ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ (Equations of Motion)

Με τις Εξισώσεις Κίνησης αναλύουμε την απόκριση ενός ρευστού υπό την επίδραση εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από τη Κλασσική Ρευστομηχανική και διαφοροποιούνται ελαφρώς για να αποτυπώσουν τη ροή στο φυσικό περιβάλλον του ανοικτού ωκεανού. Το πιο σημαντικό σημείο διαφοροποίησης είναι η παραμετροποίηση, δηλ. η μαθηματική έκφραση της τύρβης στη θάλασσα. Έτσι, προκύπτει ότι η εφαρμογή της ρευστομηχανικής στην ωκεανογραφία βασίζεται στη Νευτώνεια Μηχανική, η οποία έχει διαφοροποιηθεί ως προς τη κατανόηση της τυρβώδους ροής.

Μία σειρά από Φυσικοί Νόμοι οδηγούν στην ανάπτυξη των κύριων εξισώσεων της Ωκεανογραφίας.

Πίνακας 1. Φυσικοί Νόμοι και αντίστοιχες Μαθηματικές Εξισώσεις στην Ωκεανογραφία.

Φυσικοί Νόμοι	**Εξισώσεις**
Διατήρηση Μάζας	Εξίσωση της Συνέχειας
Διατήρηση Ενέργειας	Η διατήρηση θερμότητας οδηγεί σε ενεργειακά ισοζύγια Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας οδηγεί στην εξίσωση του κύματος
Διατήρηση Ορμής	Οδηγεί στις εξισώσεις Κίνησης (Navier-Stokes)
Διατήρηση Στροφορμής	Οδηγεί στην εξίσωση διατήρησης της περιδίνησης (vorticity)

Το ερώτημα που προκύπτει για τη μετατροπή των εξισώσεων της Ρευστομηχανικής στην Ωκεανογραφία είναι: Ποιες είναι οι κύριες δυνάμεις στον ανοικτό ωκεανό, τις οποίες πρέπει οπωσδήποτε να εκφράσω μαθηματικά στις εξισώσεις κίνησης μίας υδάτινης μάζας ?

Πραγματικά, μόνο ορισμένες από τις δυνάμεις της φυσικής είναι σημαντικές στη Φυσική Ωκεανογραφία. Αυτές είναι:

A) Η Βαρύτητα (Gravity),

B) Η Πιεσοβαθμίδα (Pressure-gradient)

Γ) Η Τριβή (Friction), και

Δ) Η δύναμη Coriolis.

Κάθε τέτοια δύναμη αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα με μέγεθος και διεύθυνση.

Έτσι, η εξίσωση της κίνησης στη Φυσική Ωκεανογραφία προκύπτει από το Δεύτερο Νόμο Κίνησης του Νεύτωνα:

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} \tag{9.1}$$

που σημαίνει ότι η συνολική δύναμη που ενεργεί σε μία μάζα m προκαλεί επιτάχυνση γ.

Σε περίπτωση που F = 0 τότε γ = 0 δηλ.

α) το σώμα δεν κινείται καθόλου (u = 0), ή

β) το σώμα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά (u = σταθερό).

Η πρώτη περίπτωση δεν συμβαίνει ποτέ σε πραγματικές ροές, διότι σημαίνει ότι δεν ενεργούν δυνάμεις στις υδάτινες μάζες, γεγονός που αντικρούει στο νόμο της βαρύτητας.

Είναι πιο βολικό να γράψουμε :

$\vec{\gamma} = \dfrac{F}{m}$ που σημαίνει ότι η επιτάχυνση μίας υδάτινης μάζας οφείλεται στις δυνάμεις που ενεργούν σε αυτή. Με άλλα λόγια, έχουμε :

Επιτάχυνση = [Πίεση + Βαρύτητα + Τριβή + Παλίρροια]/ μονάδα μάζας

Η εξίσωση της κίνησης σε διανυσματική μορφή στον ωκεανό είναι :

$$\boxed{\frac{d\vec{V}}{dt} = -\alpha\nabla p - 2\Omega \times V + g + F} \tag{9.2}$$

Πίεσοβαθμίδα Coriolis Βαρύτητα Άλλες Δυνάμεις

Η εξίσωση αυτή μπορεί να αναλυθεί στις τρείς συνιστώσες εξισώσεις ως προς τις διευθύνσεις x, y, z στις οποίες αντιστοιχούν ταχύτητες u, v, w, ως εξής :

Συνιστώσες εξίσωσης κίνησης :

$$
\begin{aligned}
(x) &\rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega \sin\phi v + F_x \\
(y) &\rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega \sin\phi u + F_y \\
(z) &\rightarrow \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z
\end{aligned} \qquad (9.3)
$$

Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται **εξισώσεις κίνησης ή γραμμικής ορμής** (linear momentum). Οι ποσότητες u, v, w (ανύσματα ταχύτητας προς τις τρεις διαστάσεις του χώρου), μαζί με τον άγνωστο p (πίεση) αποτελούν τις τέσσερις σημαντικές παραμέτρους της κίνησης του ρευστού που ο επιστήμονας πρέπει να υπολογίσει ή να μετρήσει για να κατανοήσει τη δυναμική του συστήματος. Αν προσθέσουμε στις παραπάνω τρεις εξισώσεις και την εξίσωση της συνέχειας:

$$
\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] = 0 \qquad (9.4)
$$

τότε έχουμε τέσσερις εξισώσεις με τέσσερις αγνώστους. Ο πρώτος όρος αποτελεί τη τοπική μεταβολή της πυκνότητας (ρ) στο χρόνο, ενώ ο δεύτερος όρος τη χωρική μεταβολή του όγκου.

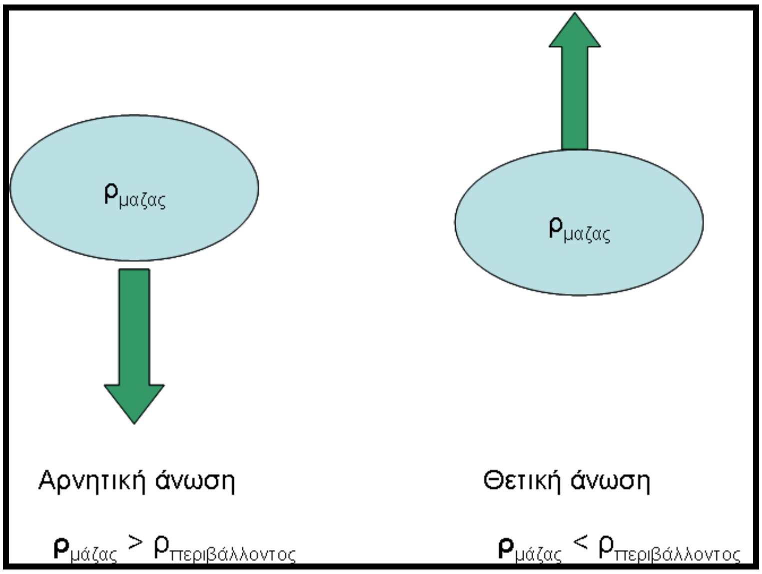
Συνολικά, οι γνωστές ποσότητες είναι: ο ειδικός όγκος (α = 1/ρ), το μέγεθος της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της Γης (Ω), το γεωγραφικό πλάτος (φ), και η θέση που μας ενδιαφέρει στο σύστημα εκφρασμένη σε x, y, z. Η δύναμη F και οι συνιστώσες της αντιπροσωπεύουν τη τριβή, και τις παλιρροιακές δυνάμεις με τις οποίες θα ασχοληθούμε στη συνέχεια.

Παρακάτω θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε τη προέλευση των όρων των παραπάνω εξισώσεων.

Όρος 1: Βαρύτητα

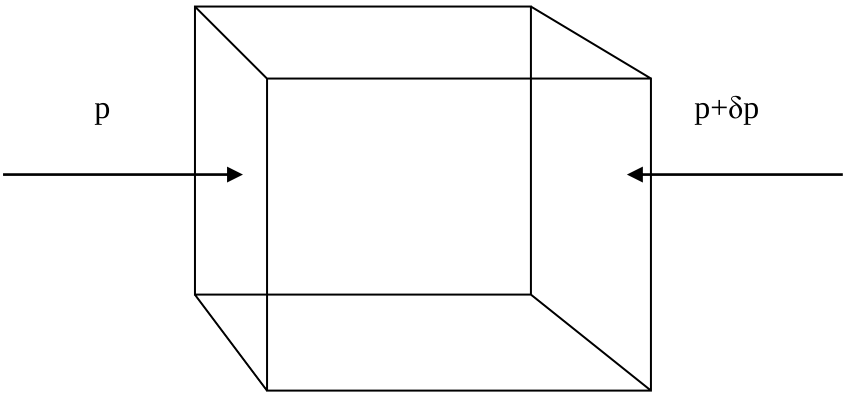
Η βαρύτητα αποτελεί τη κυρίαρχη δύναμη στον ωκεανό. Κάθε μάζα νερού έχει βάρος που παράγει πίεση. Μεταβολές στη δύναμη της βαρύτητας παράγονται λόγω της σχετικής κίνησης των Πλανητών που παράγουν τις παλίρροιες (tides), τα παλιρροιακά ρεύματα και τη παλιρροιακή ανάμειξη στο εσωτερικό του ωκεανού

Άνωση (Buoyancy) είναι η ανοδική ή καθοδική δύναμη βαρύτητας που εφαρμόζεται σε μία μάζα νερού με διαφορετική πυκνότητα από το περιβάλλον της. Όταν η πυκνότητα της υδάτινης μάζας είναι μεγαλύτερη αυτής του περιβάλλοντος, τότε αυτή βυθίζεται λόγω αρνητικής άνωσης. Αντίθετα, όταν η πυκνότητα της υδάτινης μάζας είναι μικρότερη αυτής του περιβάλλοντος, τότε αυτή κινείται ανοδικά υπό την επίδραση της θετικής άνωσης. Σε κάθε περίπτωση, η κίνηση της υδάτινης μάζας γίνεται κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα z, οπότε ο όρος βαρύτητας εμφανίζεται μόνο στη z- εξίσωση κίνησης (Σχήμα 9.1).



Σχήμα 9.1. Ο ρόλος της βαρύτητας στη κίνηση και τη σχετική θέση μίας υδάτινης μάζας.

Όρος 2: Πιεσοβαθμίδα



Σχήμα 9.2. Οριζόντια Πιεσοβαθμίδα.

Η οριζόντια πιεσοβαθμίδα αναπτύσσεται λόγω της διαφορετικής τιμής της υδροστατικής πίεσης στις πλευρές μίας υδάτινης μάζας (Σχήμα 9.2). Για παράδειγμα, σε μία μάζα όπως αυτή του Σχήματος 9.2, με όγκο V = δxδyδz, έχουμε την υδροστατική πίεση:

Στην Αριστερή έδρα $\rightarrow$ + p δy δz

Στη Δεξιά έδρα $\rightarrow$ - (p + δp) δy δz

Άρα, η Καθαρή Πίεση κατά τη x-διεύθυνση : -i δp δy δz = -i (∂p/∂x) δx δy δz = -i (∂p/∂x) ανά μονάδα όγκου και -i (∂p/∂x) (1/ρ) = -i α (∂p/∂x) ανά μονάδα μάζας, όπου i το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη x -διεύθυνση.

Αν θεωρήσουμε τις τρεις διευθύνσεις, η ολική πίεση γράφεται :

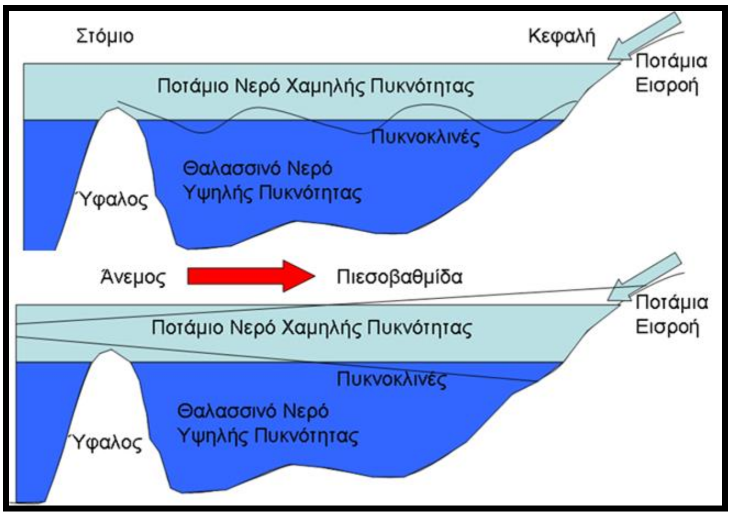
$$-\alpha\left(\vec{i}\,\frac{\partial p}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial p}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial p}{\partial y}\right)=-\alpha\nabla p$$

όπου $\nabla\equiv\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι αν υπάρχει αυξημένη υδροστατική πίεση στα δεξιά του όγκου, τότε δημιουργείται δύναμη πίεσης προς τα αριστερά.

Αφού περιγράψαμε μαθηματικά την οριζόντια πιεσοβαθμίδα, το ερώτημα που τίθεται είναι: Για ποιο λόγο αναπτύσσεται η διαφορετική υδροστατική πίεση στις πλευρές μίας υδάτινης μάζας ?

Η **οριζόντια πιεσοβαθμίδα** (horizontal pressure gradient) στον ωκεανό αναπτύσσεται λόγω: α) της διαφορετικής στάθμης της επιφάνειας της θάλασσας σε διάφορες θέσεις του ωκεανού (**βαροτροπική πιεσοβαθμίδα**), και β) της διαφορετικής πυκνότητας νερού στο ίδιο επίπεδο (**βαροκλινική πιεσοβαθμίδα**).



Σχήμα 9.3. Ανάπτυξη βαροτροπικής πιεσοβαθμίδας λόγω επίδρασης του ανέμου.

Όρος 3: Τριβή

Η τριβή είναι η δύναμη που αναπτύσσεται όταν:

α) δύο μάζες νερού κινούνται με σχετική κίνηση μεταξύ τους (εσωτερική τριβή), ή

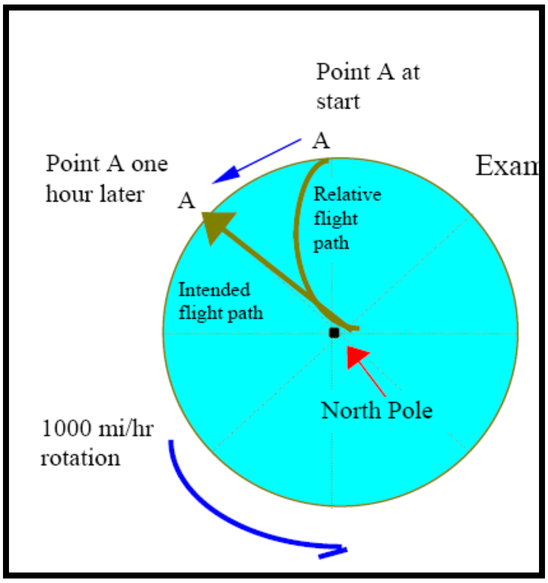
β) όταν μία μάζα νερού κινείται κοντά στο πυθμένα (τριβή πυθμένα), ή

γ) όταν μία μάζα νερού κινείται υπό την επίδραση του ανέμου (τριβή επιφανείας).

Η ανεμογενής τάση (wind shear stress) παράγει τριβή πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας, και μεταφέρει την οριζόντια ορμή του στη θάλασσα δημιουργώντας ρεύματα (ανεμογενή ρεύματα). Η τριβή πυθμένα δημιουργείται από την ροή νερού κοντά σε τραχείς πυθμένες και προκαλεί ανάδευση και μεταφορά ορμής κατακόρυφα και εντός ενός στρώματος έντονης τύρβης που καλείται **οριακό στρώμα** (boundary layer).

Όρος 4: Δύναμη Coriolis

Η δύναμη Coriolis, αποτελεί δευτερογενή δύναμη, η οποία αναπτύσσεται όταν μία μάζα νερού βρίσκεται σε κίνηση. Οφείλεται στη περιστροφή της Γης και προκαλεί την απόκλιση κινούμενων σωμάτων κατά τη κίνησή τους από τους Πόλους προς τον Ισημερινό. Στο Β. Ημισφαίριο η απόκλιση είναι προς τα δεξιά της τροχιάς κίνησης, ενώ στο Ν. Ημισφαίριο η απόκλιση είναι προς τα αριστερά της τροχιάς κίνησης (Σχήμα 9.4).



Σχήμα 9.4. Το αεροπλάνο κινείται σε ευθεία γραμμή ως προς την ατμόσφαιρα, αλλά κινείται σε καμπύλη γραμμή σε σχέση με την επιφάνεια της Γης, η οποία περιστρέφεται.

Η δύναμη Coriolis εκφράζεται μαθηματικά με τους όρους:

α) 2Ωsinφv στην x -εξίσωση κίνησης, και

β) 2Ωsinφu στην y -εξίσωση κίνησης.

Δεν υπάρχει όρος δύναμης Coriolis κατά τη z- διεύθυνση. Οι δύο οριζόντιοι όροι μπορούν να συνδυαστούν και να δώσουν την οριζόντια επιτάχυνση Coriolis,

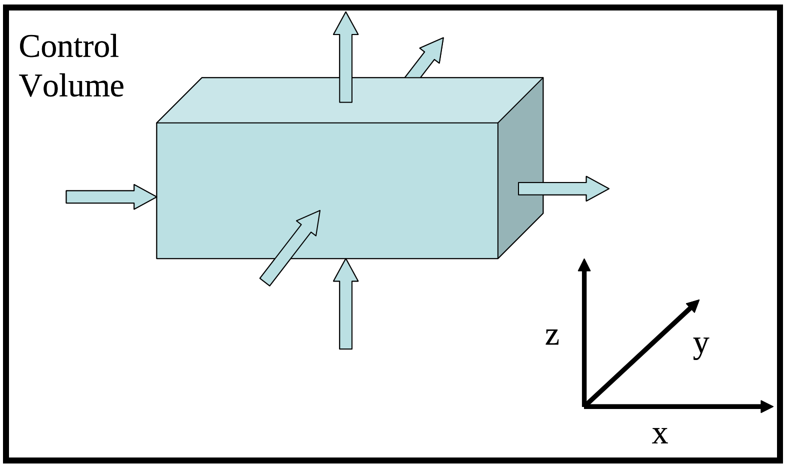
$C_H = 2\Omega \sin \varphi V_H \times k$.

Το άνυσμα C_H είναι κάθετο στο μοναδιαίο διάνυσμα της z-διεύθυνσης και στην οριζόντια ταχύτητα V_H. Έχει φορά προς τα δεξιά στο Βόρειο Ημισφαίριο και προς τα αριστερά στο Νότιο Ημισφαίριο.

Ο όρος 2Ω sin φ συχνά γράφεται για συντομία ως **παράμετρος Coriolis** (Coriolis parameter, f). Έτσι γράφουμε: 2Ω sin φ u = fu. Το μέγεθος της οριζόντιας επιτάχυνσης Coriolis για ρεύμα ταχύτητας u = 1 m/sec σε φ=90^o (πόλοι) είναι $C_H = 1{,}5 \times 10^{-4}$ m/s, ενώ για u = 1 m/sec σε φ=45^o είναι $C_H = 10^{-4}$ m/sec.

Η Ολική Παράγωγος (D/Dt)

Αν διαιρέσουμε τον ωκεανό σε στοιχειώδη κυβικά τμήματα με πλευρές μερικών μέτρων η κάθε μία, και χρησιμοποιήσουμε τις Αρχές Διατήρησης της Μάζας, της Ορμής κλπ. σε κάθε στοιχειώδες τμήμα, τότε μπορούμε να διαμορφώσουμε τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή του ωκεανού σε κάθε χρονική στιγμή, σε οποιαδήποτε θέση του (Σχήμα 9.5).



Σχήμα 9.5. Στοιχειώδης Όγκος Υδάτινης Μάζας.

Καθώς το πεδίο ροής μεταβάλλεται χωροχρονικά, ισχύει εξ' ορισμού ότι:

$$\frac{D}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} \qquad (9.5)$$

όπου ο πρώτος όρος στο δεξί τμήμα καλείται **τοπικός όρος** (local term) και εκφράζει τη χρονική μεταβολή μιας παραμέτρου σε μία θέση και οι τρεις επόμενοι όροι καλούνται **όροι μεταφοράς μάζας** (advective terms) και εκφράζουν τη χωρική μεταβολή της παραμέτρου στη θέση αυτή.

Αντικαθιστώντας τις ολικές παραγώγους στις εξισώσεις κίνησης, έχουμε:

$$\boxed{\begin{aligned}(x)&\rightarrow \frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+2\Omega\sin\phi v+F_x\\(y)&\rightarrow \frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-2\Omega\sin\phi u+F_y\\(z)&\rightarrow \frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g+F_z\end{aligned}} \quad (9.6)$$

Κλίμακα Όρων Εξίσωσης Κίνησης

Έστω ωκεανός με χαρακτηριστικό μήκος L ~ 10^6 m, χαρακτηριστικό βάθος H_1 ~ 10^3 m, με τυπική παράμετρο Coriolis f ~ 10^{-4} s^{-1}, με τυπική πυκνότητα νερού ρ ~ 10^3 kg/m^3, με τυπική ταχύτητα κίνησης U ~ 10^{-1} m/s, με χαρακτηριστική ανύψωση στάθμης λόγω ανέμου ή παλίρροιας της τάξης των H_2 ~ 1 m, τότε από τις τιμές αυτές μπορούμε να εξάγουμε τυπικές τιμές για τη κατακόρυφη ταχύτητα W, τη πίεση P και το χρόνο T.

Έτσι, από την εξίσωση συνέχειας προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial W}{\partial z}=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right) \quad (9.7)$$

Η εξίσωσης αυτή γράφεται σε χαρακτηριστικούς όρους ως

$$\frac{W}{H_1}=\frac{U}{L}\Rightarrow W=\frac{UH_1}{L}=\frac{10^{-1}10^3}{10^6}m/s=10^{-4}m/s$$

που αποτελεί μία τυπική κατακόρυφη ταχύτητα για τον ανοικτό ωκεανό.

Αντίστοιχα, για την υδροστατική πίεση και την οριζόντια πιεσοβαθμίδα έχουμε:

$$P=\rho g H_1=10^3 10^1 10^3=10^7\ Pa \quad (9.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\rho g H_2}{L}=10^{-2}\ Pa/m \quad (9.9)$$

που επίσης αποτελεί μία τυπική τιμή οριζόντιας πιεσοβαθμίδας για τον ανοικτό ωκεανό.

Τέλος, ο χρόνος κίνησης μίας τυπικής υδάτινης μάζας είναι:

$$T = \frac{L}{U} = 10^7\, s \tag{9.10}$$

Η εξίσωση κίνησης για τη κατακόρυφη διεύθυνση είναι:

$$(z) \rightarrow \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z \tag{9.11}$$

που σε χαρακτηριστικούς όρους γίνεται:

$$\frac{W}{T} + \frac{UW}{L} + \frac{UW}{L} + \frac{W^2}{H_1} = \frac{P}{\rho H_1} - g + F_z \tag{9.12}$$

$$10^{11} + 10^{-11} + 10^{-11} + 10^{-11} = 10^{-5} + 10 + 10^{-11}$$

Άρα η μόνη σημαντική ισορροπία στη κατακόρυφη διεύθυνση είναι η **υδροστατική ισορροπία** η οποία εκφράζεται από την υδροστατική εξίσωση, όπου συμμετέχουν η βαρύτητα και η πιεσοβαθμίδα:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{9.13}$$

η οποία ισχύει σε κλίμακα 1:10^6.

Αντίστοιχα, η εξίσωση κίνησης κατά την οριζόντια διεύθυνση είναι:

$$(x) \rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega \sin\phi v + F_x \tag{9.14}$$

που σε χαρακτηριστικούς όρους γίνεται:

$$10^{-8} + 10^{-8} + 10^{-8} + 10^{-8} = 10^{-5} + 10^{-5}$$

Άρα, **η δύναμη Coriolis αντισταθμίζει την οριζόντια πιεσοβαθμίδα**. Η σχέση αυτή καλείται **γεωστροφική ισορροπία** και οι εξισώσεις στις δύο οριζόντιες διευθύνσεις καλούνται **γεωστροφικές εξισώσεις**.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = fv\ ; \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -fu\ ; \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g \tag{9.15}$$

Η γεωστροφική ισορροπία ισχύει σε ωκεάνιες ροές με οριζόντιες διαστάσεις μεγαλύτερες των 50 χλμ και χρονικής κλίμακας μερικών ημερών.