

# ΡΟΕΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΣΤΕΡΕΑ ΣΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΟΙ ΟΠΟΙΕΣ ΕΞΑΣΚΟΥΝΤΑΙ ΑΠΟ ΑΥΤΕΣ

## 1. ΡΟΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ

### 1.1 Η περίπτωση της τυρβώδους ροής

#### 1.1.1 Γενική περιγραφή

Τυρβώδης ροή παρατηρείται για την περίπτωση μεγάλων τιμών του πεδίου ταχυτήτων. Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην παράδοση ένας τρόπος για να εξετάσουμε αν μία ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης είναι να δούμε τι τιμή παίρνει ο αριθμός Reynolds, ο οποίος είναι δυνατό να θεωρηθεί πως εκφράζει τον λόγο των δυνάμεων αδράνειας προς τις δυνάμεις του ιξώδους.

Για την περίπτωση ροής γύρω από κύλινδρο (αλλά και γύρω από σφαίρα) η τιμή του αριθμού Reynolds (Re) μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση:

$$\text{Re} = \frac{U_0 D}{\mu / \rho} \quad (1)$$

Στην εξίσωση απάνω  $U_0$  είναι μία μέση τιμή του πεδίου ταχύτητας μακριά από το στερεό αντικείμενο,  $D$  είναι η διάμετρος του κυλίνδρου (ή της σφαίρας),  $\mu$  είναι το δυναμικό ιξώδες και  $\rho$  είναι η πυκνότητα του ρευστού.

#### 1.1.2 Ιστορική αναδρομή: Οι εξισώσεις Euler και το παράδοξο d'Alembert

Με βάση τα παραπάνω είχε προταθεί από τους επιστήμονες τον 18<sup>ο</sup> αιώνα, για την περίπτωση ροής με μεγάλους αριθμούς να θεωρηθούν οι όροι οι οποίοι αντιστοιχούν στις δυνάμεις του ιξώδους στις εξισώσεις Navier-Stokes αμελητέοι.

Οι απλοποιημένες εξισώσεις οι οποίες προκύπτουν (βλ. εξισώσεις 2α-γ) ονομάζονται εξισώσεις Euler (αυτές δεν πρέπει να συγχέονται με την περιγραφή ροής κατά Euler η οποία χρησιμοποιήθηκε στο κεφάλαιο της κινηματικής και με την οποία οι εξισώσεις Euler δεν έχουν καμία σχέση). Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται επίσης και εξισώσεις του «τέλειου ρευστού» και γράφονται ως εξής:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2-\alpha)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho f_y - \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2-\beta)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho f_z - \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2-\gamma)$$

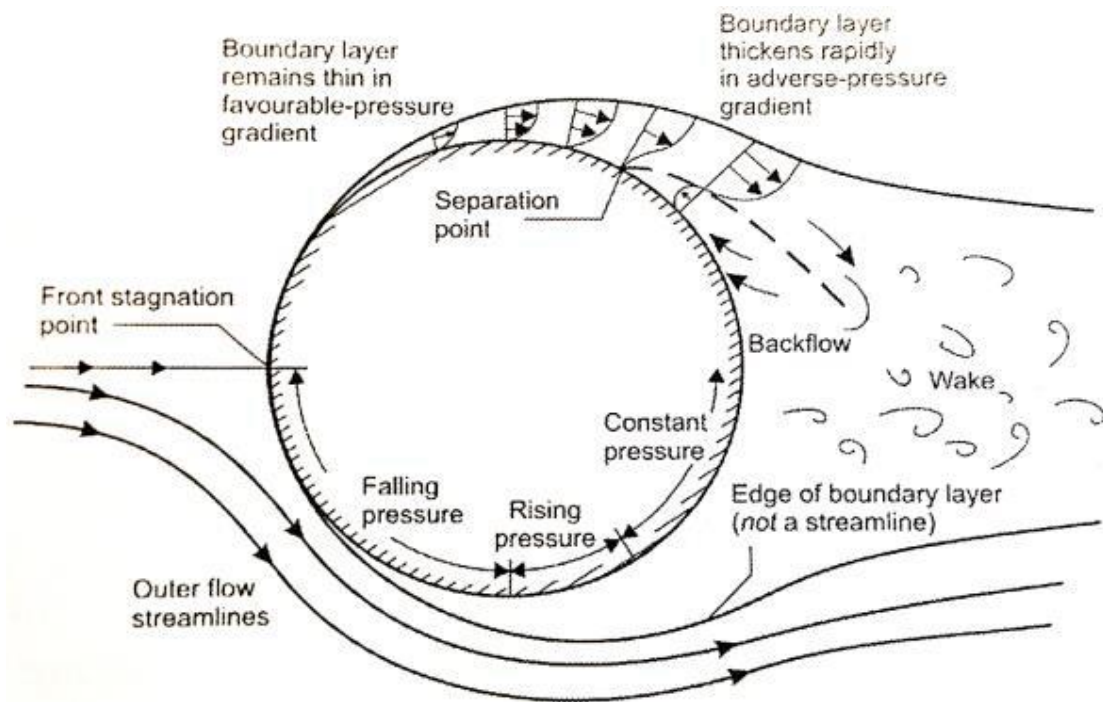
$u, v, w$  είναι η συνιστώσες της ταχύτητας κατά τις διευθύνσεις  $x, y, z$  αντίστοιχα.  $P$  είναι το πεδίο πίεσης,  $\rho$  είναι η πυκνότητα,  $t$  είναι ο χρόνος.  $\vec{f}$  είναι το πεδίο των εξωτερικών δυνάμεων.

Λύνοντας τις εξισώσεις τις παραπάνω εξισώσεις (σε συνδυασμό με την εξίσωση της συνέχειας) για ροή γύρω από κύλινδρο ή σφαίρα, ο d'Alembert έβγαλε το συμπέρασμα ότι δεν ασκείται καμία δύναμη από την ροή στα στερεά αυτά σώματα. Το συμπέρασμα όμως αυτό είναι αντίθετο με τις παρατηρήσεις (για αυτό και ονομάζεται παράδοξο του d'Alembert) και είναι προφανώς λανθασμένο.

### 1.1.3 Μία ρεαλιστική και σωστή ανάλυση του φαινομένου

Στην πραγματικότητα τόσο ο d'Alembert όσο και οι άλλοι επιστήμονες οι οποίοι θεώρησαν πως είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν οι εξισώσεις Euler για τον υπολογισμό της ροής γύρω από ένα στερεό σώμα, αγνοούσαν την αρχή της μη ολίσθησης (no-slip condition). Σύμφωνα με την αρχή αυτή στο σημείο επαφής ενός ρευστού με ένα στερεό σώμα, το ρευστό έχει την ταχύτητα του στερεού σώματος. Εξ αιτίας αυτού του γεγονότος λοιπόν σε μία περιοχή κοντά στον κύλινδρο (ή κοντά σε οποιοδήποτε άλλο στερεό σώμα) οι ταχύτητες είναι μικρές (το στερεό σώμα λόγω της αρχής της μη ολίσθησης έχει την ιδιότητα να «φρενάρει» την ροή), οπότε στην συγκεκριμένη περιοχή, λόγω ακριβώς των μικρών ταχυτήτων οι δυνάμεις του ιξώδους δεν είναι αμελητέες. Στην υπόλοιπη περιοχή (η οποία βρίσκεται μακριά από το στερεό σώμα) στην οποία οι ταχύτητες είναι πολύ μεγαλύτερες, υπερτερούν οι δυνάμεις αδράνειας.

Η στενή περιοχή κοντά στο στερεό σώμα στην οποία οι δυνάμεις ιξώδους δεν είναι αμελητέες ονομάζεται οριακή στιβάδα (boundary layer) – βλ και σχήμα 1.



Σχήμα 1 Σχηματική περίπτωση της ροής για ροή γύρω από κίλινδρο για την περίπτωση μεγάλων αριθμών Reynolds

Θεωρώντας λοιπόν ο d' Alembert και οι σύγχρονοι του ότι οι δυνάμεις ιξώδους (και αγνοώντας άρα έτσι την ύπαρξη της οριακής στιβάδας), αγνόησαν την όλη δυναμική της ροής και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της τα οποία τα περιγράψαμε παραπάνω και τα οποία παρουσιάζονται επίσης σχηματικά στο σχήμα 1 (απάνω). Τα πολύπλοκα αυτά χαρακτηριστικά της ροής είναι δυνατόν να υπολογιστούν μόνο αν επιλύσουμε την ακριβή μορφή των εξισώσεων Navier Stokes και όχι την απλοποιημένη εκδοχή τους (δηλαδή της εξισώσεις Euler στις οποίες έχουν παραληφθεί οι όροι του ιξώδους).

Εδώ θα πρέπει να επισημάνουμε ότι στο κατάντη (πίσω) μέρος της οριακής στιβάδας το πεδίο ταχυτήτων γίνεται ασταθές – εμφανίζεται κοντά στον κύλινδρο μία «αρνητική» συνιστώσα του πεδίου ταχυτήτων, η φορά της οποίας είναι αντίθετη με την φορά της κυρίως ροής. Αυτή η αρνητική συνιστώσα έχει σαν συνέπεια την δημιουργία των δινών (στροβίλων) οι οποίοι είναι ιδιαίτερα έντονοι στο κατάντη (πίσω) μέρος του κυλίνδρου (βλ. σχήμα 1).

Στην περιοχή αυτή των στο πίσω μέρος του κυλίνδρου (με έντονη την παρουσία των στροβίλων), η πίεση είναι χαμηλότερη από ότι στο ανάντη (εμπρός) μέρος του κυλίνδρου. Οι χαμηλές αυτές πιέσεις ονομάζονται και υποπίεσεις.

Αυτή η διαφορά της πίεσης (ανάμεσα στο εμπρός και το πίσω μέρος του κυλίνδρου) είναι και η κύρια αιτία που ασκείται δύναμη από την ροή στο στερεό αντικείμενο.

Εδώ είναι σκόπιμο να επισημάνουμε ότι ορισμένα στερεά σώματα έχουν ένα τέτοιο σχήμα ώστε να διαταράσσουν σε μικρότερο βαθμό την ροή έτσι στο πίσω μέρος τους η ζώνη με τους στροβίλους, στην οποία η πίεση είναι μικρότερη απ' το μπροστινό μέρος, να καταλαμβάνει μικρότερη έκταση. Σε αυτά τα σώματα η δύναμη που ασκείται είναι μικρότερη από ότι σε έναν κύλινδρο, μία σφαίρα, ή σε ένα άλλο στερεό σώμα με «κανονικό» σχήμα. Τα σώματα αυτά τα οποία έχουν αυτήν την ιδιότητα να διαταράσσουν σε μικρό βαθμό την ροή λέγονται αεροδυναμικά ή υδροδυναμικά. Μία ιδιότητα τους επίσης είναι να έχουν μικρές τιμές του συντελεστή αεροδυναμικής (η υδροδυναμικής αντίστασης)  $C_D$ .

## **1.2 Η περίπτωση της στρωτής ροής**

### **1.2.1 Περιοχή όπου ο αριθμός $Re$ είναι πολύ μικρός**

Για πολύ μικρούς αριθμούς Reynolds ( $Re < 1$ ) η ροή δεν είναι απλώς στρωτή (περίπτωση κατά την οποία οι δυνάμεις του ιξώδους είναι πολύ πιο σημαντικές από τις δυνάμεις της αδράνειας), αλλά είναι επιπλέον έρπουσα (δηλαδή οι όροι της αδράνειας είναι αμελητέοι).

Για την περιοχή αυτή τα χαρακτηριστικά της ροής (γραμμές ροής και πεδίο ταχυτήτων) είναι συμμετρικά. (Βλ. και την περίπτωση Α στο σχήμα 2)

### **1.2.2 Περιοχή δύο συμμετρικών ταυτόσημοι στροβίλων ( $1 < Re < 40$ )**

Για αριθμούς Reynolds οι οποίοι κυμαίνονται μεταξύ  $1 < Re < 40$ , σχηματίζονται δύο σειρές στροβίλων στο πίσω μέρος του κυλίνδρου.

Υπάρχει πάντως ένας άξονας συμμετρίας (Βλ. περίπτωση Β στο σχήμα 2)

### 1.2.3 Περιοχή $40 < Re < 80$

Η ροή είναι στρωτή αλλά δεν υπάρχει κανένας άξονας συμμετρίας, επειδή οι γραμμές ροής στο πίσω μέρος του κυλίνδρου έχουν κυματοειδή μορφή (Αυτή η περιοχή δεν παρουσιάζεται στην Σχήμα 2).

### 1.2.4 Ροή von Karman ( $80 < Re < 300$ )

Στην περιοχή von Karman η ροή παραμένει στρωτή, αλλά μεταβάλλεται περιοδικά στον χρόνο και δεν είναι πιά μόνιμη. Σχηματίζονται δύο σειρές στροβίλων στο πίσω μέρος του κυλίνδρου (Βλ. Περίπτωση C στο σχήμα 2 και τον σύνδεσμο

<https://en.wikipedia.org/wiki/File:Vortex-street-animation.gif> )

Η περιγραφή του φαινομένου είναι η εξής: Αρχικά ένας στρόβιλος σχηματίζεται στο πίσω μέρος και στην απάνω πλευρά του κυλίνδρου. Σε πρώτη φάση παραμένει πίσω από αυτόν. Όταν όμως φτάσει ένα συγκεκριμένο μέγεθος θα «αφήσει» τον κύλινδρο και θα ακολουθήσει την ροή. Στην συνέχεια θα δημιουργηθεί ένας άλλος στρόβιλος επίσης στο πίσω μέρος αλλά στην χαμηλή πλευρά του κυλίνδρου. Και αυτός θα μεγαλώσει και όταν φτάσει ένα συγκεκριμένο μέγεθος θα φύγει από τον κύλινδρο. Με λίγα λόγια πίσω από τον κύλινδρο θα δημιουργούνται και θα φεύγουν περιοδικά στρόβιλοι, ή με άλλη διατύπωση θα μας φαίνεται ότι ο κύλινδρος «εκπέμπει» περιοδικά στροβίλους.

Κάθε φορά που «φεύγει» ένας στρόβιλος από τον κύλινδρο θα ασκείται μία δύναμη σε αυτόν. Αν και η δύναμη αυτή δεν είναι μεγάλη, αν η συχνότητα εκπομπής είναι περίπου ίδια με την ιδιοσυχνότητα του στερεού αντικειμένου θα έχουμε το φαινόμενο του συντονισμού το οποίο είναι δυνατόν να προκαλέσει την θραύση του στερεού αντικειμένου.

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι ροή von Karman δεν έχουμε μόνο γύρω από κύλινδρο, αλλά και γύρω από στερεά αντικείμενα τα οποία έχουν άλλη μορφή. Αυτό το

φαινόμενο του συντονισμού άλλωστε οδήγησε στην κατάρρευση της γέφυρας Τακόμα στις ΗΠΑ.

Η συχνότητα εκπομπής στροβίλων από τον κύλινδρο ( $n$ ) δίνεται από τον αριθμό Strouhal, ο οποίος συμβολίζεται με  $St$  και ορίζεται από την σχέση:

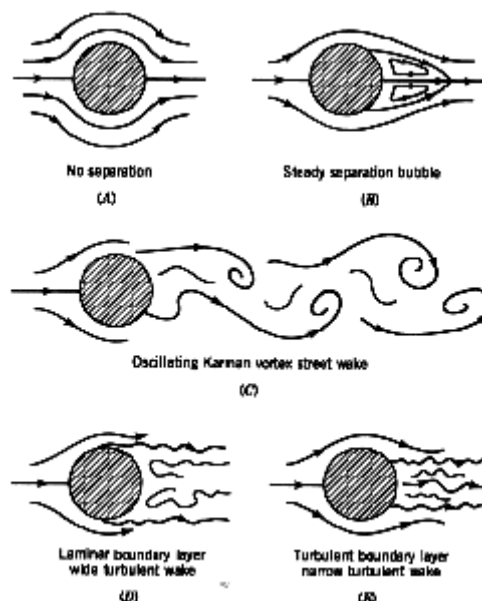
$$St = \frac{nD}{U_0} \quad (3)$$

Στην εξίσωση πάνω  $U_0$  είναι μία μέση τιμή του πεδίου ταχύτητας μακριά από τον κύλινδρο,  $D$  είναι η διάμετρος του κυλίνδρου), ενώ  $n$  είναι η συχνότητα εκπομπής (ή δημιουργίας) των στροβίλων.

Πειράματα δείχνουν ότι για  $80 < Re < 150$  ισχύει η σχέση:

$$St = 0,212 \left( 1 - \frac{21,2}{Re} \right) \quad (4)$$

Ενώ για  $150 < Re < 300$  ο αριθμός Strouhal κυμαίνεται μεταξύ 0,18 και 0,2.



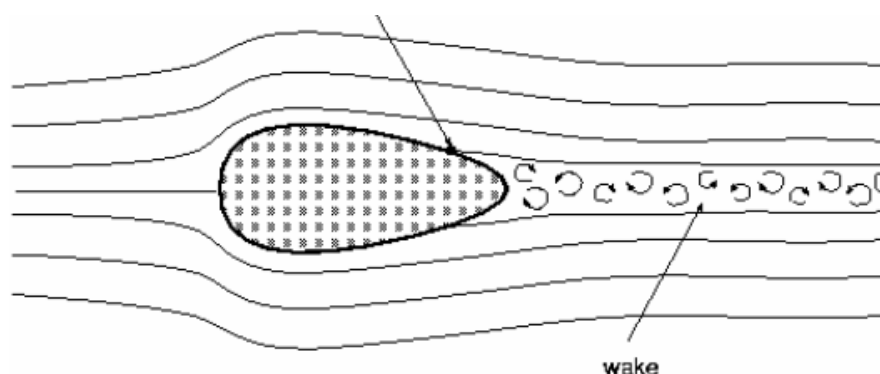
Σχήμα 2 Γραμμές ροής για ροή γύρω από κύλινδρο (A)  $Re=0,2$ , (B)  $Re=12$ , (C)  $Re=120$ , (D)  $Re=30.000$ , (E)  $Re=500.000$

## 2.ΡΟΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΣΦΑΙΡΑ

Έχουμε για την ροή γύρω από σφαίρα παρεμφερή συμπεριφορά με αυτήν της ροής γύρω από κύλινδρο., με ποσοτικές όμως διαφορές. Ο κάθε τύπος ροής εμφανίζεται για διαφορετικό φάσμα αριθμών Reynolds και οι δυνάμεις που ασκούνται από την ροή είναι διαφορετικές.

## 3.ΡΟΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Για την περίπτωση ροής γύρω από αεροδυναμικά σχήματα και για την περίπτωση της τυρβώδους ροής, αυτά μπορεί να θεωρηθεί ότι διαταράσσουν σε μικρότερο βαθμό την ροή (μπορούμε να πούμε ότι έχουν ένα σχήμα προσαρμοσμένο στις γραμμές ροής). Κατά συνέπεια η περιοχή των στροβίλων στο πίσω μέρος του σχήματος καταλαμβάνει μικρότερο χώρο. Επειδή ακριβώς σε αυτήν την περιοχή οι πιέσεις είναι μικρές και επειδή ακριβώς οι δυνάμεις οι οποίες ασκούνται από την ροή στο στερεό σώμα οφείλονται σε διαφορές πιέσεων, οι προαναφερθείσες δυνάμεις οι οποίες ασκούνται σε σώματα τα οποία έχουν αεροδυναμικό σχήμα είναι μικρές. Σε πολλές εφαρμογές της επιστήμης του μηχανικού το παραπάνω είναι κάτι το επιθυμητό.



Σχήμα 3 Γραμμές ροής γύρω από ένα αεροδυναμικό σχήμα