ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ
ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2017

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΑΝΟΙΚΤΑ ΒΙΒΛΙΑ

ΟΜΑΔΑ Α

2ο ΘΕΜΑ

(5 Μονάδες)

ΕΚΦΩΝΗΣΗ

Δίνεται σε αδιάστατη μορφή το παρακάτω πεδίο ταχυτήτων

$$u_x = -\frac{1}{2x}$$

$$u_y = \frac{1}{2y}$$

$$u_z = 0$$

Όπου u_x, u_y και u_z είναι οι συνιστώσες του πεδίου των ταχυτήτων κατά *x, y* και *z* αντίστοιχα.

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις σχετικά με το πεδίο ταχυτήτων το οποίο περιγράφηκε πιο πάνω:

1. Είναι κατά την γνώμη σας η ροή ασυμπίεστη;
2. Είναι κατά την γνώμη σας η ροή μόνιμη;
3. Γράψτε τις εξισώσεις για τις τροχιές των σωματιδίων σε μορφή στην οποία δεν εμφανίζεται ο χρόνος. Περιγράφουν οι εξισώσεις αυτές καμπύλες οι οποίες είναι παραβολές, υπερβολές, κύκλοι, ελλείψεις, ή καμπύλες οι οποίες έχουν άλλο σχήμα;
4. Σχεδιάστε την τροχιά ενός σωματιδίου το οποίο την χρονική στιγμή t=0 βρισκόταν στην θέση $x=\xi_1=\sqrt{2}$, $y=\xi_2=\sqrt{2}$.
5. Γράψτε τις εξισώσεις για τις γραμμές ροής Περιγράφουν οι εξισώσεις αυτές καμπύλες οι οποίες είναι παραβολές, υπερβολές, κύκλοι, ελλείψεις, ή καμπύλες οι οποίες έχουν άλλο σχήμα;

Όλες οι απαντήσεις σας πρέπει να αιτιολογηθούν κατάλληλα.

ΛΥΣΗ

1) Η ροή του συγκεκριμένου προβλήματος είναι δισδιάσταστη επειδή $u_z = 0$.

Για να ελέγξουμε αν η ροή είναι ασυμπίεστη πρέπει να ελέγξουμε αν το πεδίο ταχυτήτων ικανοποιεί την αντίστοιχη εξίσωση της συνέχειας (ή διατήρησης της μάζας) η οποία για την περίπτωση διδιάστατης ροής γράφεται:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

Παίρνοντας υπόψη μου το πεδίο ταχυτήτων το οποίο δίνεται στην εκφώνηση προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial\left(-1/\left(2x\right)\right)}{\partial x} = \frac{1}{2x^2} \qquad (2α)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial(1/\left(2y\right))}{\partial y} = -\frac{1}{2y^2} \qquad (2β)$$

Παίρνοντας υπόψη μας τις εξισώσεις (1), (2α) και (2β) προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2y^2} \neq 0 \qquad (3)$$

Προκύπτει λοιπόν ότι το συγκεκριμμένο πεδίο ταχυτήτων **<u>δεν</u>** ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας και η **ροή είναι <u>μη</u> ασυμπίεστη.**

2) Παρατηρούμε ότι στην μορφή που μας δίνεται το πεδίο ταχυτήτων στην εκφώνηση, δεν εμφανίζονται οι παράμετροι ξ_1, ξ_2, ξ_3 μπορεί να θεωρηθεί ότι αυτές είναι και σε μορφη Euler. Από το ίδιο πεδίο ραχυτήτων προκύπτει επίσης ότι καμία από τις **συνιστώσες του συγκεκριμένου πεδίου ταχυτήτων δεν εξαρτάται από τον χρόνο και κατά συνέπεια η ροή είναι μόνιμη.**

3) Η γενική μορφή των εξισώσεων για τις τροχιές είναι η παρακάτω:

$$u_x = \frac{dx}{dt} \qquad (4α)$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} \qquad (4β)$$

Για το πρόβλημα το οποίο εξετάζουμε έχουμε:

$$u_x = -\frac{1}{2x} = \frac{dx}{dt} \qquad (5α)$$

$$u_y = \frac{1}{2y} = \frac{dy}{dt} \quad (5β)$$

Αναδιοργανώνοντας τις παραπάνω εξισώσεις:

$$dt = (-2x)dx \quad (6α)$$

$$dt = 2ydy \quad (6β)$$

Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις (6α) και (6β):

$$\int_0^t dt' = \int_{\xi_1}^{x} (-2x')\,dx' \quad (7α)$$

$$\int_0^t dt' = \int_{\xi_2}^{y} (2y')\,dy' \quad (7β)$$

Εκτελώντας τις πράξεις προκύπτει σε πρώτο χρόνο ότι:

$$[t']_0^t = -\left[(x')^2\right]_{\xi_1}^{x} \quad (8α)$$

$$[t']_0^t = \left[(y')^2\right]_{\xi_2}^{y} \quad (8β)$$

Και τελικά:

$$t = -\left(x^2 - (\xi_1)^2\right) \quad (9α)$$

$$t = y^2 - (\xi_2)^2 \quad (9β)$$

Το αριστερό σκέλος της εξίσωσης (9α) είναι ίσο με το αριστερό σκέλος της εξίσωσης (9β). Κατά συνέπεια και το δεξιό σκέλος της εξίσωσης (9α) θα είναι με το δεξιό σκέλος της εξίσωσης (9β).

Προκύπτει ότι:

$$-\left(x^2 - (\xi_1)^2\right) = y^2 - (\xi_2)^2$$

ή ισοδύναμα:

$$x^2 + y^2 = (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2\,. \quad (10)$$

Παίρνοντας υπόψη μας ότι η εξίσωση για έναν κύκλο με κέντρο (x=a,y=b) και ακτίνα R γράφεται:

$$(\mathrm{x} - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (11)$$

Η εξίσωση (10) περιγράφει λοιπόν **έναν κύκλο** με κέντρο το σημείο με συντεταγμένες το σημείο $x=0$ και $y=0$ (αφού στην περίπτωση μας $\alpha=0$ και $b=0$) και ακτίνα $R=\sqrt{(\xi_1)^2+(\xi_2)^2}$.

Κατά συνέπεια για το πρόβλημα το οποίο εξετάζουμε οι τροχιές των σωματιδίων είναι κύκλοι.

4) Η εκφώνηση αναφέρεται σε ένα σωματίδιο για το οποίο ισχύει ότι $\xi_1=\sqrt{2}$, $\xi_2=\sqrt{2}$. Κατά συνέπεια η τροχιά του θα είναι **κύκλος** με κέντρο το σημείο με συντεταγμένες το σημείο $x=0$ και $y=0$ και ακτίνα $R=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=2$.

5) Η γενική μορφή για τις εξισώσεις για τις γραμμές ροής είναι:

$$\frac{dx}{u_x}=\frac{dy}{u_y} \tag{12}$$

Για το πρόβλημα το οποίο εξετάζουμε:

$$\frac{dx}{(-1/2x)}=\frac{dy}{(1/2y)} \tag{13}$$

ή ισοδύναμα:

$$-(2x)dx=(2y)dy \tag{14}$$

Προκύπτει το παρακάτω αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int -(2x)dx=\int(2y)dy \tag{15}$$

Κατά συνέπεια:

$$-x^2=y^2+C_1 \tag{16}$$

ή ισοδύναμα:

$$x^2+y^2=C_2 \tag{17}$$

Στις εξισώσεις (16) και (17) οι C_1 και C_2 είναι σταθερές ολοκλήρωσης.

Με βάση την εξίσωση (17) (βλ. και την εξίσωση 11), προκύπτει ότι για το συγκεκριμένο πρόβλημα **οι γραμμές ροής είναι κύκλοι**.