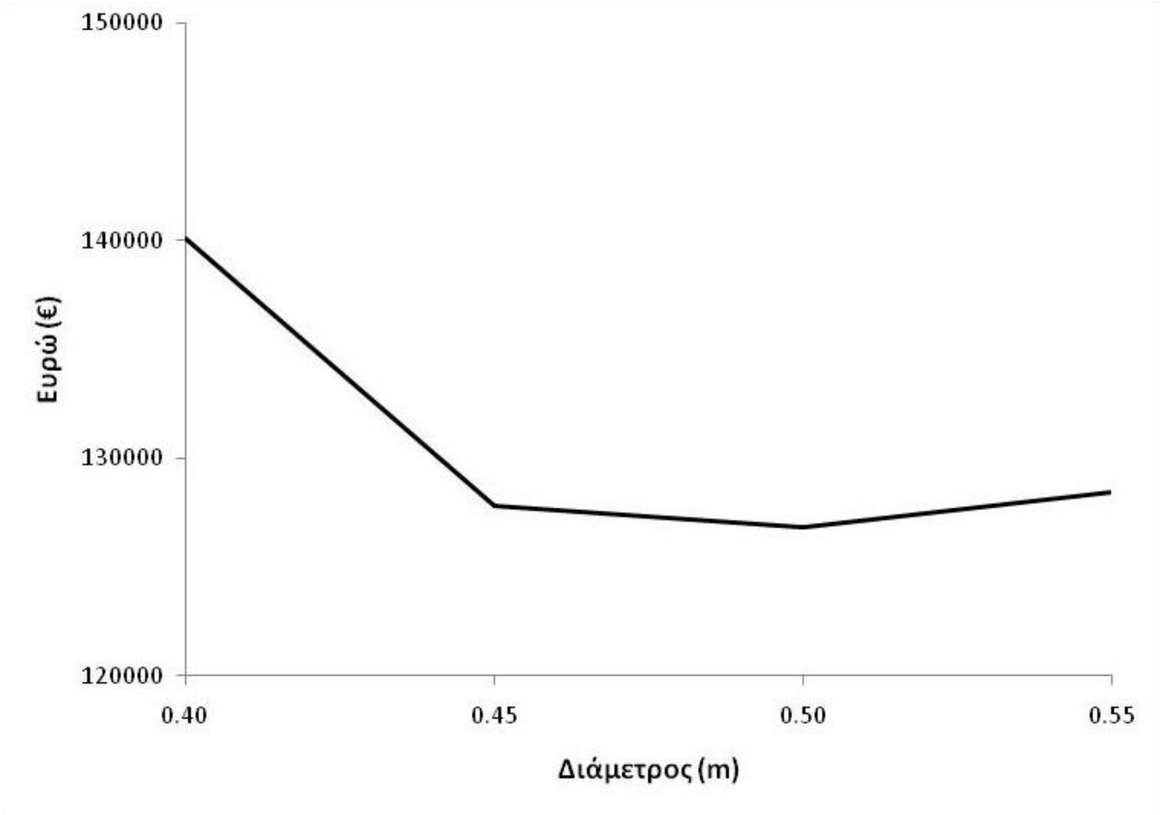


$$\frac{P}{F} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^n$$

$$\frac{P}{A} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

Παράδειγμα Ι

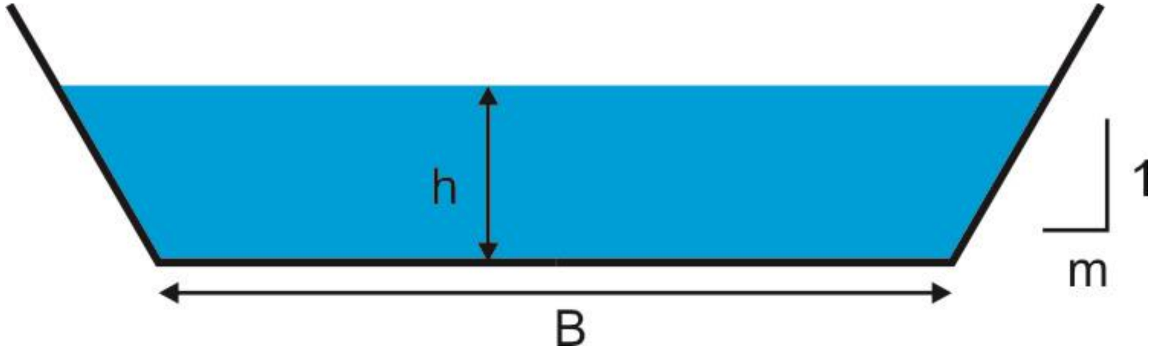
σχεδιασμός καταθλιπτικού αγωγού



Παράδειγμα II

βαθμονόμηση συντελεστή τραχύτητας

- Q=13.87 m^3/s
- h=1.95 m
- S_0=0.0003
- m=1.5
- B=4 m



$$P = B + 2h\sqrt{(1+m^2)}$$

$$A = h(B + mh)$$

$$R = \frac{A}{P}$$

$$Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2}$$

Ορισμός

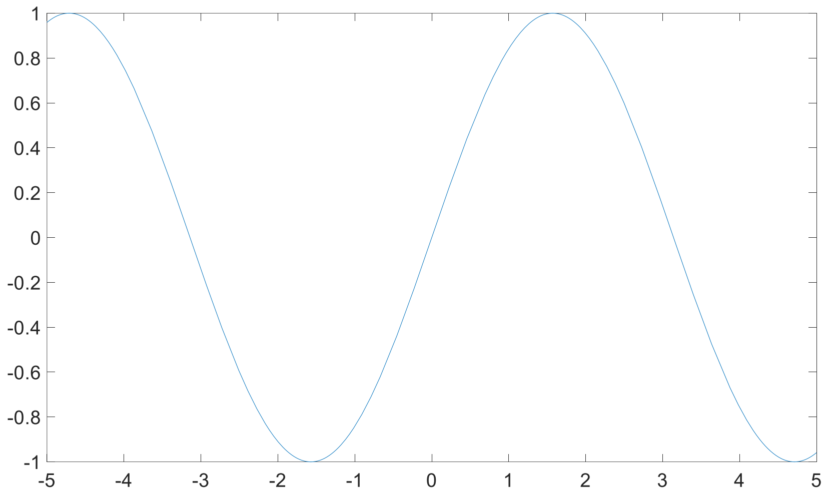
- **Χρησιμοποιείται**
  - Προβλήματα σχεδιασμού
  - Προβλήματα λήψης αποφάσεων
  - Αντίστροφα προβλήματα
- **Προϋποθέτει**
  - Εναλλακτικές επιλογές
  - Αξιολόγηση αυτών των επιλογών
- **Εναλλακτικές επιλογές**
  - Εφικτές λύσεις
- **Αξιολόγηση**
  - Συνάρτηση-στόχος η αντικειμενική συνάρτηση
  - Μπορεί να είναι πάνω από μία

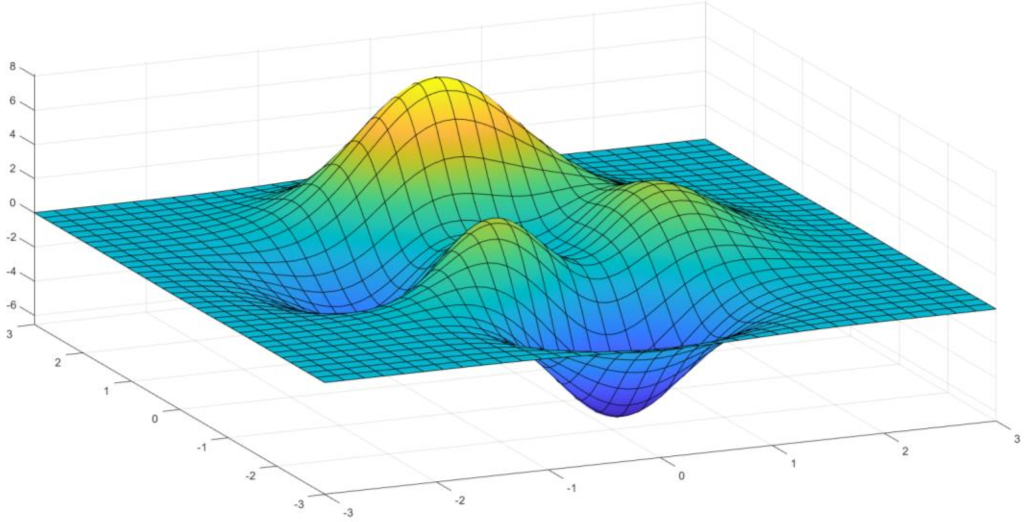
Μαθηματικοποίηση

$$\boldsymbol{min}/\max \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})$$

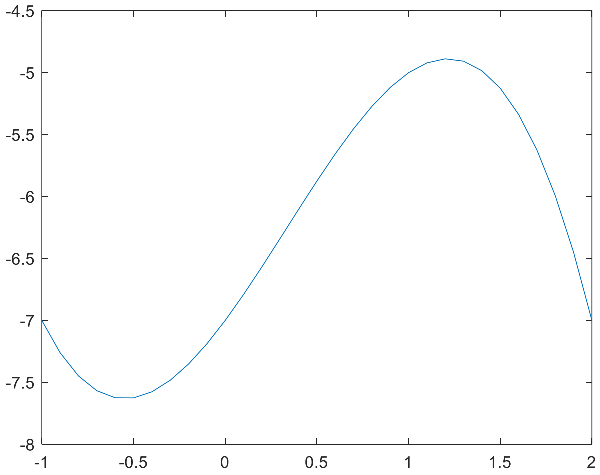
$$\upsilon\pi\acute{o}$$

$$\left.\begin{array}{c} g_{j=1,2,\dots k}(x_1, x_2, \dots, x_n) \le |\ge| = 0 \\ \\ x_{min} \le x_1, x_2, \dots, x_n \le x_{max} \end{array}\right\} \color{red}{\varepsilon\varphi\iota\kappa\tau\varepsilon\varsigma\ \lambda\upsilon\sigma\varepsilon\iota\varsigma}$$

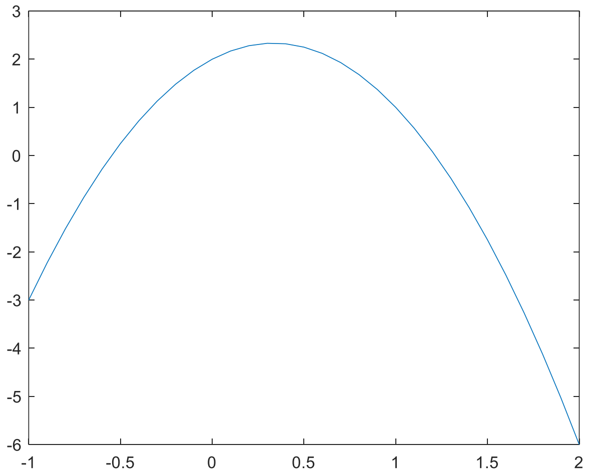




Ακρότατα συναρτήσεων

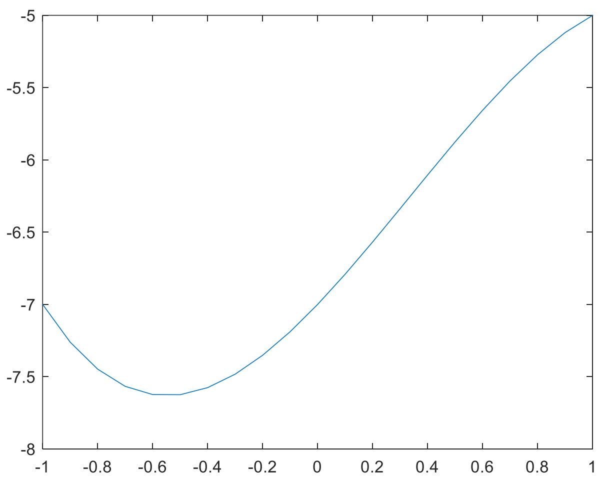


$$y = -x^3 + x^2 + 2x - 7$$

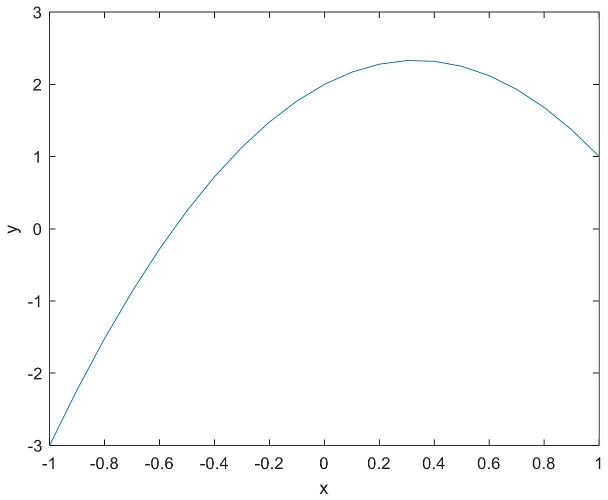


$$y' = -3x^2 + 2x + 2$$

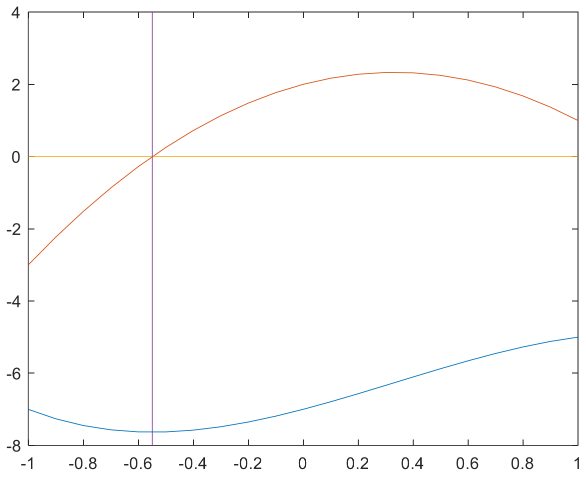
Ακρότατα συναρτήσεων



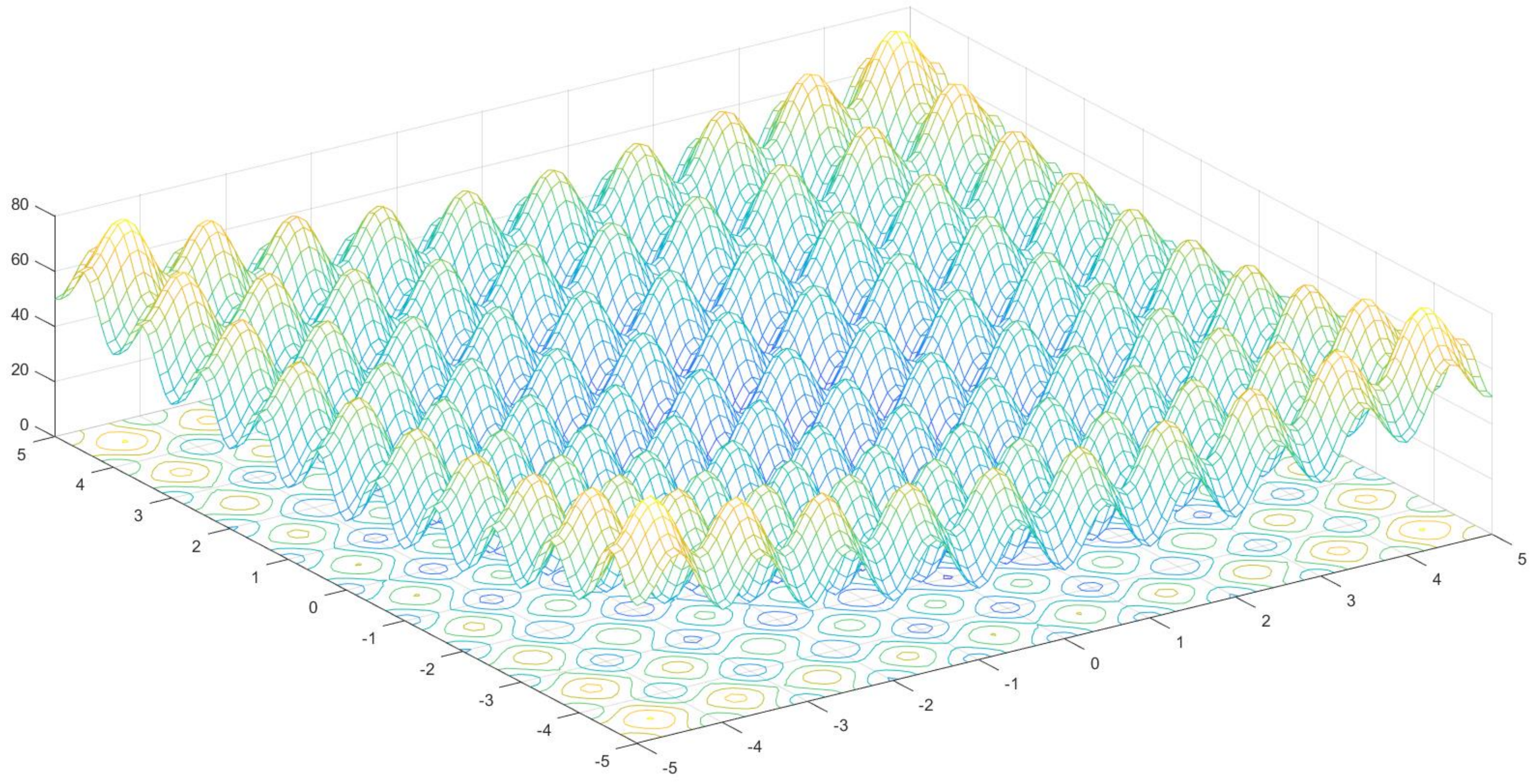
$$y = -x^3 + x^2 + 2x - 7$$



$$y' = -3x^2 + 2x + 2$$



Ακρότατα συναρτήσεων



Συνάρτηση-στόχος

- Συνεχείς vs. διακριτές τιμές
- Γραμμική vs. μη γραμμική μορφή
- Κυρτή vs. Μη κυρτή
- Αναλυτική έκφραση vs. μη αναλυτική έκφραση
- Παραγωγίσιμη vs. μη παραγωγίσιμη
- Μεγάλο υπολογιστικό κόστος vs. μικρό υπολογιστικό κόστος

Πρακτικά

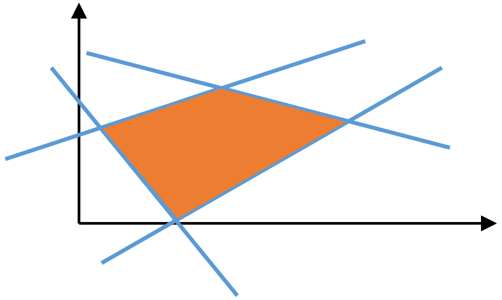
- Τεχνικοί περιορισμοί
- Οικονομικά κριτήρια
- Διάφορα μέτρα αριθμητικά σύγκλισης
- …

Περιορισμοί

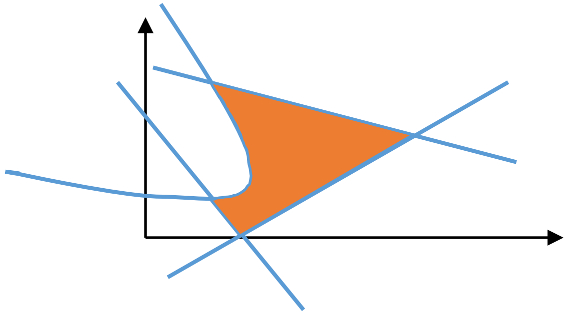
- **Συναρτήσεις**
- **Ακέραιες τιμές**
- **Δυαδικότητα 0 | 1**
- **Λογικοί τελεστές**
  - If
  - And
  - Or
- **Συνάρτηση ποινής → ενσωμάτωση περιορισμών στη συνάρτηση-στόχος**

Εφικτές λύσεις

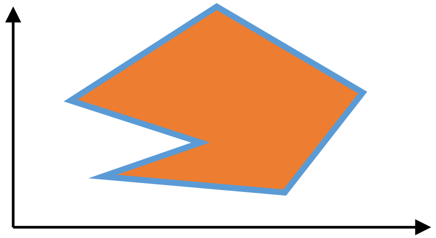
κυρτός, γραμμικός



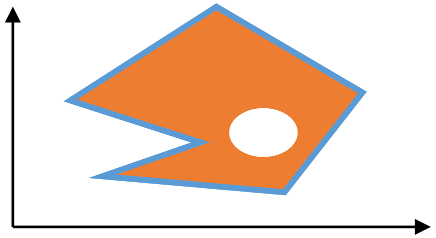
κυρτός, μη γραμμικός



μη κυρτός, συνεχής



μη κυρτός, μη συνεχής



Μέθοδοι

- **Αναζήτηση με κάνναβο (grid search)**
- **Τυχαία αναζήτηση (random search)**
- **Γραμμικός/δυναμικός προγραμματισμός**
  - Γραμμικές σχέσεις
- **Μη γραμμικός προγραμματισμός**
  - Μαθηματικές σχέσεις
  - Εξελικτικοί αλγόριθμοι

Συνάρτηση-στόχος

Root Mean Square Error $$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Q_m - Q_0)^2}$$

Nash-Sutcliffe $$NSE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(Q_m - Q_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(Q_0 - \bar{Q}_0)^2}$$

Pearson $$PCC = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(Q_m Q_0) - \sum_{i=1}^{n}(Q_0)\sum_{i=1}^{n}(Q_m)}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n}(Q_0)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}(Q_0)\right)^2\right]}\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n}(Q_m)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}(Q_m)\right)^2\right]}}$$

King Gupta Efficiency $$KGE = 1 - \sqrt{(PCC - 1)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_0} - 1\right)^2 + \left(\frac{\mu_m}{\mu_0} - 1\right)^2}$$

Αναζήτηση με κάνναβο

- $Q=13.87\ m^3/s$
- $h=1.95\ m$
- $S_0=0.0003$
- $m=1.5$
- $B=4\ m$

συνάρτηση στόχος

$$\boldsymbol{f(x) = \left(Q - \frac{1}{x} A R^{2/3} S_0^{1/2}\right)^2}$$

βελτιστοποίηση

$$\min f(x)$$

$$\upsilon\pi\acute{o}$$

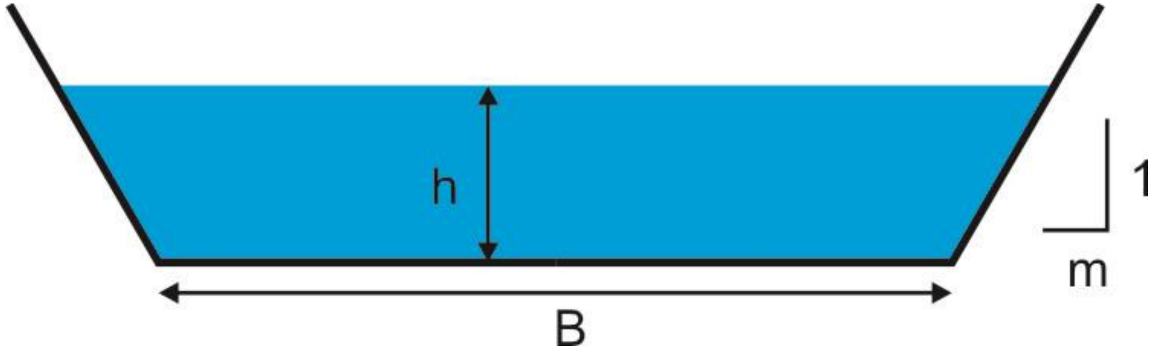
εφικτές λύσεις

$$0 < x \leq 0.1$$

περιορισμοί

$$\Delta x = 0.0001$$

βήμα αναζήτησης



$$P = B + 2h\sqrt{(1+m^2)}$$

$$A = h(B + mh)$$

$$R = \frac{A}{P}$$

$$Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2}$$

Τυχαία αναζήτηση

- Q=13.87 m^3/s
- h=1.95 m
- S_0=0.0003
- m=1.5
- B=4 m

συνάρτηση στόχος

$$\boldsymbol{f(x) = \left(Q - \frac{1}{x} A R^{2/3} S_0^{1/2}\right)^2}$$

βελτιστοποίηση

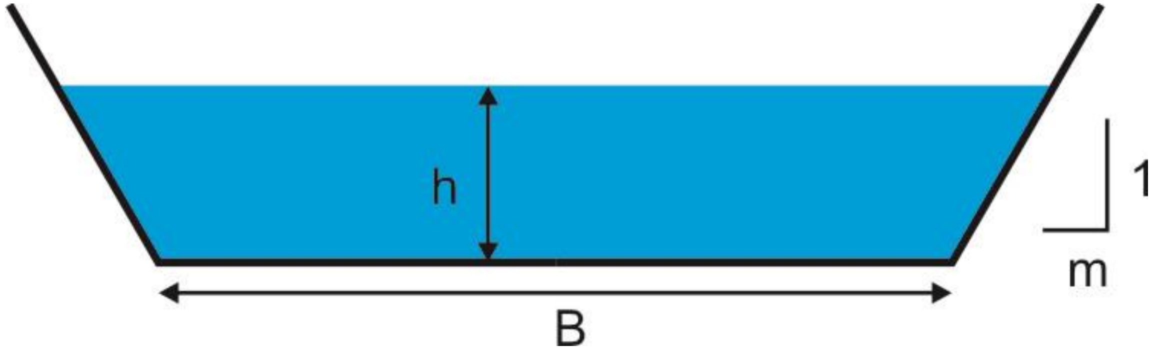
$$\min f(x)$$

υπό

εφικτές λύσεις

$$0 < x \leq 0.1$$ περιορισμοί

$$x \in [0.0001, 0.1]$$



$$P = B + 2h\sqrt{(1+m^2)}$$

$$A = h(B + mh)$$

$$R = \frac{A}{P}$$

$$Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2}$$

Τυχαία αναζήτηση

Κατάρα της διαστατικότητας

- **Όσο αυξάνονται οι διαστάσεις του προβλήματος → αυξάνονται εκθετικά**
  - Πολυπλοκότητα
  - Υπολογιστικό κόστος
- **Αναζήτηση με κάνναβο**
  - 1 μεταβλητή → 10 σημεία
  - 2 μεταβλητές → 10^2 σημεία
  - 3 μεταβλητές → 10^3 σημεία
  - …
  - n μεταβλητές → 10^n σημεία

Γραμμικός προγραμματισμός

- **Γραμμικοποίηση του προβλήματος**
- **Ένα πρόβλημα είναι δυνατό να λυθεί**
  - Εύρεση όλων των λύσεων του συστήματος περιορισμών
  - Απαλοιφή των λύσεων που δεν ικανοποιούν τις συνθήκες μη αρνητικότητας
  - Επιλογή της μοναδικής λύσης που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση-στόχο
- **Μέθοδοι**
  - Γραφική μέθοδος
  - Μέθοδος Simplex

Μαθηματικό μοντέλο

γραμμική αντικειμενική συνάρτηση

$$f(\bar{X}) = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

μεταβλητή *συντελεστής μεταβλητής*

περιορισμοί

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \leq b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \leq b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \leq b_m$$

σταθεροί συντελεστές

$\Rightarrow$

ψευδομεταβλητές

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n + X_{n+1} = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n + X_{n+2} = b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n + X_{n+m} = b_m$$

περιορισμοί δομής

περιορισμοί μη αρνητικότητας

$$X_1, X_2, \ldots X_n, X_{n+1} \ldots X_{n+m} \geq 0$$

Μαθηματικό μοντέλο

$$\bar{C} = [C_1 \quad \dots \quad C_n]$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix}$$

$$max/min f(\bar{X}) = \bar{C}\bar{X}$$

$$\upsilon\pi\acute{o}$$

$$\bar{A}\bar{X} \leq \bar{P_0}$$

$$\bar{X} \geq 0$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\bar{P_0} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

- Εγκατάσταση επεξεργασίας λυμάτων εφαρμόζει τρεις τεχνολογίες αντιρρύπανσης κατά τις οποίες απομακρύνονται 1, 2, 3 g/m^3 του ρυπαντή αντίστοιχα
- Η τρίτη τεχνολογία δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε ποσοστό πάνω από 50% των λυμάτων
- Το κόστος εφαρμογής των τριών τεχνολογιών είναι 5, 3, 2 €/m^3
- Πρέπει να γίνεται καθημερινά επεξεργασία 1000 m^3 λυμάτων και να απομακρύνεται 1.5 g/m^3 του ρυπαντή
- Να βρεθεί ο βέλτιστος συνδυασμός των τριών τεχνολογιών

Γραφική μέθοδος

μεταβλητές

$X_1, X_2, 1000 - X_1 - X_2$

περιορισμοί

$X_1, X_2 \geq 0$

$X_1 + X_2 \leq 1000$

$1000 - X_1 - X_2 \leq 500 \Rightarrow X_1 + X_2 \geq 500$

$X_1 + 2X_2 + 3(1000 - X_1 - X_2) \geq 1500 \Rightarrow 2X_1 + X_2 \leq 1500$

συνάρτηση στόχος

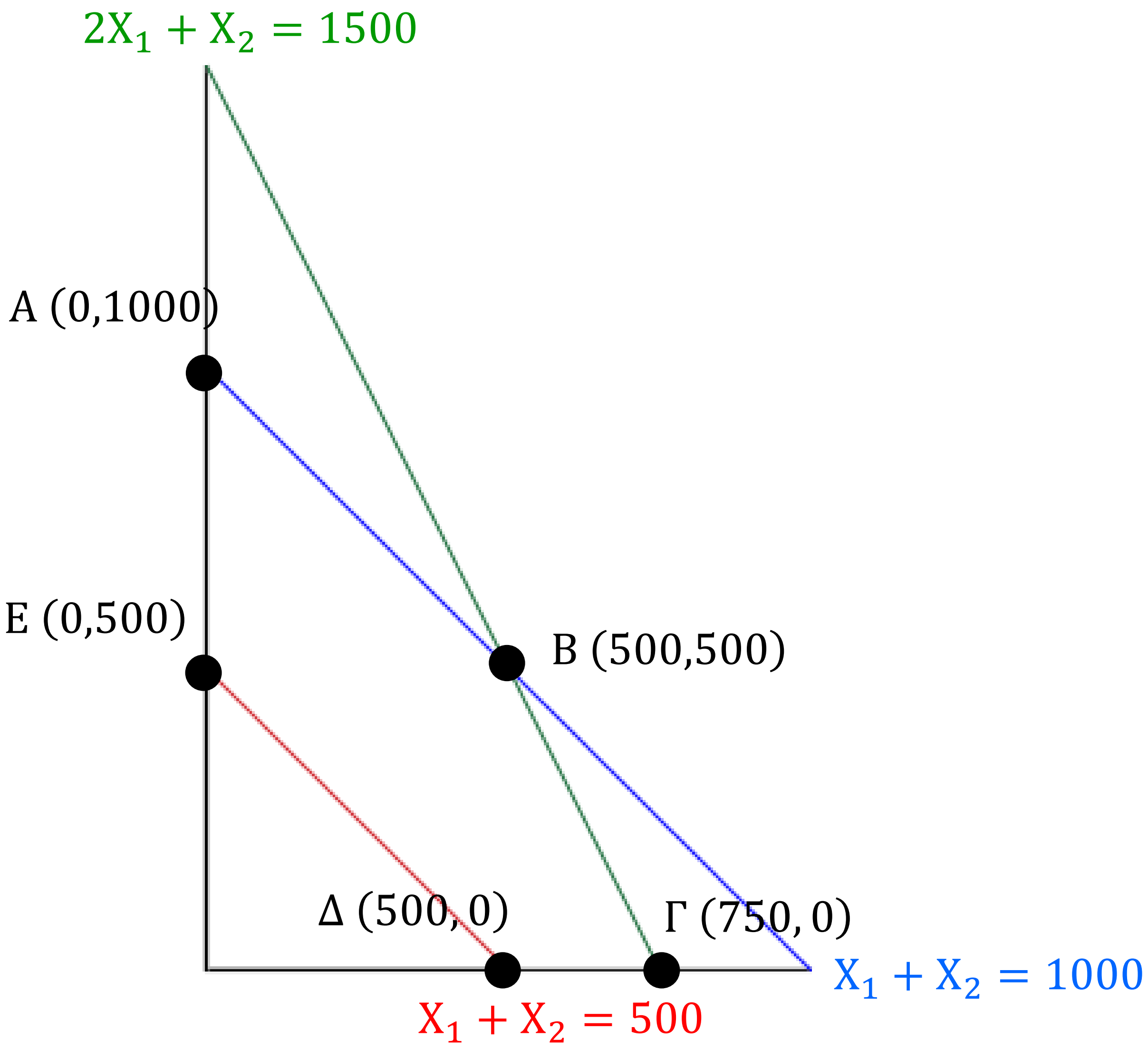
$5X_1 + 3X_2 + 2(1000 - X_1 - X_2) = 3X_1 + X_2 + 2000$

$$max[-f(X_1, X_2)] = -3X_1 - X_2$$

$$\upsilon\pi\acute{o}$$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\leq 1000 \\ -X_1 - X_2 &\leq -500 \\ 2X_1 + X_2 &\leq 1500 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Γραφική μέθοδος



$-f(500{,}500) = -2000$

$-f(0{,}1000) = -1000$

$-f(0{,}500) = -500$

$-f(500, 0) = -1500$

$-f(750, 0) = -2250$

$X_1 = 0, X_2 = 500, X_3 = 500$

Μέθοδος Simplex

- **Προβλήματα μεγιστοποίησης υπό περιορισμούς της μορφής ≤**
- **Αρχικό μητρώο**
  - Πραγματικές μεταβλητές = 0
  - Ελέγχουμε αν έχουν αρνητική τιμή οι συντελεστές της κάθε εξίσωσης → αν όχι τότε είμαστε στη βέλτιστη λύση
  - Οι βασικές μεταβλητές στην εξίσωση πρέπει να έχουν συντελεστή 0
- **Ο μεγαλύτερος αρνητικός συντελεστής στην εξίσωση 0 → μεταβλητή που εισέρχεται ως βασική στην επόμενη επανάληψη (στήλη στροφέας)**

Μέθοδος Simplex

- **if(Δεξιά πλευρά εξίσωσης 1,2,3,…>0) then**
  - Δεξιά πλευρά εξίσωσης 1,2,3,…>0 / στήλη στροφέα
  - Ο μικρότερος λόγος → μεταβλητή που εξέρχεται (σειρά στροφέας)
- **Τομές**
  - Στήλης στροφέα και σειράς στροφέα → αριθμός στροφέα
  - Στήλης στροφέα και οποιασδήποτε σειράς → συντελεστής στήλης στροφέα
- **Συμπληρώνουμε πρώτα τη νεοεισερχόμενη μεταβλητή (σειρά)**
  - νέα σειρά στροφέας = παλιά σειρά στροφέας / αριθμός στροφέας
- **Για τις υπόλοιπες σειρές**
  - νέα σειρά = παλιά σειρά – συντελεστής στήλης στροφέα x νέα σειρά στροφέας
- **Τελικές τιμές**
  - Η δεξιά πλευρά της εξίσωσης

Παράδειγμα

μεταβλητές

X_1, X_2

περιορισμοί

$X_1, X_2 \geq 0$

$3X_1 + 4X_2 \leq 600$

$7X_1 + 5X_2 \leq 1000$

$3X_1 + 9X_2 \leq 1200$

συνάρτηση στόχος

$f(X_1, X_2) = 40000X_1 + 65000X_2$

$max[f(X_1, X_2)]$

Δυναμικός προγραμματισμός

- Διάσπαση του προβλήματος σε στάδια
- Σε κάθε στάδιο υπάρχουν ορισμένες καταστάσεις
- Λαμβάνονται αποφάσεις σε κάθε στάδιο και διενεργούνται διαδοχικά
- Κάθε απόφαση συνδέεται με το «κόστος» του προβλήματος
- Η νέα διαμορφωμένη κατάσταση ορίζεται σαν υφιστάμενη σε κάθε στάδιο
- Τελικός στόχος → ελαχιστοποίηση «κόστους»

Δυναμικός προγραμματισμός

πύργος του Ανόι

Πηγή: *https://en.wikipedia.org*

Μη γραμμικός προγραμματισμός

μαθηματικές σχέσεις

- Πολλαπλασιαστές Lagrange
- Μέθοδος συζυγών διευθύνσεων
- Μέθοδος συζυγών κλίσεων
- Μέθοδος Quasi Newton
- …

Πολλαπλασιαστές Lagrange

$$\mu\varepsilon\gamma\iota\sigma\tau o\pi o\text{ί}\eta\sigma\eta\ f(x,y)\ \upsilon\pi\text{ό}\ g(x,y)$$

Πολλαπλασιαστές Lagrange

$$\mu\varepsilon\gamma\iota\sigma\tau\sigma\pi\sigma\acute{\iota}\eta\sigma\eta\ f(x,y)\ \upsilon\pi\acute{o}\ g(x,y)$$

$$\downarrow$$

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

Πολλαπλασιαστές Lagrange

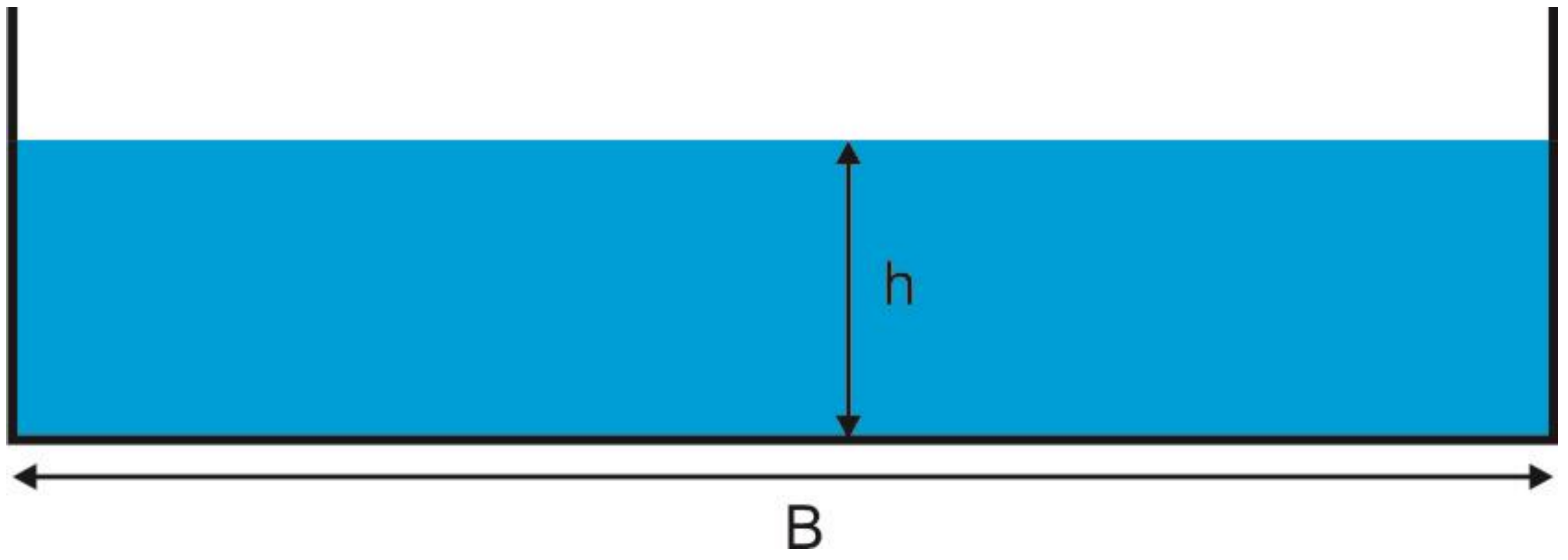
$$μεγιστοποίηση\ f(x, y)\ υπό\ g(x, y)$$

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

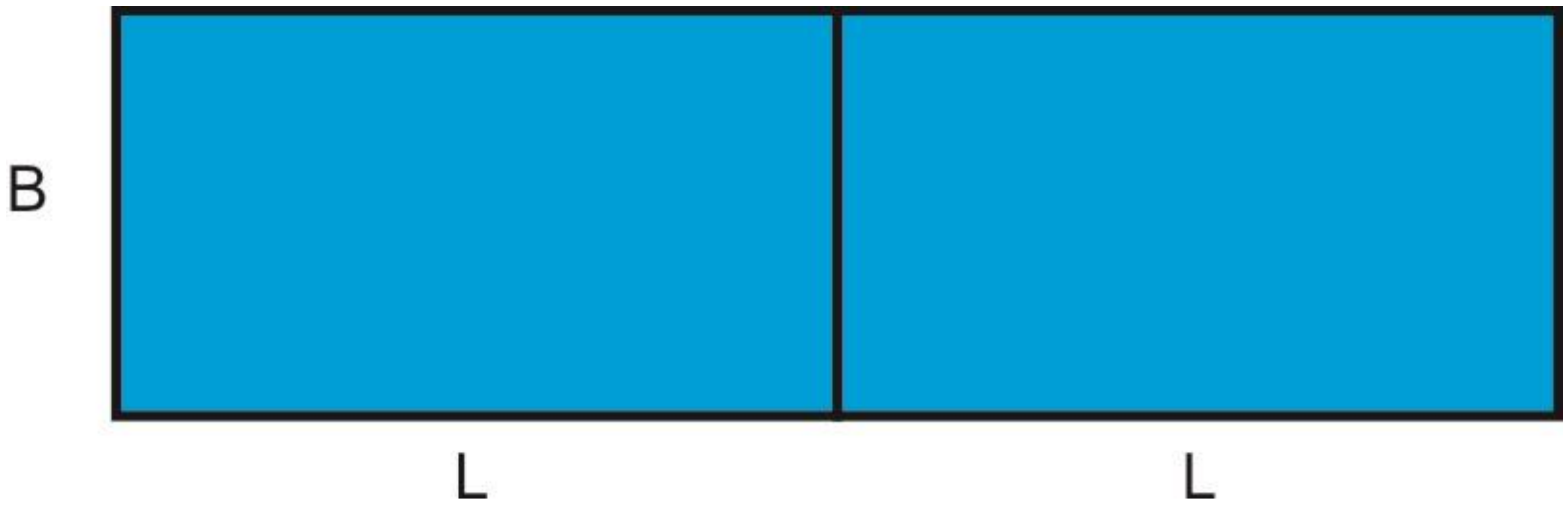
Παράδειγμα Ι

υπολογισμός βέλτιστης διατομής



Παράδειγμα ΙΙ

υπολογισμός βέλτιστων διαστάσεων δεξαμενής



Μη γραμμικός προγραμματισμός

εξελικτικοί αλγόριθμοι

- Γενετικοί αλγόριθμοι
- Προσομοιωμένη ανόπτηση
- Αποικίες μυρμηγκιών
- Μέθοδος σμήνους
- Μέθοδοι αρμονίας
- …

Μη γραμμικός προγραμματισμός

εξελικτικοί αλγόριθμοι

- Συνάρτηση-στόχος → δεν είναι συνεχής, δεν παραγωγίζεται
- Πολλαπλά ακρότατα → δε διασφαλίζεται εύκολα το ολικό βέλτιστο με τις συμβατικές μεθόδους
- Αδυναμία μαθηματικοποίησης → αποτελέσματα αριθμητικών μοντέλων

Γενετικοί αλγόριθμοι

- **Μέθοδος για προβλήματα βελτιστοποίησης η οποία είναι εμπνευσμένη στη διαδικασία φυσικής επιλογής και η οποία μιμείται τη βιολογική εξέλιξη**
  - Προβλήματα με περιορισμούς
  - Προβλήματα χωρίς περιορισμούς

Θεωρία εξέλιξης

- **Αυξάνεται η ικανότητα ενός είδους να επιβιώνει στο περιβάλλον**
  - Προσαρμογή
- **Καθώς αναπαράγεται ο πληθυσμός η ικανότητα αυτή μεταφέρεται στις επόμενες γενιές**
  - Φυσική επιλογή

Αναλογία

- **Άτομα (χρωμοσώματα) → πιθανές λύσεις**
  - Χρωμοσώματα → γονίδια
- **Φάσμα λύσεων → πληθυσμός**
- **Ικανότητα επιβίωσης → «καλή» απόδοση σε σχέση με τη συνάρτηση-στόχο**
- **Αναπαραγωγή λύσεων → βέλτιστη τιμή**
  - Γονίδιο → επηρεάζει την κληρονομικότητα

Βήματα

- **Δημιουργία αρχικού πληθυσμού**
- **Υπολογισμός συνάρτησης-στόχου**
- **Εξέλιξη πληθυσμού με βάση τους γενετικούς τελεστές**
  - Επιλογή
  - Διασταύρωση
  - Μετάλλαξη
- **Νέος πληθυσμός**
- **Επανάληψη διαδικασίας**

Γενετικοί τελεστές

- **Επιλέγονται τα καλύτερα άτομα του πληθυσμού**
- **Διασταύρωση**
  - Συνδυάζονται τα χρωμοσώματα δύο ατόμων
- **Μετάλλαξη**
  - Αλλαγή γονιδίων

Υβριδικά μοντέλα

- Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι δε βρίσκουν πάντα τη βέλτιστη λύση
- Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι δε βρίσκουν καν την ίδια λύση κάθε φορά που τρέχουν (!) → στοχαστικό κομμάτι
- Ολικό βέλτιστο → κατάλληλος συνδυασμός εξελικτικού αλγόριθμου και μεθόδου τοπικού βέλτιστου

Η παρούσα διάλεξη πήρε έμπνευση και παραδείγματα από το βιβλίο «Υδατικοί Πόροι» του Α. Ψιλοβίκου (2020, Εκδόσεις Τζιόλα).

Επίσης, από τις διαλέξεις του μαθήματος «Διαχείριση Υδατικών Πόρων» των Πολιτικών Μηχανικών του ΕΜΠ (διδάσκοντας Χ. Μακρόπουλος).