ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ

Αριθμητικές μέθοδοι

Δρ. Βασίλης Μπέλλος

Εισαγωγή

- **Ρυθμός μεταβολής → παράγωγος**
- **Φυσικά φαινόμενα → συναρτήσεις**
- **Συναρτήσεις**
  - Μεταβλητές
  - Ρυθμός μεταβολής

Εισαγωγή

- **Ρυθμός μεταβολής → παράγωγος**
- **Φυσικά φαινόμενα → συναρτήσεις**
- **Συναρτήσεις**
  - Μεταβλητές
  - Ρυθμός μεταβολής

Διαφορικές Εξισώσεις

Διαφορικές εξισώσεις

- **Συνήθεις (ΣΔΕ)**
  - εξαρτώνται από μία ανεξάρτητη μεταβλητή

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$

- **Μερικές (ΜΔΕ)**
  - εξαρτώνται από πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές

$$\frac{\partial f}{\partial t} + 5\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

- **Γραμμική**
  - πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$

- **Μη γραμμική**
  - πολυώνυμο μεγαλύτερου βαθμού

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 5 = 2y$$

- **Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων**

Συμβολισμοί

- **Leibniz →** $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$
- **Lagrange →** $f', f'', \ldots$
- **Newton →** $\dot{f}, \ddot{f}, \ldots$
- **Euler →** $D_x y, {D_x}^2 y, \ldots$

Μοναδικότητα λύσης

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Μοναδικότητα λύσης

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \longrightarrow y(x) = \int f(x, y)dx + C$$

Μοναδικότητα λύσης

σταθερά

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \longrightarrow y(x) = \int f(x,y)dx + C$$

Μοναδικότητα λύσης

σταθερά

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \xrightarrow{\text{Άπειρες Λύσεις}} y(x) = \int f(x,y)dx + C$$

Καλώς τοποθετημένο πρόβλημα

- **Η λύση**
  - Υπάρχει
  - Είναι μοναδική
  - Εξαρτάται από τα δεδομένα

εξισώσεις

Καλώς τοποθετημένο πρόβλημα

- **Η λύση**
  - Υπάρχει
  - Είναι μοναδική
  - Εξαρτάται από τα δεδομένα

εξισώσεις

- **Η υπολογιστική λύση**
  - Υπάρχει
  - Είναι μοναδική
  - Εξαρτάται από τα δεδομένα

αριθμητική επίλυση εξισώσεων

Πρόβλημα αρχικής τιμής

- **Στην πράξη μας ενδιαφέρει η λύση σε ένα διάστημα**

$$x \in [a, b]$$

Πρόβλημα αρχικής τιμής

- **Στην πράξη μας ενδιαφέρει η λύση σε ένα διάστημα**

$$x \in [a, b]$$

- **Μετασχηματισμός → βρες *y*(*x*) στο διάστημα [*a*,*b*]**

Πρόβλημα αρχικής τιμής

- **Στην πράξη μας ενδιαφέρει η λύση σε ένα διάστημα**

$$x \in [a, b]$$

- **Μετασχηματισμός → βρες *y*(*x*) στο διάστημα [*a*,*b*]**

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad y(a) = y_0$$

Πρόβλημα αρχικής τιμής

- **Στην πράξη μας ενδιαφέρει η λύση σε ένα διάστημα**

$$x \in [a, b]$$

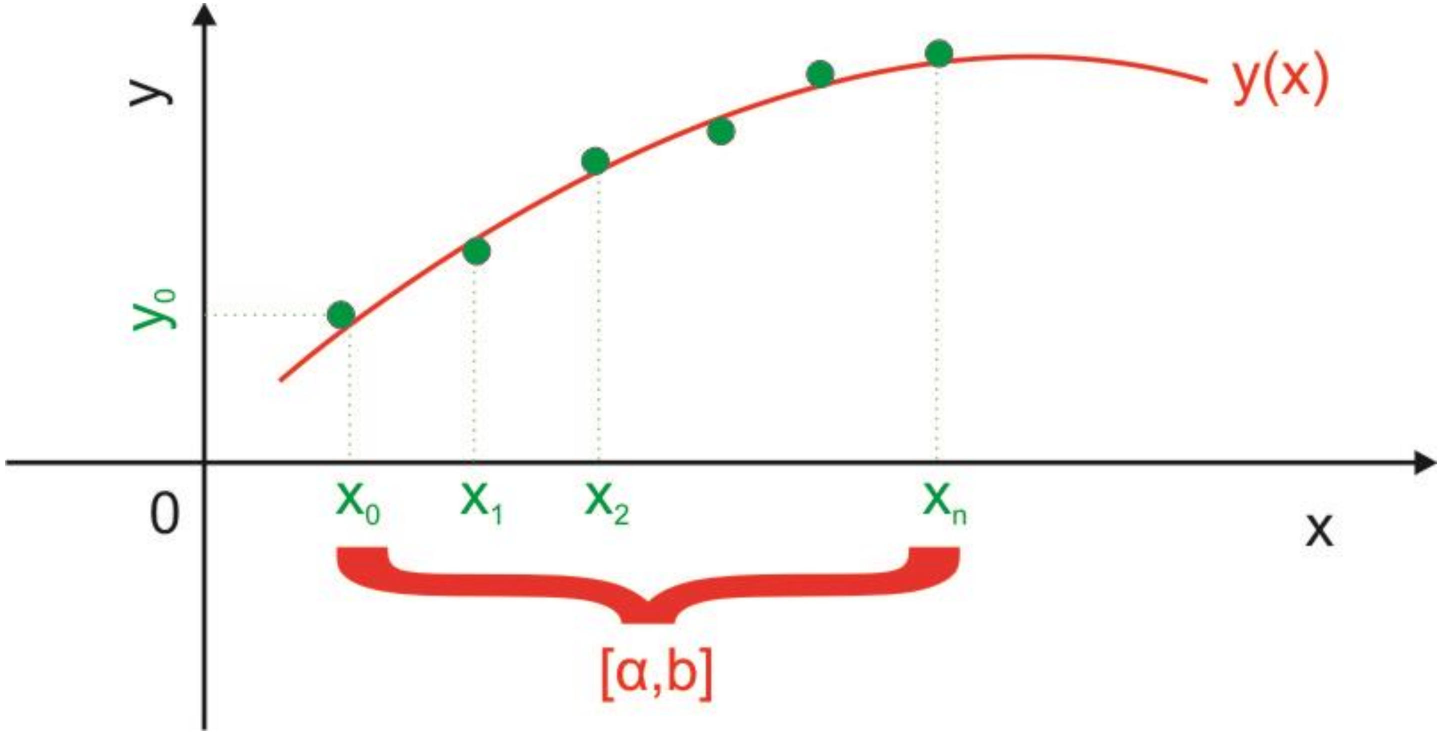
- **Μετασχηματισμός → βρες *y*(*x*) στο διάστημα [*a*,*b*]**

αρχική τιμή

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad y(a) = y_0$$

Αριθμητική επίλυση

- **Αναλυτική λύση → *y(x)*=... οποιαδήποτε συνάρτηση**
- **Αριθμητική λύση → $y_1, y_2, \ldots y_n$**
  - $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2), \ldots, y_n = y(x_n)$



Ακρίβεια επίλυσης

- **Επιλογή x_1, x_2, …**

Ακρίβεια επίλυσης

- Επιλογή x_1, x_2, … → $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ($i=1,2,\ldots n$)

Ακρίβεια επίλυσης

- **Επιλογή x_1, x_2, … → $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(i=1,2,\ldots n)$**
  - σταθερό ή μεταβλητό Δx

Ακρίβεια επίλυσης

- **Επιλογή x_1, x_2, … → $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ (i=1,2,…n)**
  - σταθερό ή μεταβλητό Δx → ανάλογα το πρόβλημα

Ακρίβεια επίλυσης

- **Επιλογή x_1, x_2, … → $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ (i=1,2,…n)**
    - σταθερό ή μεταβλητό Δx → ανάλογα το πρόβλημα

- **Τρόπος υπολογισμού y_1, y_2,**

Ακρίβεια επίλυσης

- **Επιλογή x_1, x_2, … → $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ($i=1,2,\ldots n$)**
  - σταθερό ή μεταβλητό Δx → ανάλογα το πρόβλημα
- **Τρόπος υπολογισμού y_1, y_2, … → σχήματα ολοκλήρωσης**

Ακρίβεια επίλυσης

- **Επιλογή x_1, x_2, … → $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ($i=1,2,\ldots n$)**
  - σταθερό ή μεταβλητό Δx → ανάλογα το πρόβλημα
- **Τρόπος υπολογισμού y_1, y_2, … → σχήματα ολοκλήρωσης**
  - **ρητά** $y_{i+1} = G(x, y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \ldots)$
  - **πεπλεγμένα** $y_{i+1} = G(x, y_{i+1}, y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \ldots)$

Σειρές Taylor

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}\right]$$

Σειρές Taylor

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} \right]$$

ανάπτυγμα σειράς

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + \Delta x \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{d^3 y}{dx^3} + \cdots \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{d^n y}{dx^n}$$

Σειρές Taylor

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} \right]$$

ανάπτυγμα σειράς

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + \Delta x \frac{dy}{dx} + \boxed{\frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{d^3 y}{dx^3} + \cdots \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{d^n y}{dx^n}} \quad O(\Delta x^2)$$

Σειρές Taylor

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} \right]$$

ανάπτυγμα σειράς

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + \Delta x \frac{dy}{dx} + \boxed{\frac{\Delta x^2}{2!}\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{d^3 y}{dx^3} + \cdots \frac{\Delta x^n}{n!}\frac{d^n y}{dx^n}}$$

O(Δx²)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

Πεπερασμένες διαφορές

- **Εμπρόσθια διαφορά** → $\frac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}=\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}$

- **Οπίσθια διαφορά** → $\frac{y(x_0)-y(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=\frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}$

- **Κεντρική διαφορά** → $\frac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2\Delta x}$

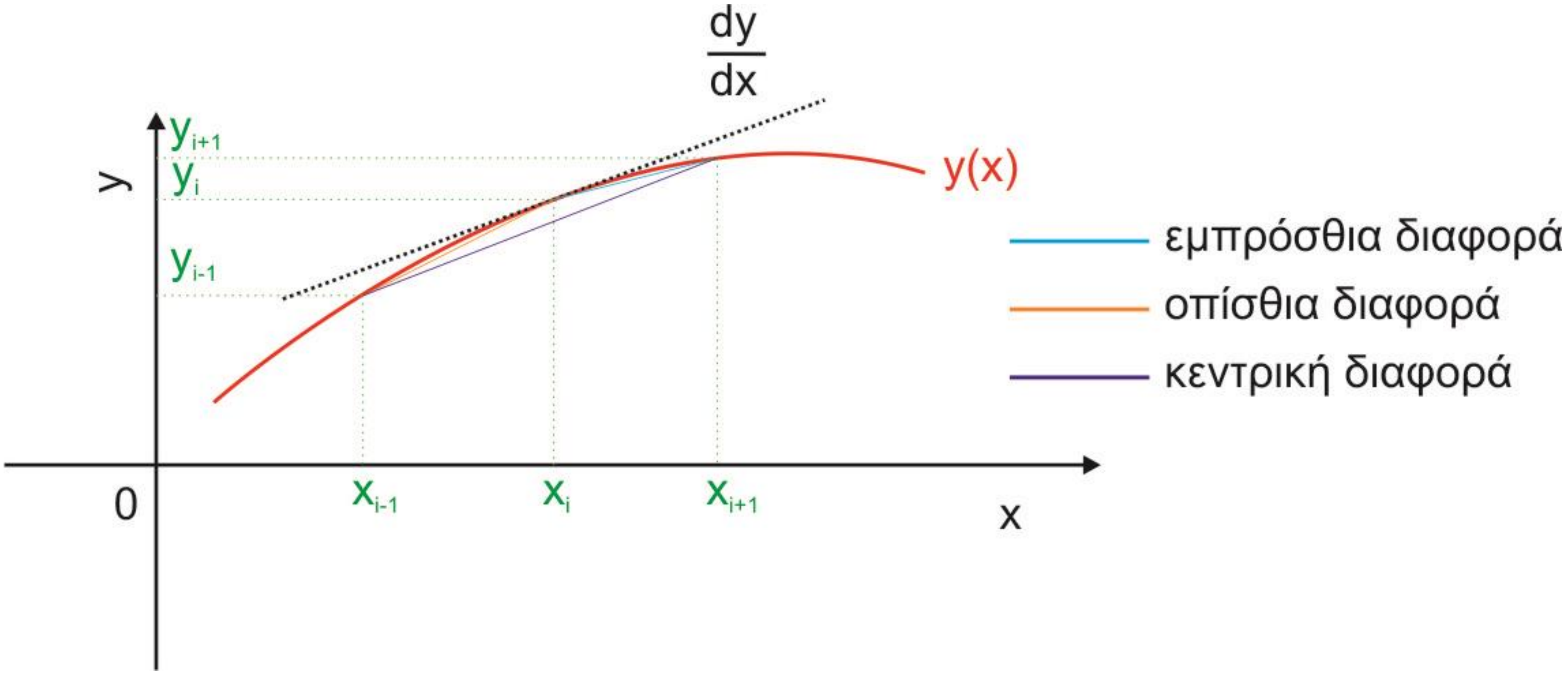
Πεπερασμένες διαφορές

- **Εμπρόσθια διαφορά** → $\frac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}=\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}$
  - ακρίβεια πρώτης τάξης (σφάλμα αποκοπής $O(\Delta x)$)

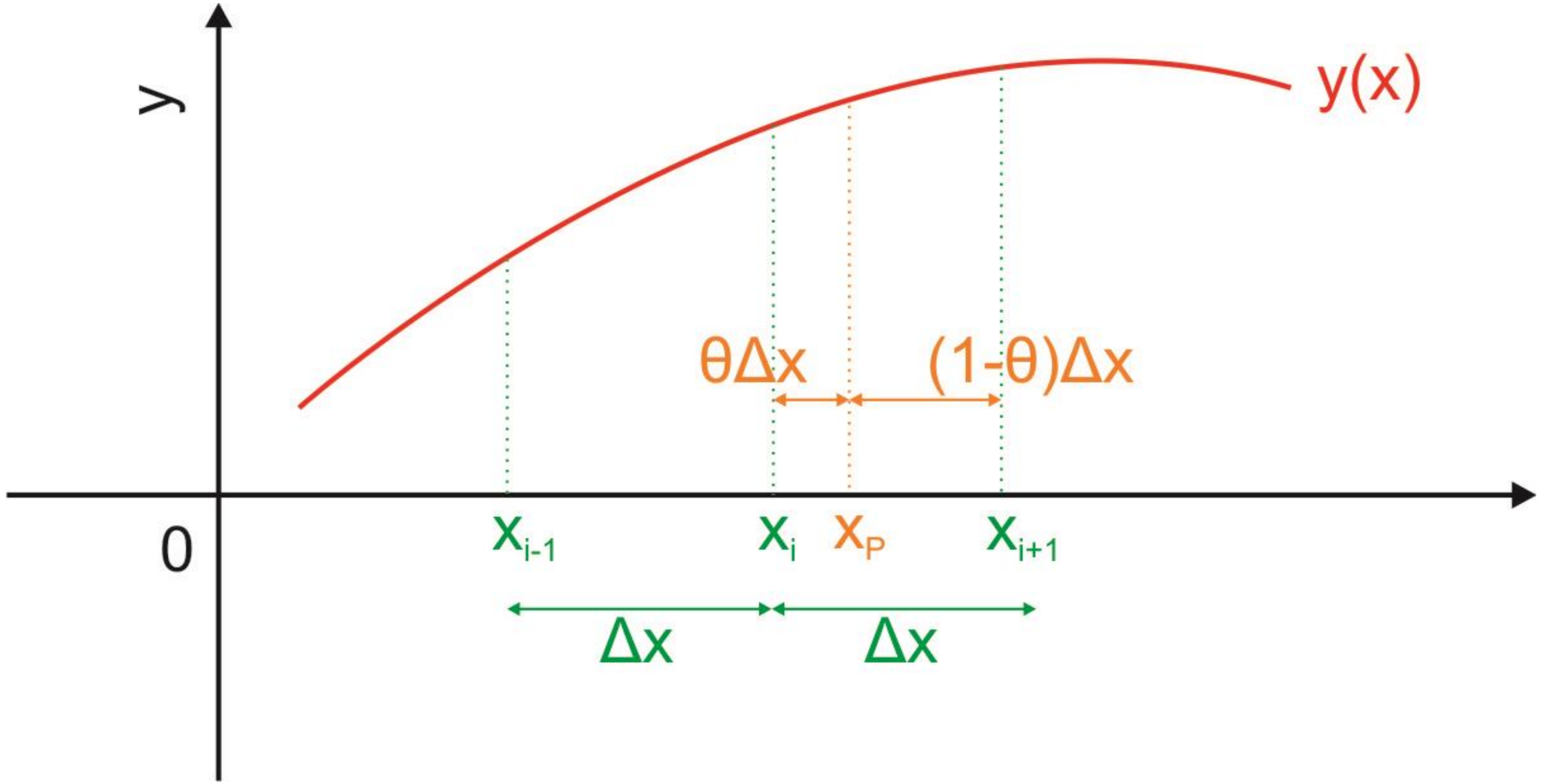
- **Οπίσθια διαφορά** → $\frac{y(x_0)-y(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=\frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}$
  - ακρίβεια πρώτης τάξης (σφάλμα αποκοπής $O(\Delta x)$)

- **Κεντρική διαφορά** → $\frac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2\Delta x}$
  - ακρίβεια δεύτερης τάξης (σφάλμα αποκοπής $O(\Delta x^2)$)

Πεπερασμένες διαφορές



Αριθμητικά σχήματα



Αριθμητικά σχήματα

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Αριθμητικά σχήματα

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \xrightarrow{\text{εμπρόσθια διαφορά}} y_{i+1} = y_i + \Delta x f(x_P, y_P)$$

Αριθμητικά σχήματα

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \xrightarrow{\text{εμπρόσθια διαφορά}} y_{i+1} = y_i + \Delta x f(x_P, y_P)$$

$$\theta = \frac{x_P - x_i}{\Delta x}$$

Αριθμητικά σχήματα

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \xrightarrow{\text{εμπρόσθια διαφορά}} y_{i+1} = y_i + \Delta x f(x_P, y_P)$$

$$\theta = \frac{x_P - x_i}{\Delta x} \xrightarrow{\text{γραμμική παρεμβολή}} f(x_P, y_P) = (1 - \theta) f(x_i, y_i) + \theta f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Αριθμητικά σχήματα

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad &\xrightarrow{\text{εμπρόσθια διαφορά}} \quad y_{i+1} = y_i + \Delta x f(x_P, y_P) \\
\theta = \frac{x_P - x_i}{\Delta x} \quad &\xrightarrow{\text{γραμμική παρεμβολή}} \quad f(x_P, y_P) = (1-\theta) f(x_i, y_i) + \theta f(x_{i+1}, y_{i+1})
\end{aligned}\right\}$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x[(1-\theta) f(x_i, y_i) + \theta f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

Αριθμητικά σχήματα

- ***θ*=0 → εμπρόσθια μέθοδος Euler**
  - ρητό

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x f(x_i, y_i)$$

- ***θ*=1/2 → κανόνας τραπεζίου**
  - πεπλεγμένο

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \left[\frac{1}{2} f(x_i, y_i) + \frac{1}{2} f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$$

- ***θ*=2/3 → μέθοδος Galerkin**
  - πεπλεγμένο

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \left[\frac{1}{3} f(x_i, y_i) + \frac{2}{3} f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$$

- ***θ*=1 → οπίσθια μέθοδος Euler**
  - πεπλεγμένο

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Σύστημα ΣΔΕ

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_N)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_N)$$

$$\cdots$$

$$\frac{dy_N}{dx} = f_N(x, y_1, y_2, \cdots, y_N)$$

Σύστημα ΣΔΕ

[*α*,*b*]

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1\left(x, y_1, y_2, \cdots, y_N\right) \\
\frac{dy_2}{dx} &= f_2\left(x, y_1, y_2, \cdots, y_N\right) \\
&\cdots \\
\frac{dy_N}{dx} &= f_N\left(x, y_1, y_2, \cdots, y_N\right)
\end{aligned}\right\}
\qquad
\begin{aligned}
y_1(a) &= y_{1,0} \\
y_2(a) &= y_{2,0} \\
&\cdots \\
y_N(a) &= y_{N,0}
\end{aligned}$$

Σύστημα ΣΔΕ

$$\frac{d\mathbf{y}(x)}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \xrightarrow{[\alpha, b]} \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0$$

$$\mathbf{y}(x) = \begin{Bmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_N(x) \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{Bmatrix} f_1(x, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ f_N(x, \mathbf{y}) \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{y}_0 = \begin{Bmatrix} y_{1,0} \\ \vdots \\ y_{N,0} \end{Bmatrix}$$

Πρόβλημα οριακής τιμής

- **Το διάνυσμα y ορίζεται για το ίδιο *x* (π.χ. στη θέση α)**
  - πρόβλημα αρχικής τιμής
- **Το διάνυσμα y ορίζεται για διαφορετικά x (π.χ. $y_1(a)=y_\alpha$ και $y_N(b)=y_b$**
  - πρόβλημα οριακής τιμής
- **Μέθοδοι επίλυσης**
  - πεπερασμένες διαφορές
  - μέθοδος shooting

Παραδείγματα

- **Υδραυλική ανοιχτών αγωγών**
  - διόδευση μέσω ταμιευτήρα → ΣΔΕ
  - βαθμιαίως μεταβαλλόμενη ροή → σύστημα ΣΔΕ
- **Υδραυλική κλειστών αγωγών**
  - μόνιμη ομοιόμορφη ροή → ΣΔΕ
- **Υπόγεια υδραυλική**
  - Νόμος Darcy → ΣΔΕ
- **Περιβαλλοντική υδραυλική**
  - κύκλος του οξυγόνου → ΣΔΕ
  - κύκλος του αζώτου → ΣΔΕ

Παραδείγματα

- **Υδραυλική ανοιχτών αγωγών**
  - διόδευση μέσω ταμιευτήρα → ΣΔΕ
  - βαθμιαίως μεταβαλλόμενη ροή → σύστημα ΣΔΕ
- **Υδραυλική κλειστών αγωγών**
  - μόνιμη ομοιόμορφη ροή → ΣΔΕ
- **Υπόγεια υδραυλική**
  - Νόμος Darcy → ΣΔΕ
- **Περιβαλλοντική υδραυλική**
  - κύκλος του οξυγόνου → ΣΔΕ
  - κύκλος του αζώτου → ΣΔΕ

προβλήματα σταθερής κατάστασης (ολοκλήρωση στο χρόνο)

Μερικές διαφορικές εξισώσεις

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + D\frac{\partial f}{\partial x} + E\frac{\partial f}{\partial y} + Gf + H = 0$$

- **Ελλειπτικές** → B^2-4AC <0
- **Παραβολικές** → B^2-4AC =0
- **Υπερβολικές** → B^2-4AC >0

Γενική μορφή

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+D\frac{\partial f}{\partial x}+E\frac{\partial f}{\partial y}+Gf+H=0$$

- Ελλειπτικές → B^2-4AC <0
- Παραβολικές → B^2-4AC =0
- Υπερβολικές → B^2-4AC >0

ανάλογα με το φυσικό φαινόμενο

Βασικές αρχές ρευστομηχανικής

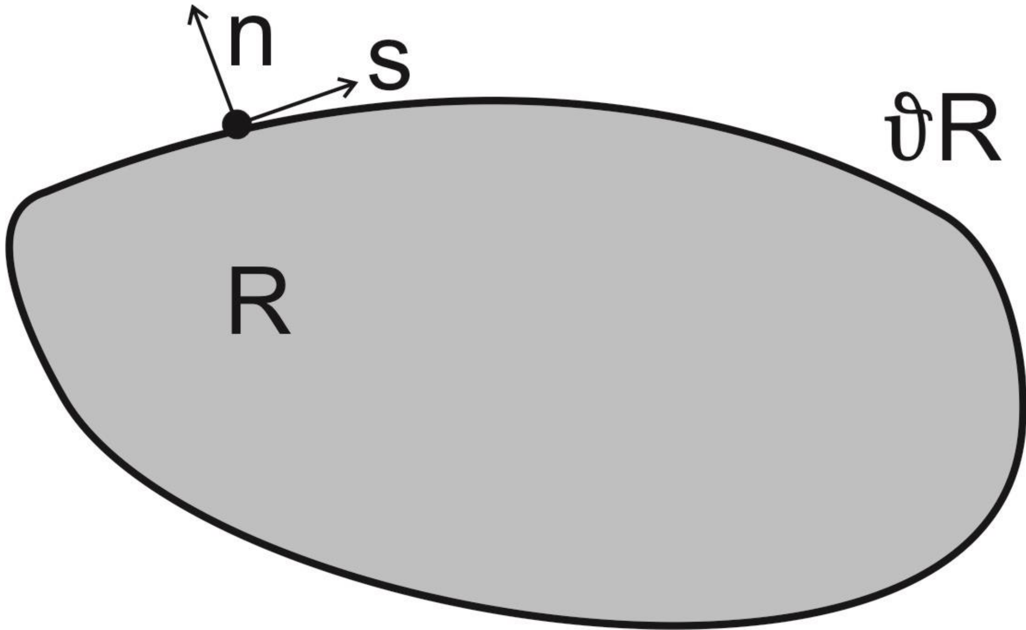
- **Lagrange**
  - Ο όγκος του ρευστού αποτελείται από στοιχειώδη σωματίδια
  - Υπολογίζονται οι μεταβλητές του σωματιδίου κατά την κίνηση του ρευστού
- **Euler**
  - Ορισμένο υπολογιστικό πεδίο
  - Υπολογίζονται οι μεταβλητές σε κάθε θέση κατά τη διάρκεια της κίνησης του ρευστού

Βασικές αρχές ρευστομηχανικής

- **Lagrange**
  - Ο όγκος του ρευστού αποτελείται από στοιχειώδη σωματίδια
  - Υπολογίζονται οι μεταβλητές του σωματιδίου κατά την κίνηση του ρευστού
- **Euler**
  - Ορισμένο υπολογιστικό πεδίο
  - Υπολογίζονται οι μεταβλητές σε κάθε θέση κατά τη διάρκεια της κίνησης του ρευστού

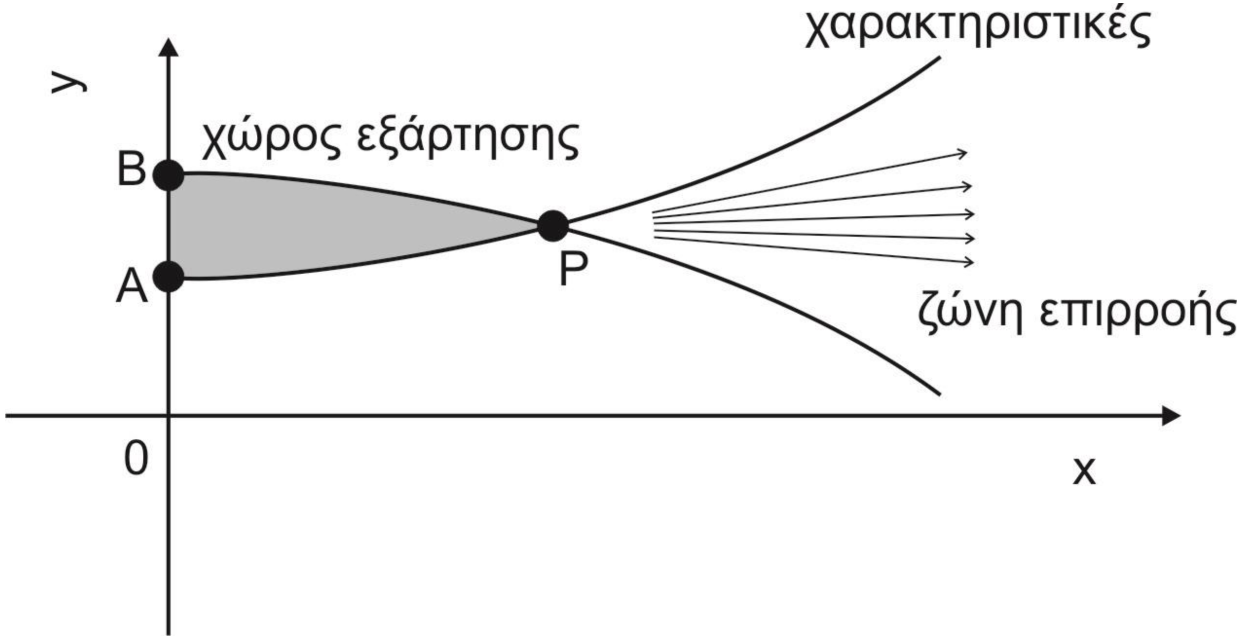
Οριακές συνθήκες

- **Υπολογιστικό πεδίο R**
- **Όρια υπολογιστικού πεδίου ϑR**
- **Οριακές συνθήκες**
  - Dirichelet → *u=f* στο όριο ∂R
  - Neuman → *∂u/∂n=f* ή *∂u/∂s=g* στο όριο ∂R
  - Robin → *∂u/∂n*+k*u=f* στο όριο ∂R



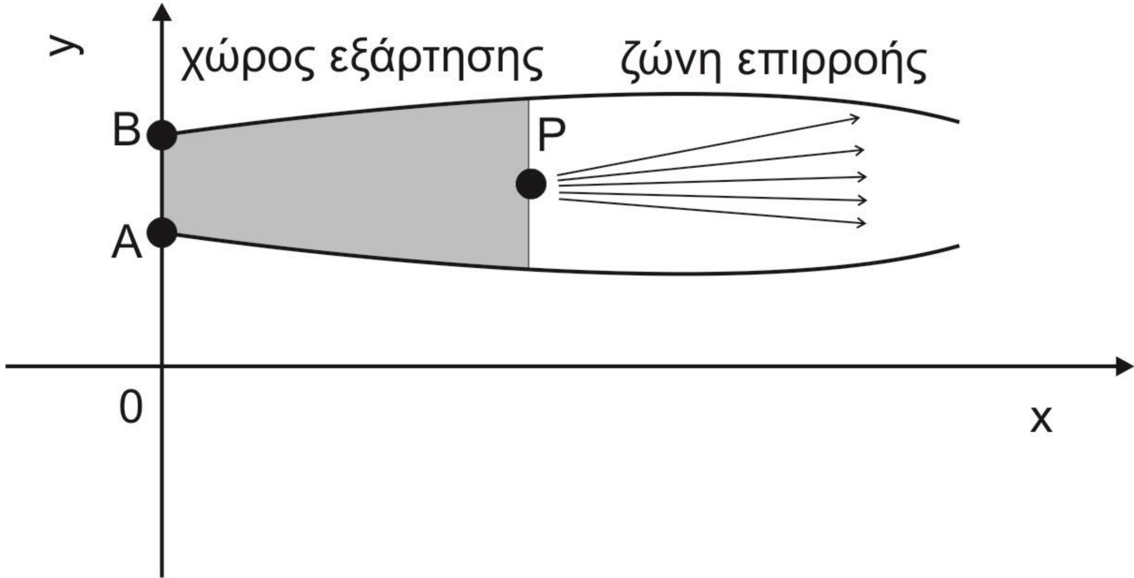
Υπερβολικές εξισώσεις

- **Διάδοση σήματος προς διάφορες κατευθύνσεις**
- **Εξίσωση κύματος** $$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$
- **Υδραυλική** **→ μη μόνιμη ροή**
  - Ανοιχτοί αγωγοί
  - Κλειστοί αγωγοί



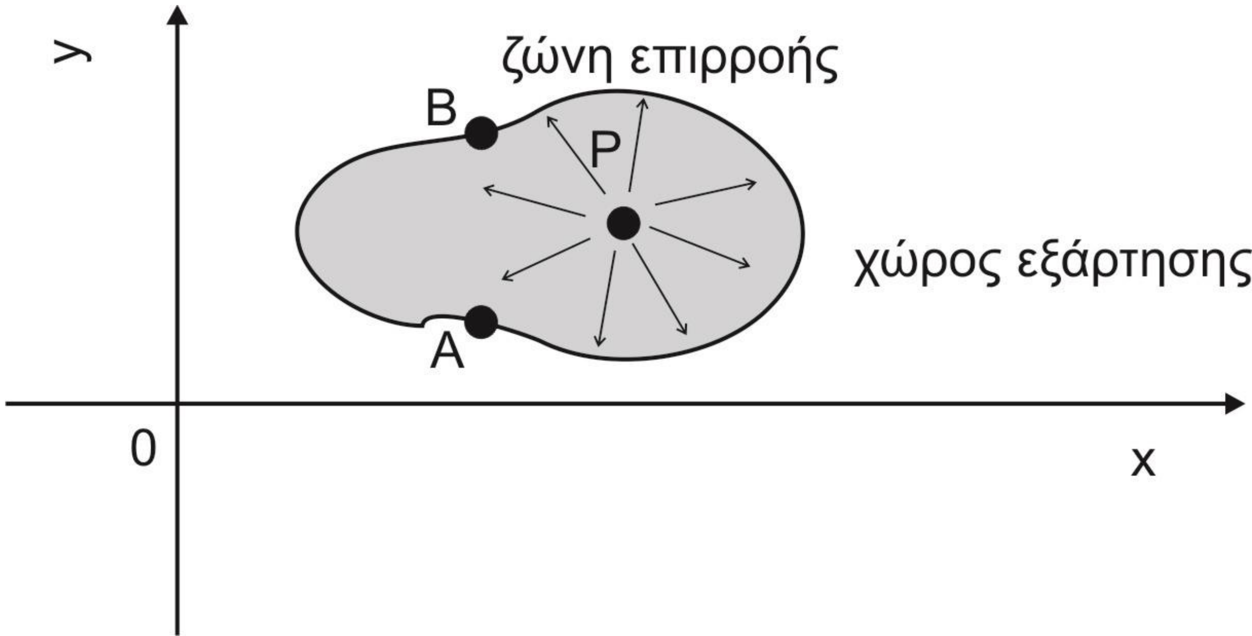
Παραβολικές εξισώσεις

- **Διάχυση/απόσβεση ενός φυσικού μεγέθους**
- **Εξίσωση διάχυσης** $\dfrac{\partial f}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
- **Υδραυλική** → **μη μόνιμη ροή**
  - Ροή σε πορώδες μέσο
  - Διάχυση (περιβαλλοντική υδραυλική)



Ελλειπτικές εξισώσεις

- **Διαδικασία ισορροπίας (αρχή ελαχιστοποίησης ενέργειας)**
- **Εξίσωση Laplace** $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$
- **Υδραυλική → μόνιμη ροή**
  - Ιδανικό ρευστό
  - Ροή σε πορώδες μέσο



Μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης

- **Πεπερασμένες διαφορές**
  - Σειρές Taylor
- **Πεπερασμένα στοιχεία**
  - Μέθοδος Galerkin
- **Πεπερασμένοι όγκοι**
  - Θεώρημα απόκλισης

Πεπερασμένες διαφορές

- **Εμπρόσθια διαφορά** → $\frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$
  - ακρίβεια πρώτης τάξης (σφάλμα αποκοπής $O(\Delta x)$)
- **Οπίσθια διαφορά** → $\frac{y(x_0) - y(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}$
  - ακρίβεια πρώτης τάξης (σφάλμα αποκοπής $O(\Delta x)$)
- **Κεντρική διαφορά** → $\frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x}$
  - ακρίβεια δεύτερης τάξης (σφάλμα αποκοπής $O(\Delta x^2)$)

Ρητό αριθμητικό σχήμα

εμπρόσθια διαφορά στο χρόνο – οπίσθια στο χώρο (FTBS)

εξίσωση κύματος

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} = 0 \longrightarrow \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n}}{\Delta \mathrm{t}} + u\frac{f_i^{n} - f_{i-1}^{n}}{\Delta \mathrm{x}} = 0$$

αριθμός Courant (μετάθεση)

$$f_i^{n+1} = f_i^{n} - \frac{u\Delta \mathrm{t}}{\Delta \mathrm{x}}\left(f_i^{n} - f_{i-1}^{n}\right)$$

Ρητό αριθμητικό σχήμα

εμπρόσθια διαφορά στο χρόνο – κεντρική στο χώρο (FTCS)

εξίσωση διάχυσης

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = a \frac{f_{i+1}^n - 2 f_i^n + f_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

αριθμός Courant (διάχυση)

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{i+1}^n - 2 f_i^n + f_{i-1}^n\right)$$

Πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα

Crank Nicolson

εξίσωση κύματος

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \longrightarrow \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u\frac{1}{2}\left(\frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x}\right) = 0$$

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{u\Delta t}{4\Delta x}\left(f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1} + f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right)$$

Πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα

Crank Nicolson

εξίσωση διάχυσης

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}a\left(\frac{f_{i-1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n}{\Delta x^2}\right) = 0$$

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{i-1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1} + f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n\right)$$

Ρητά σχήματα

εξίσωση κύματος

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Lax

$$f_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n\right) - \frac{1}{2}\frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right)$$

Lax-Wendroff

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{1}{2}\frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{u\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n\right)$$

Leap Frog

$$f_i^{n+1} = f_i^{n-1} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right)$$

Κριτήρια σχημάτων

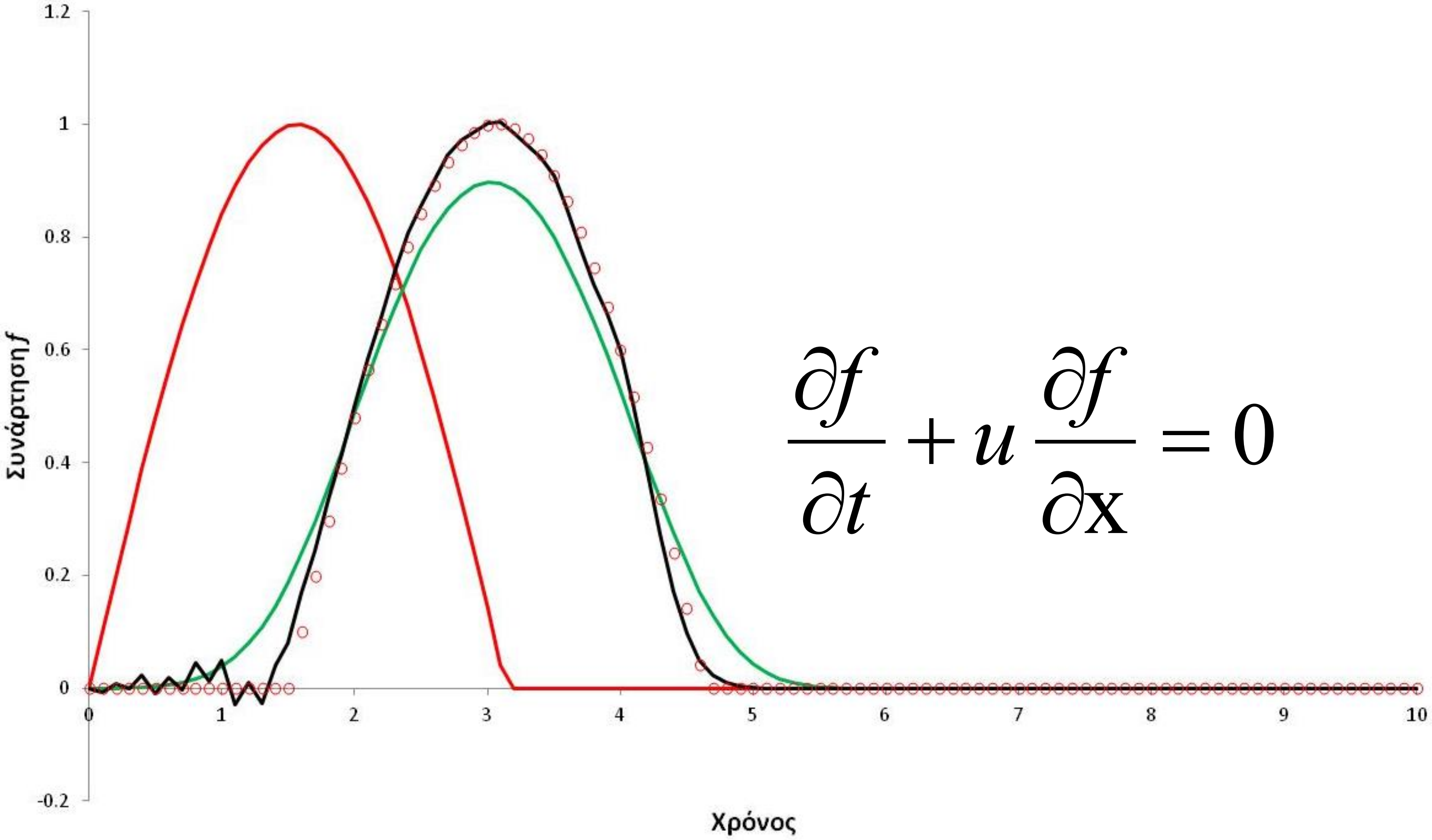
- **Συνέπειας**
  - ο τελεστής διαφορών τείνει προς το διαφορικό τελεστή όσο Δx, $\Delta t \rightarrow 0$
- **Σύγκλισης**
  - Η αριθμητική λύση τείνει προς την αναλυτική όσο Δx, $\Delta t \rightarrow 0$
- **Ευστάθειας**
  - σταθερό πλαίσιο σφαλμάτων, δε διογκώνονται καθώς $t \rightarrow \infty$
  - ρητά σχήματα → Courant (μετάθεση) < 1, Courant (διάχυση) < 0.5
  - πεπλεγμένα σχήματα → δεν υπάρχει κριτήριο ευστάθειας

Σφάλματα

- **Στρογγυλοποίησης**
  - Ο υπολογιστής κρατάει συγκεκριμένο αριθμό ψηφίων
  - Αύξηση ακρίβειας μεταβλητής (double precision)
  - Αλλαγή μονάδων (0.0001 m^3/s → 0.1 L/s)
- **Αποκοπής**
  - Διάχυσης (σφάλμα αποκοπής $O(\Delta x)$)
  - Διασποράς (σφάλμα αποκοπής $O(\Delta x^2)$)

Σφάλματα

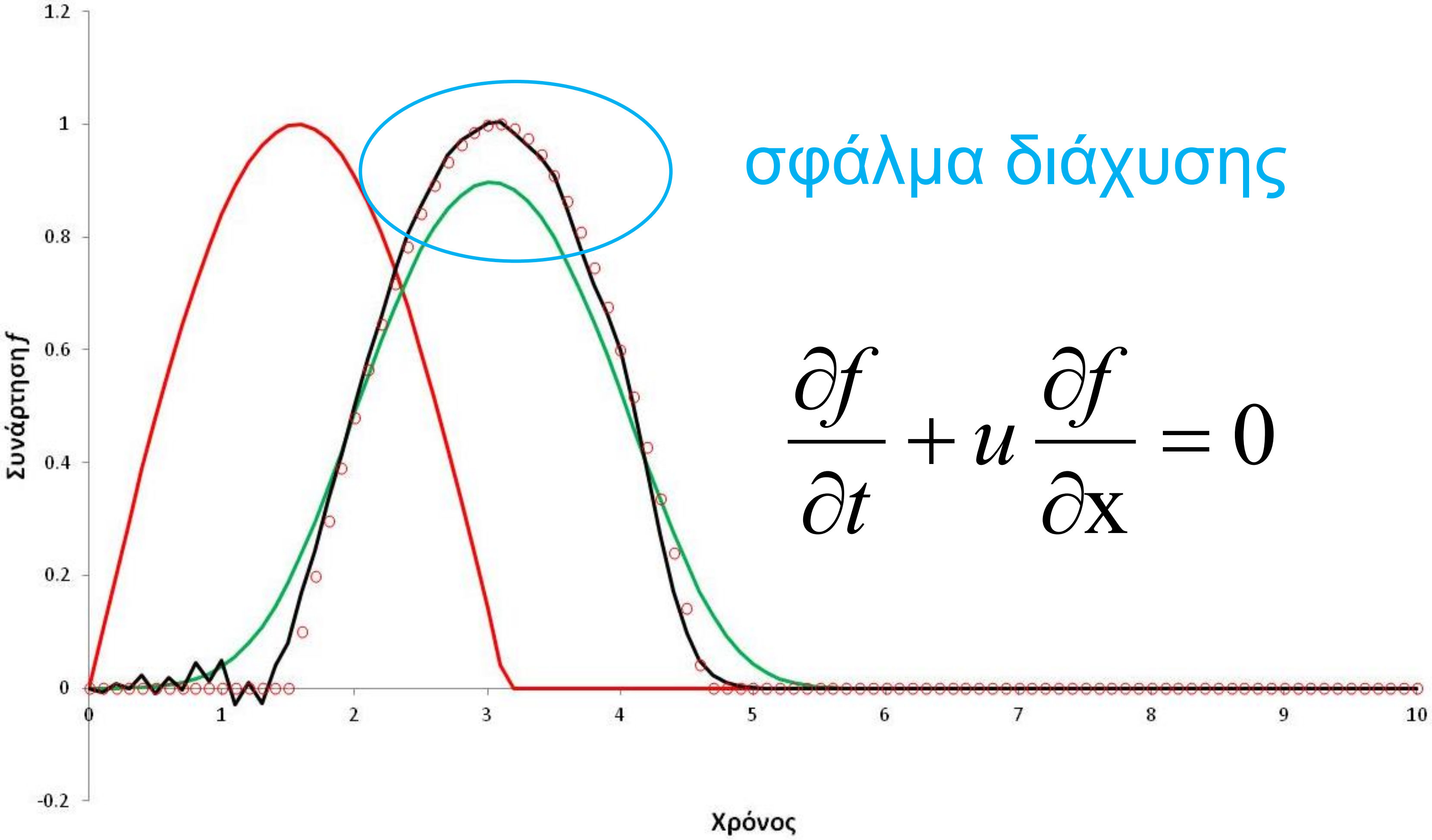
εξίσωση κύματος



$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\,\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} = 0$$

Σφάλματα

εξίσωση κύματος

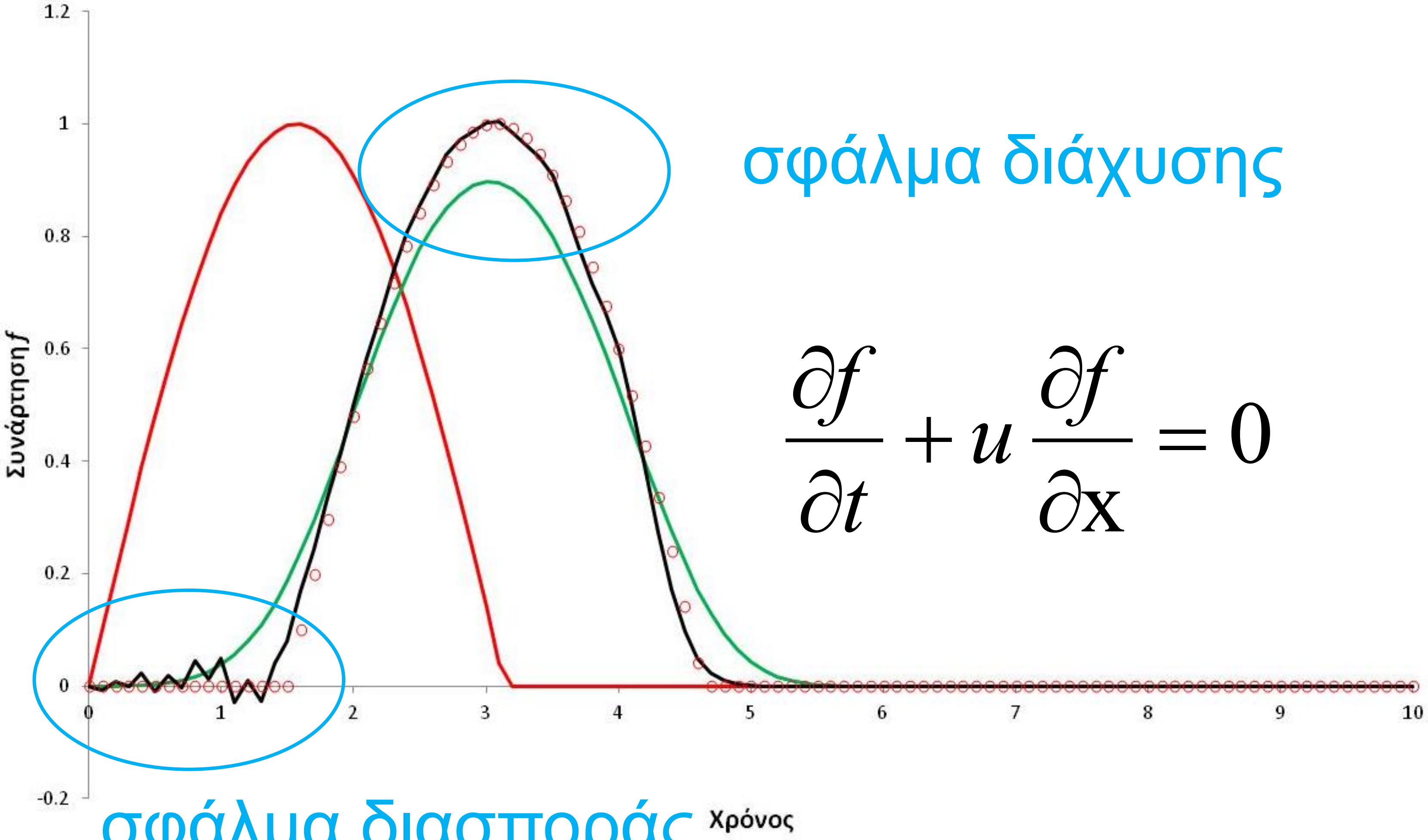


σφάλμα διάχυσης

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Σφάλματα

εξίσωση κύματος



σφάλμα διάχυσης

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

σφάλμα διασποράς

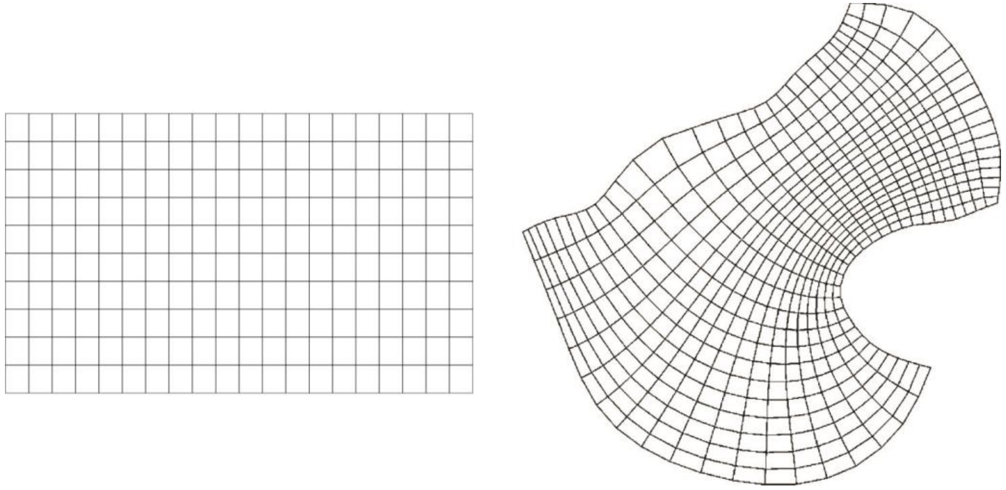
Διακριτοποίηση στο χώρο

- 1D εξισώσεις → κόμβοι
- 2D εξισώσεις → πλέγμα ή κάναβος
- 3D εξισώσεις → πλέγμα

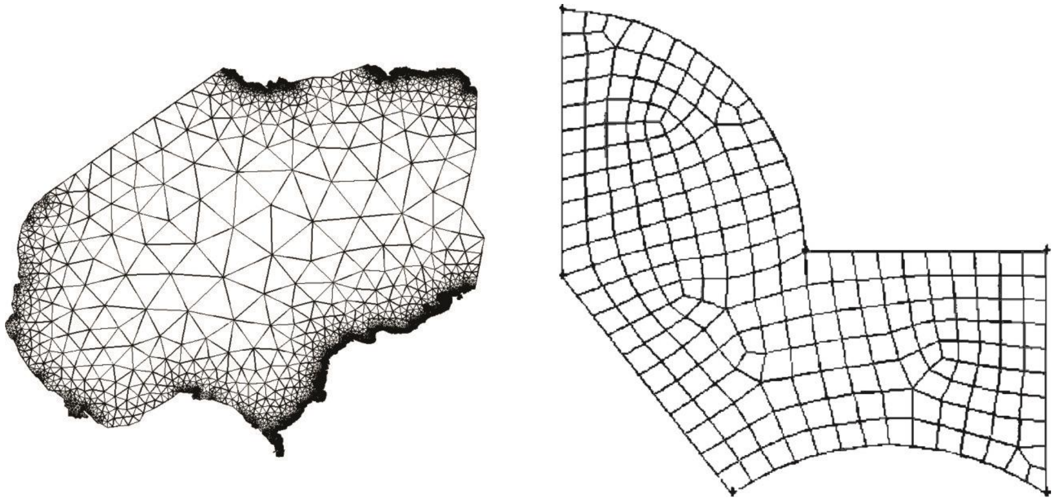
Διακριτοποίηση στο χώρο

- 1D εξισώσεις → κόμβοι
- 2D εξισώσεις → πλέγμα ή κάναβος
- 3D εξισώσεις → πλέγμα

δομημένο πλέγμα/κάναβος



μη δομημένο πλέγμα/κάναβος



Οριακές συνθήκες

- **Αρχικές συνθήκες**
  - Οριακές συνθήκες στο χρόνο
  - Τιμές της *f* τη χρονική στιγμή *t*=0
- **Οριακές συνθήκες στο χώρο**
  - Ανάντη
  - Κατάντη

1D εξισώσεις

Οριακές συνθήκες

- **Αρχικές συνθήκες**
  - Οριακές συνθήκες στο χρόνο
  - Τιμές της *f* τη χρονική στιγμή t=0
- **Οριακές συνθήκες στο χώρο**
  - Ανάντη
  - Κατάντη
  - Πλευρικές

1D εξισώσεις

2D εξισώσεις

Οριακές συνθήκες

- **Αρχικές συνθήκες**
  - Οριακές συνθήκες στο χρόνο
  - Τιμές της *f* τη χρονική στιγμή *t*=0
- **Οριακές συνθήκες στο χώρο**
  - Ανάντη
  - Κατάντη
  - Πλευρικές
  - Άνω
  - Κάτω

1D εξισώσεις

2D εξισώσεις

3D εξισώσεις

Άσκηση 1

υπολογιστική vs. αναλυτική λύση

ΣΔΕ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2x + 1}{y}, y(0) = 1$$

1) **Αναλυτικά**

2) **Εμπρόσθια μέθοδος Euler**

Άσκηση 1

υπολογιστική vs. αναλυτική λύση

ΣΔΕ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2x + 1}{y}, y(0) = 1$$

1) **Αναλυτικά**

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 2x + 1}$$

2) **Εμπρόσθια μέθοδος Euler**

Άσκηση 1

υπολογιστική vs. αναλυτική λύση

ΣΔΕ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2x + 1}{y}, y(0) = 1$$

1) **Αναλυτικά**

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 2x + 1}$$

2) **Εμπρόσθια μέθοδος Euler**

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \frac{{x_i}^2 - 2x_i + 1}{y_i}, y_0 = 1$$

Άσκηση 1

υπολογιστική vs. αναλυτική λύση

ΣΔΕ

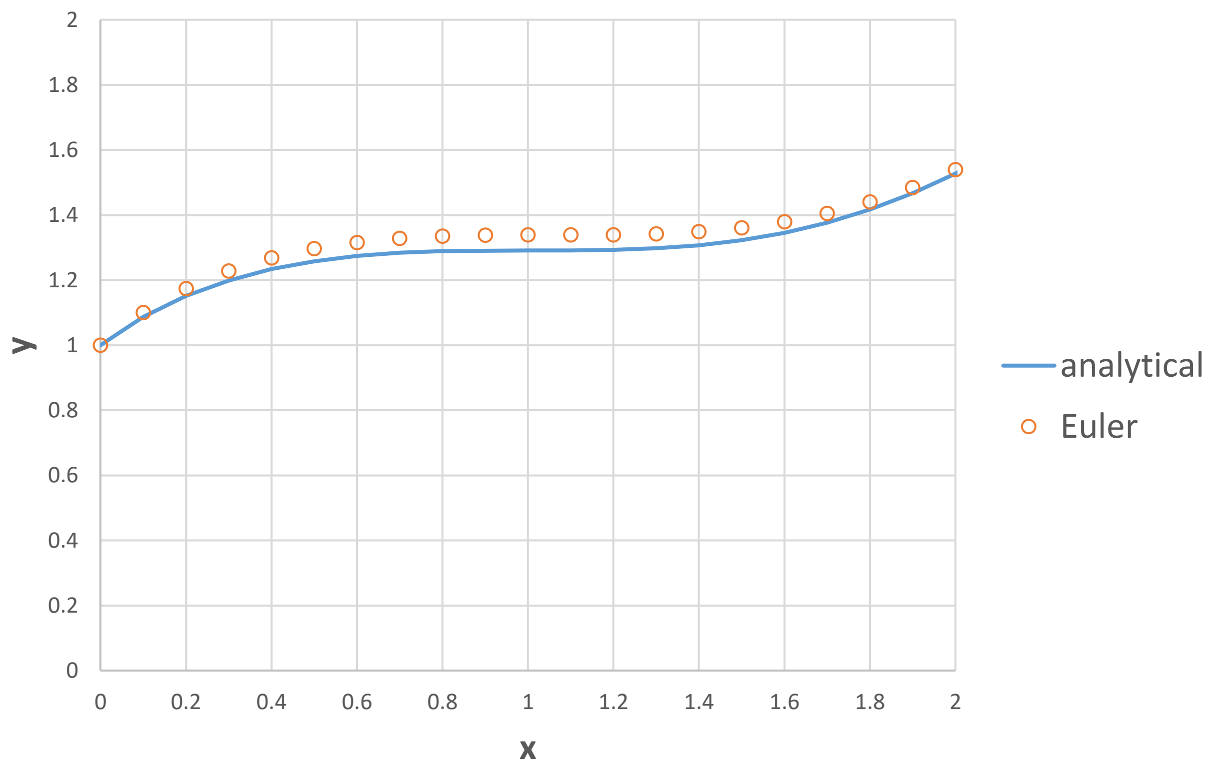
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2x + 1}{y}, y(0) = 1$$

1) Αναλυτικά

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 2x + 1}$$

2) Εμπρόσθια μέθοδος Euler

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \frac{{x_i}^2 - 2x_i + 1}{y_i}, y_0 = 1$$



Άσκηση 2

υπερβολικές εξισώσεις

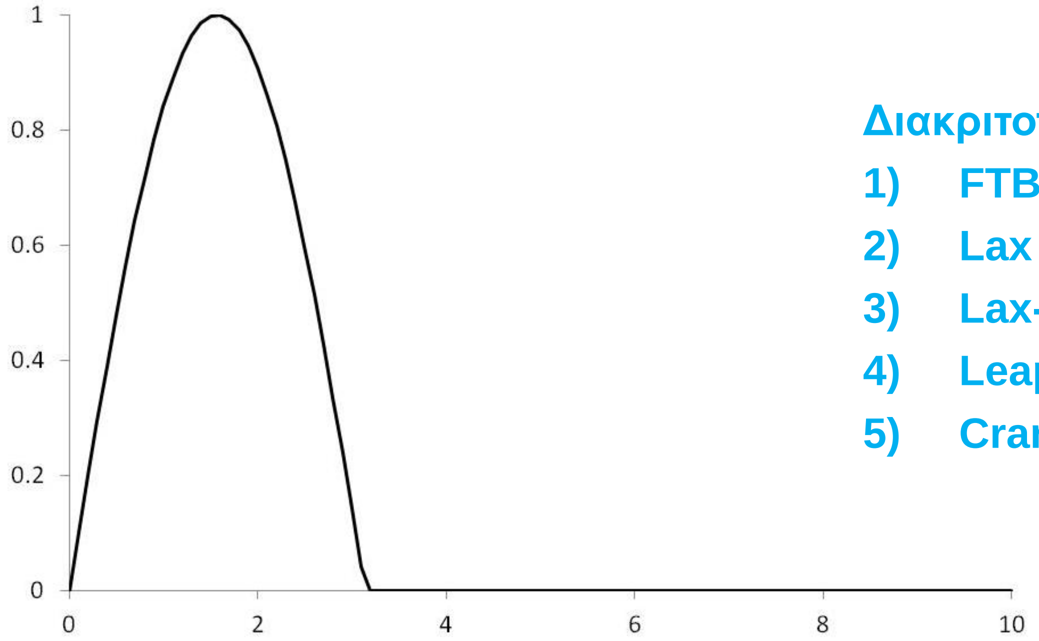
εξίσωση κύματος

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} = 0$$

***f*(*x*,0)=sin(*x*), *x*Є[0,π]**

Δ*x*=0.1

***u*=5**

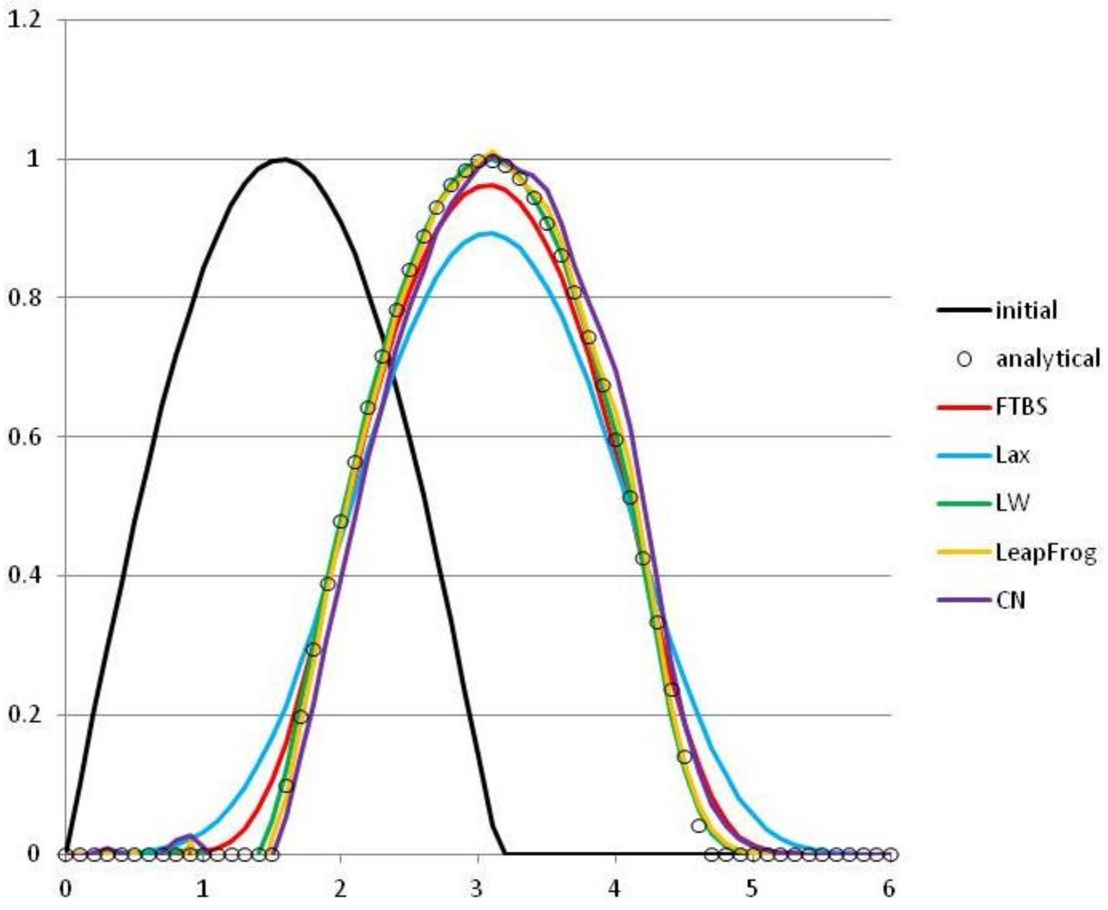


Διακριτοποίηση με

1) **FTBS**
2) **Lax**
3) **Lax-Wendroff**
4) **Leap Frog**
5) **Crank-Nicolson**

Άσκηση 2

υπερβολικές εξισώσεις



Η παρούσα διάλεξη πήρε έμπνευση και παραδείγματα από το βιβλίο «Υπολογιστική Υδραυλική» του Χ. Κουτίτα (2005, Εκδόσεις Επίκεντρο), καθώς και από το βιβλίο «Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics» του R. Szymkiewicz (2010, Εκδόσεις Springer).

Επίσης, από τις διαλέξεις των μαθημάτων του ΔΠΜΣ Επιστήμη και Τεχνολογία Υδατικών Πόρων του ΕΜΠ:

α) *Υπολογιστικές Μέθοδοι στην Παράκτια Ζώνη*

(Δρ Η. Παπακωνσταντής)