2.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΚΑΘΙΖΗΣΗΣ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ ΣΕ ΑΜΜΟΚΡΑΤΗ

Υπολογίστε την ταχύτητα καθίζησης u_g ενός σωματιδίου άμμου διαμέτρου ενός χιλιοστού, μέσα σε αμμοκράτη.
Η πυκνότητα της άμμου θεωρείται ίση με $\rho_s = 2600 kgm^{-3}$, του νερού ίση με $\rho = 1000 kgm^{-3}$ και το κινηματικό ιξώδες του νερού ίσο με $\nu = 10^{-6} m^2 s^{-1}$.
Για τον υπολογισμό του συντελεστή αντίστασης μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση:
$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}} + \frac{3}{\sqrt{\mathrm{Re}}} + 0{,}34$, όπου ο αριθμός Reynolds (Re) υπολογίζεται με βάση την διάμετρο του κόκκου της άμμου.

ΛΥΣΗ

Γενικότητες- Θεωρητικό υπόβαθρο

Η πράξη έχει αποδείξει ότι για προβλήματα καθίζησης σαν αυτό το οποίο περιγράφεται στην παρούσα άσκηση πολύ γρήγορα αποκαθίσταται ισορροπία δυνάμεων και το σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Οι δυνάμεις οι οποίες δρούν απάνω στο σωματίδιο είναι:
α) Η δύναμη της βαρύτητας F_B (ασκείται κατά την φορά της κίνησης του σωματιδίου το οποίο έχει καθοδική πορεία).
β) Η δύναμη της άνωσης F_A (ασκείται αντίθετα στην φορά της κίνησης του σωματιδίου – του κόκκου της άμμου).
γ) Η δύναμη της υδροδυναμικής αντίστασης F_Y (ασκείται αντίθετα στην φορά της κίνησης του σωματιδίου).

Το ισοζύγιο των δυνάμεων γράφεται λοιπόν ως εξής:

$$F_B = F_A + F_Y \tag{1α}$$

Ή ισοδύναμα:

$$F_Y = F_B - F_A \tag{1β}$$

Συμβολίζοντας με V_s τον όγκο της σφαίρας μπορούμε να γράψουμε τις σχέσεις για την δύναμη της βαρύτητας F_B και την δύναμη της άνωσης F_A ως εξής:

$$F_B = V_S \rho_s g \tag{2α}$$

$$F_A = V_S \rho_A g \tag{2β}$$

Θεωρώντας ότι το σωματίδιο (κόκκος της άμμου) έχει σφαιρικό σχήμα, με ακτίνα R:

$$V_S = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Κατά συνέπεια προκύπτει ότι:

$$F_B = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s g \qquad (3\alpha)$$

$$F_A = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_A g \qquad (3\beta)$$

Λαμβάνοντας υπόψη μου τις εξισώσεις (3α) και (3β) το δεξιό σκέλος της εξίσωσης εξίσωσης (1β) μπορεί να γραφεί:

$$F_B - F_A = \frac{4}{3}\pi R^3 \left(\rho_s - \rho\right) g \qquad (4)$$

Για την περίπτωση της έρπουσας ροής η υδροδυναμική δύναμη η οποία ασκείται σε σώμα σφαιρικής μορφής το οποίο κινείται με ταχύτητα u_g γράφεται:

$$F_Y = 6\pi\mu R u_g \qquad (5)$$

Στην παραπάνω εξίσωση μ είναι το δυναμικό ιξώδες.

Πρέπει να πάρουμε υπόψη μας ότι για την περίπτωση της ροής γύρω από σφαίρα η υπόθεση της έρπουσας ροής ισχύει για τιμές του αριθμού Reynolds $Re<1$. Προφανώς για αυτές τις τιμές ισχύει η εξίσωση (5).

Για την περίπτωση της έρπυσας ροής λοιπόν, παίρνοντας υπόψη μου τις εξισώσεις (1β), (4) και (5), αλλά και την σχέση $\mu=\nu\rho$, όπου ν είναι το κινηματικό ιξώδες, προκύπτει ότι:

$$u_g = \frac{2}{9}\frac{R^2 g}{\nu}\frac{\left(\rho_s - \rho\right)}{\rho} \qquad (6\alpha)$$

Ή ισοδύναμα

$$u_g = \frac{2}{9}\frac{R^2 g}{\nu}\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) \qquad (6\beta)$$

Αντίθετα για την περίπτωση για την οποία η ροή δεν είναι έρπουσα, δηλαδή δεν ισχύει η σχέση Re<1, δεν υπάρχει ρητή αναλυτική λύση (όπως δηλ. η εξίσωση 5).

Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε την σχέση η οποία συνδέει τον ορισμό την υδροδυναμικής αντίστασης C_D με τον αριθμό Reynolds (η οποία δίνεται στην εκφώνηση και ισχύει προφανώς μόνο για ροή γύρω από σφαίρα), αλλά και τον ορισμό του C_D:

$$C_D = \frac{F_Y}{\frac{1}{2}\rho\left(u_g\right)^2 A} \tag{7}$$

Στην παραπάνω εξίσωση A είναι η διατομή του στερεού σώματος η οποία είναι κάθετη στην ροή και έχει την μεγαλύτερη, ενώ όλες οι άλλες παράμετροι έχουν οριστεί.

Στην περίπτωση μας

$$A = \pi R^2, \tag{8}$$

οπότε η εξίσωση (7) γράφεται:

$$F_Y = \frac{1}{2} C_D \pi R^2 \rho \left(u_g\right)^2 \tag{9}$$

Παίρνοντας υπόψη μου τις εξισώσεις (1β), (4) και (9) προκύπτει ότι

$$u_g = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{g}{C_D}\frac{\left(\rho_\sigma - \rho\right)}{\rho} R} \tag{10}$$

Η λύση του προβλήματος

Υποθέτουμε ότι η ροή είναι έρπουσα.

Η ταχύτητα υπολογίζεται για την περίπτωση αυτή σε (βλ. εξίσωση 6β):

$$u_g = \frac{2}{9}\frac{R^2 g}{\nu}\left(\frac{\rho_\sigma}{\rho} - 1\right) = \frac{2}{9}\frac{(0,5\cdot 10^{-3} m)^2 9,81 ms^{-2}}{10^{-6} m^2 s^{-1}}\left(\frac{2600 kgm^{-3}}{1000 kgm^{-3}} - 1\right) = 0.9 ms^{-1}$$

Ο αριθμός Reynolds υπολογίζεται σε:

$$\mathrm{Re} = \frac{u_g d}{\nu} = \frac{0.9 ms^{-1} 10^{-3} m}{10^{-6} m^2 s^{-1}} = 900 >> 1.$$

Προφανώς η υπόθεση της έρπουσας ροής δεν ισχύει.

Η ταχύτητα πρέπει να προσδιορισθεί επαναληπτικά.

Υποθέτω ότι $\mathrm{Re}_0 = 900$ και υπολογίζω τον συντελεστή αντίστασης σε:

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}} + \frac{3}{\sqrt{\mathrm{Re}}} + 0.34 = \frac{24}{900} + \frac{3}{\sqrt{900}} + 0.34 = 0,467$$

Μία καινούργια εκτίμηση της ταχύτητας καθίζησης δίνεται από την σχέση (βλ. εξίσωση 10):

$$u_g = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{g}{C_D}\frac{(\rho_\sigma - \rho)}{\rho}R} = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{9,81}{0,467}\frac{(2600-1000)}{1000}0,5\cdot 10^{-3}} \text{ =0,21m/s}$$

κατά συνέπεια ο αριθμός Reynolds υπολογίζεται σε Re_1=210.

Προφανώς: $\mathrm{Re}_1 \neq \mathrm{Re}_0$

Θα λύσω την άσκηση με τη μέθοδο των διαδοχικών επαναλήψεων ή των διαδοχικών προσεγγίσεων: σε κάθε βήμα των υπολογισμών (δηλ. σε κάθε επανάληψη), υποθέτοντας γνωστές τις τιμές του αριθμού Reynolds (*Re*) και κατά συνέπεια του συντελεστή αντίστασης C_D, θα υπολογίσω μία νέα τιμή της ταχύτητας καθίζησης u_g με βάση την εξίσωση (10). Στην συνέχεια με βάση την τιμή αυτή του u_g θα υπολογίσω μία νέα, βελτιωμένη, τιμή του αριθμού Reynolds Re και μία νέα τιμή του C_D. Αν κριθεί σκόπιμο η τελευταία τιμή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκ νέου εκτίμηση της ταχύτητας u_g.

Κατά κανόνα ακολουθώντας μερικές φορές την διαδικασία αυτή, θα έχω σύγκλιση, δηλαδή η τιμές των διαφόρων παραμέτρων του προβλήματος δεν θα αλλάζουν ουσιαστικά. Ό̈ταν φτάσω σε αυτό το σημείο της σύγκλισης, μπορώ να θεωρήσω ότι έχω βρει την λύση.

Ακολουθώντας λοιπόν την παραπάνω διαδικασία και χρησιμοποιώντας τη νέα τιμή του αριθμού Reynolds (Re_1=210) υπολογίζω τον συντελεστή αντίστασης σε:

$$C_D = \frac{24}{210} + \frac{3}{\sqrt{210}} + 0,34 = 0,66.$$

Η ταχύτητα καθίζησης εκτιμάται σε:

$$u_g = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{g}{C_D}\frac{(\rho_\sigma - \rho)}{\rho}R} = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{9,81}{0,66}\frac{(2600-1000)}{1000}0,5\cdot 10^{-3}} \text{ =0,18m/s.}$$

Υπολογίζουμε τη νέα τιμή του αριθμού Reynolds σε Re_2=180.

Το σφάλμα που προκύπτει ανάμεσα σε δύο διαδοχικές εκτιμήσεις ως προς τον αριθμό Reynolds υπολογίζεται ως εξής:

$$\varepsilon = \left|\frac{\mathrm{Re}_i - \mathrm{Re}_{i-1}}{\mathrm{Re}_i}\right| = \left|\frac{180-210}{180}\right| \text{=17\%.}$$

Το σφάλμα ως προς τον αριθμό Reynolds είναι μεγαλύτερο από 10%, κατά συνέπεια συνεχίζουμε τους υπολογισμούς.

Η νέα εκτίμηση για τον συντελεστή αντίστασης είναι:

$$C_{D3} = \frac{24}{180} + \frac{3}{\sqrt{180}} + 0{,}34 = 0{,}70\,.$$

Με βάση τον συντελεστή αυτόν η ταχύτητα υπολογίζεται σε: $u_g = 0{,}17\text{m/s}$ και ο αριθμός Reynolds σε: $\mathrm{Re}_3 = \dfrac{0{,}17 m/s \cdot 0.001 m}{10^{-6} m^2/s}$ =170.

Το σφάλμα ανάμεσα στις δύο τελευταίες επαναλήψεις

$$\varepsilon = \left|\frac{\mathrm{Re}_3 - \mathrm{Re}_2}{\mathrm{Re}_3}\right| = \left|\frac{170-180}{170}\right| = 6\% < 10\%\,.$$

Κατά συνέπεια η ζητούμενη τιμή της ταχύτητας είναι $u_g = \mathbf{0{,}17m/s}$