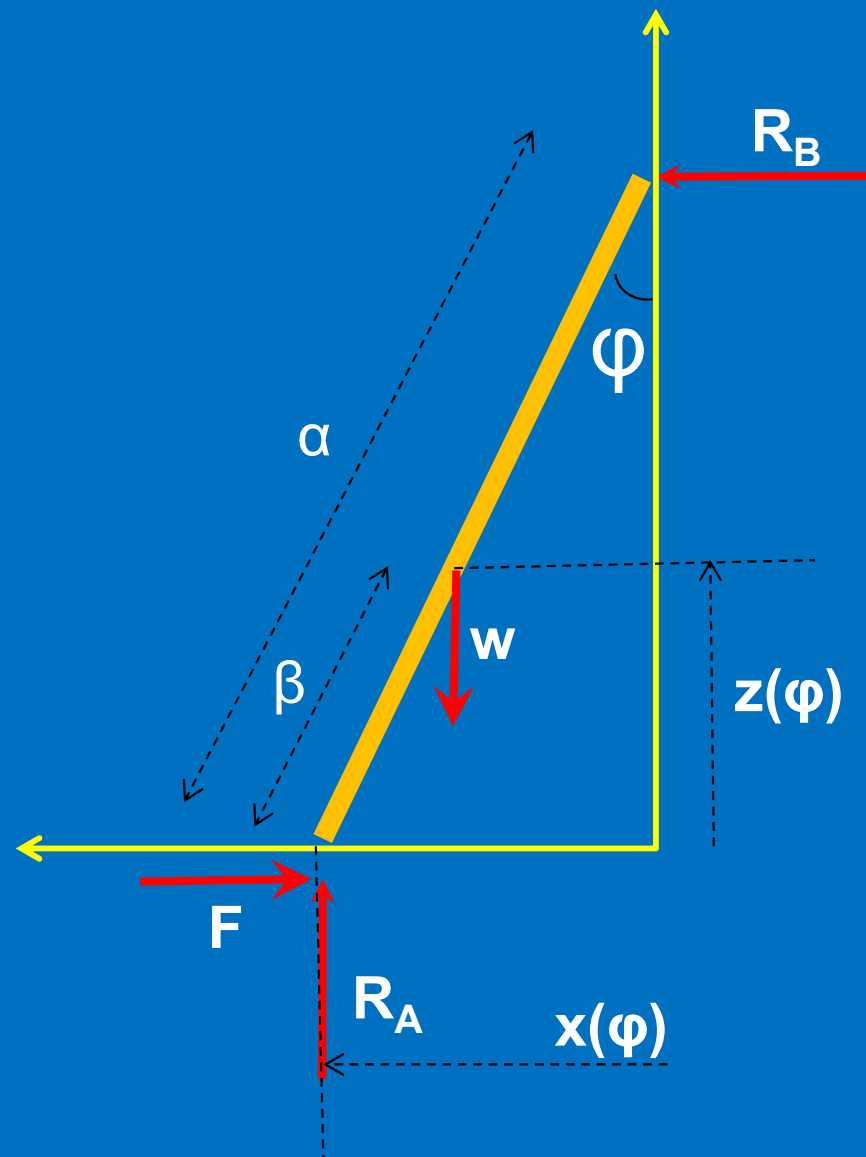
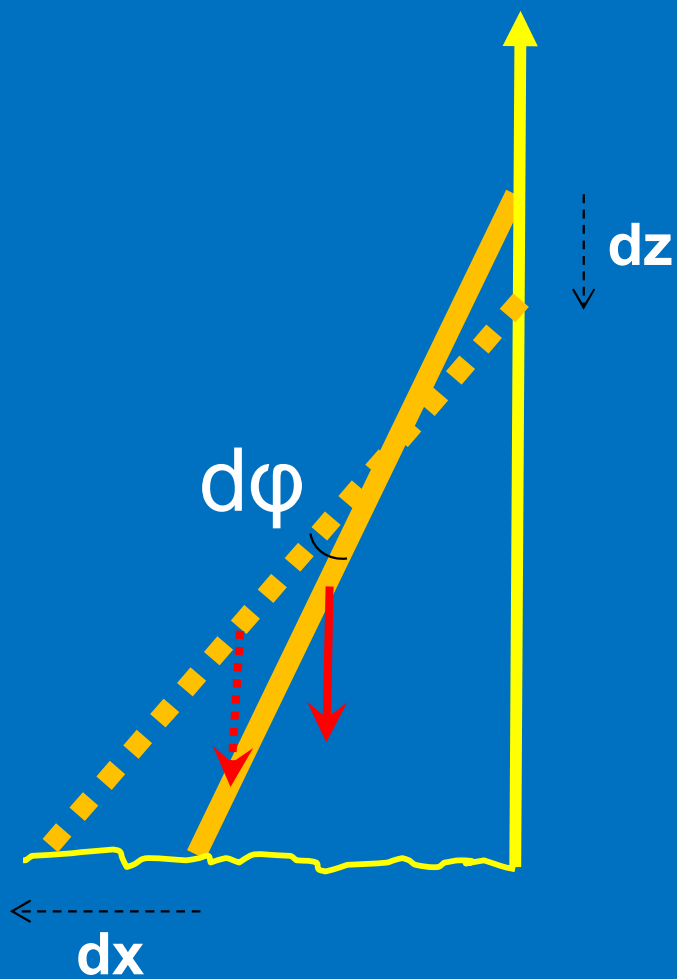


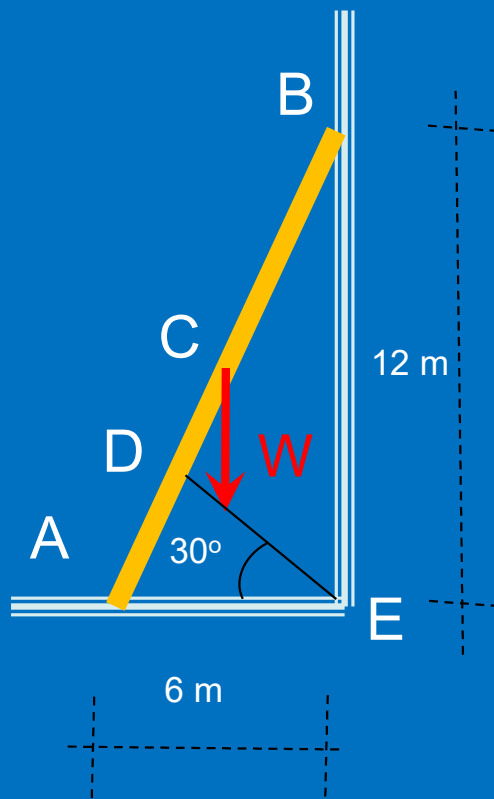
Πρόβλημα ενός βαθμού ελευθερίας κίνησης

ΔΕΣ

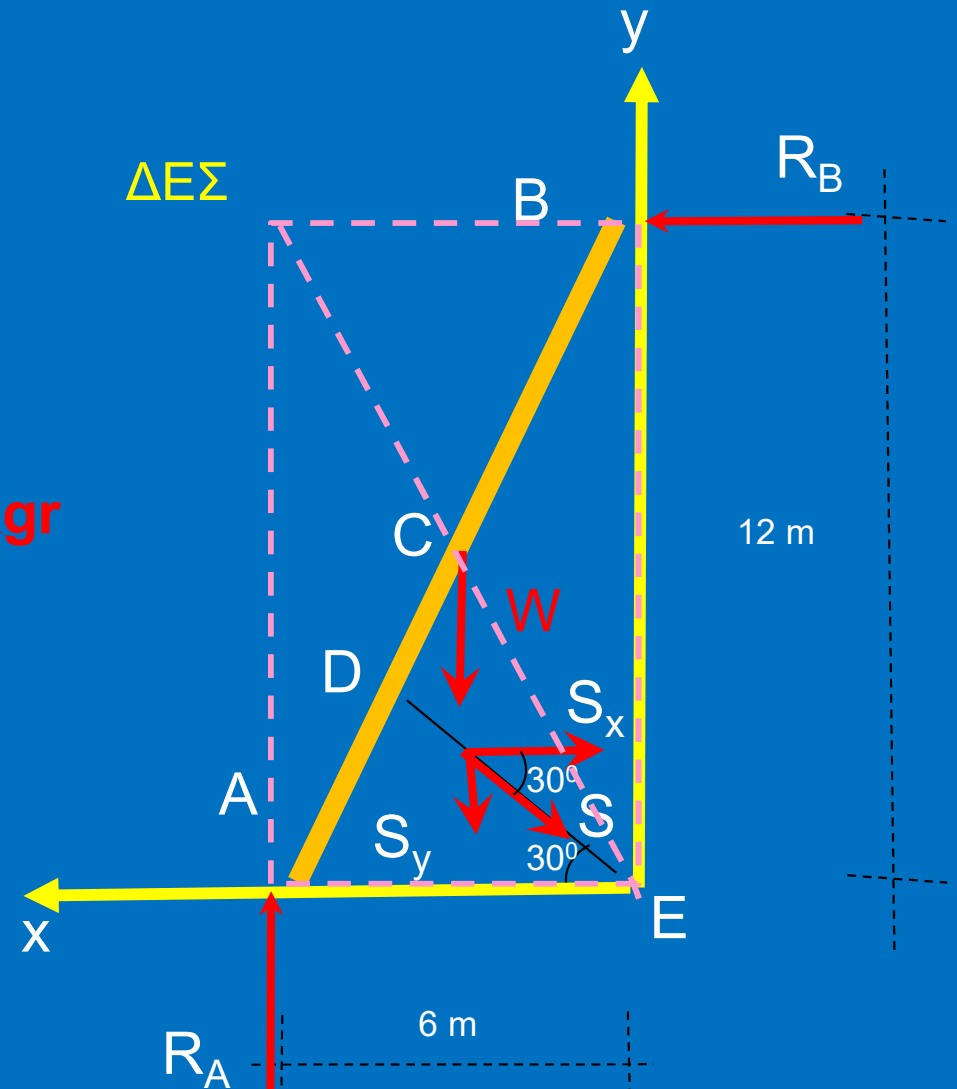


Εφαρμογή

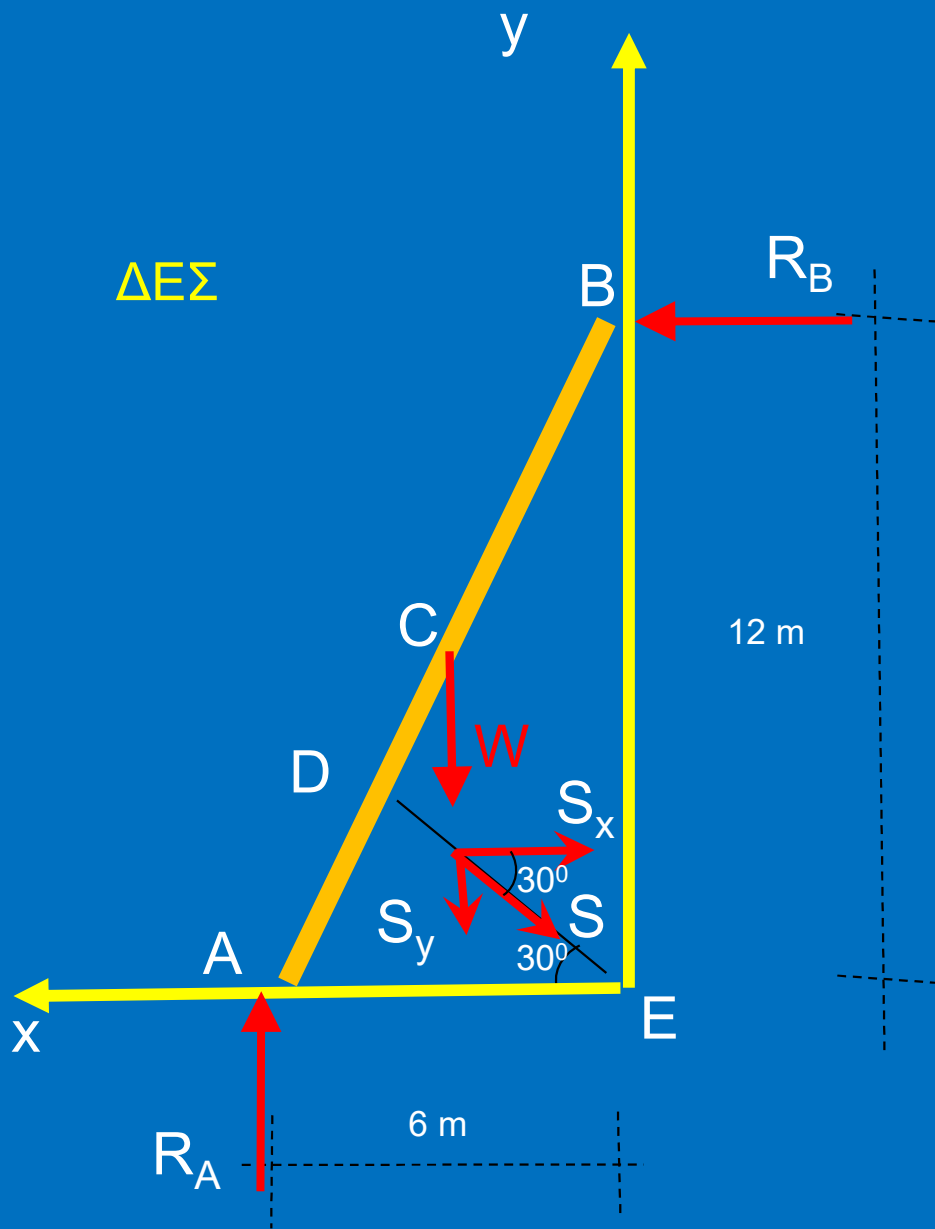
Μία ομοιογενής σκάλα συνολικού βάρους **25 Kgr** ακουμπάει χωρίς τριβή στα σημεία A και B του δαπέδου & ενός κατακόρυφου τοίχου αντίστοιχα. Η ολίσθηση της σκάλας εμποδίζεται με το σχοινί DE που σχηματίζει γωνία **30°** με το δάπεδο. Στο μεσαίο σκαλοπάτι της σκάλας βρίσκεται άνθρωπος βάρους **75 Kgr**. Να βρεθούν οι αντιδράσεις που αναπτύσσονται στα σημεία A και B καθώς και η τάση του σχοινιού.



$$W=25+75=100 \text{ Kgr}$$



Χωρίς σχοινί ή με λάθος σύνδεση του σχοινιού (π.χ. συνδεόμενου με το KB)
→ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ



Ορθογώνιο σύστημα Exy

Στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας

$$\sum M_{E|z} = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$S_x = \cos\varphi \cdot S = \sqrt{3}/2 \cdot S = 0.866 \cdot S$$

$$S_y = \sin\varphi \cdot S = 1/2 \cdot S = 0.5 \cdot S$$

$$\sum M_E = 0$$

$$\sum M_E = 12R_B + (EG)W - 6R_A = 0$$

$$R_A - 2R_B = 50$$

$$\sum F_x = 0 = S_x - R_B,$$

$$R_B = S_x = 0.866 \cdot S$$

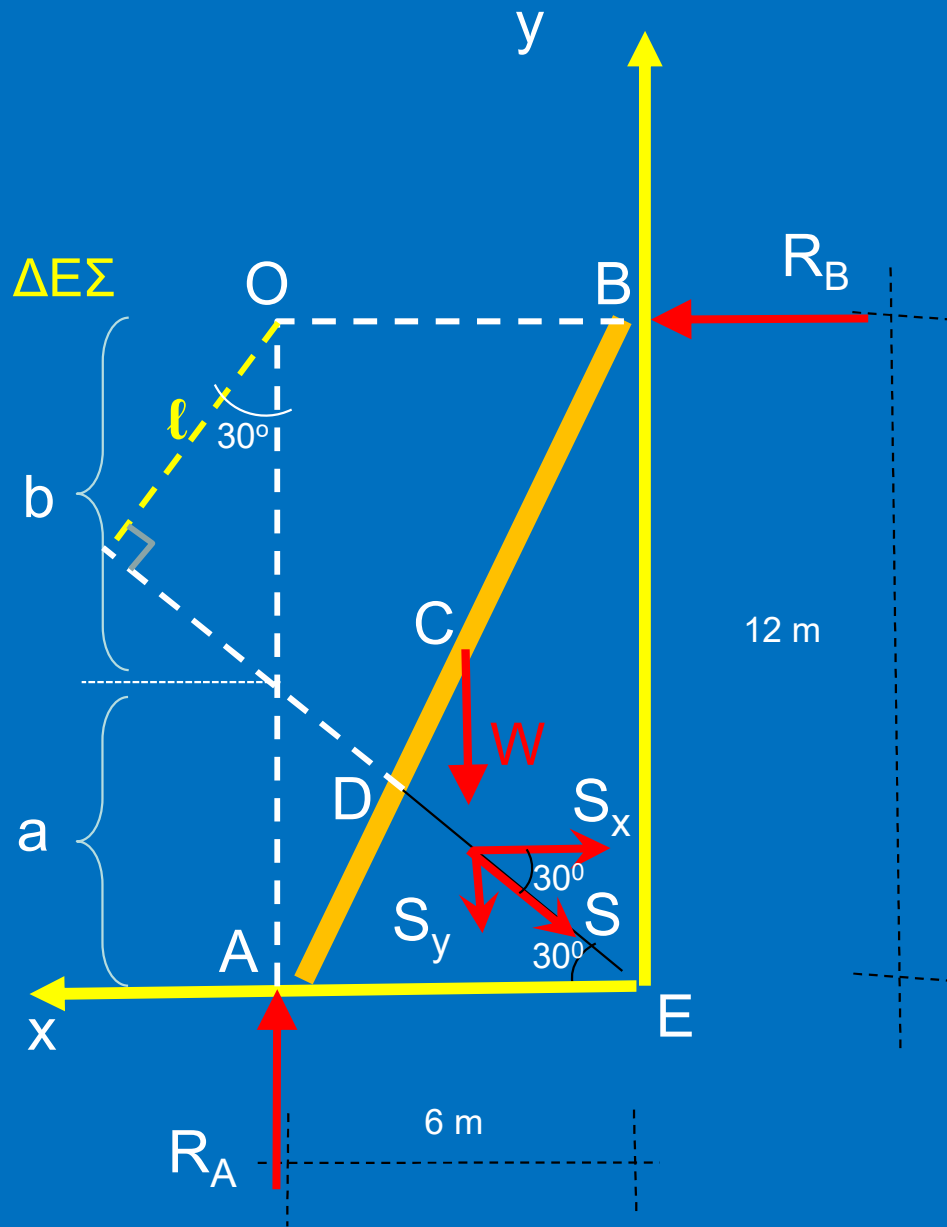
$$\sum F_y = 0 = R_A - S_y - W,$$

$$R_A = 100 + 0.5 \cdot S$$

Από 1^η & 3^η εξ.: $100 + 0.5 \cdot S - 2 \cdot 0.866S = 50 \rightarrow S = 40,6 \text{ Kgr}$

$R_B = 35,2 \text{ Kgr}$ & $R_A = 120,3 \text{ Kgr}$

Ορθογώνιο σύστημα Exy



Εναλλακτικά:

- $\Sigma M_O = 0$ (συντρέχουν οι R_A & R_B)
οπότε οι ροπές θα προκύψουν από
το $W=100$ Kgr και το άγνωστο S

Χρειαζόμαστε λίγη γεωμετρία...

$$\tan 30^\circ = a/6 \rightarrow a = 3.46 \text{ m}$$

$$b = 12 - 3.46 \rightarrow b = 8.54 \text{ m}$$

$$\rightarrow l = b \cdot \cos 30^\circ = 8.54 \cdot 0.866 \rightarrow l = 7.4 \text{ m}$$

$$\Sigma M_O = 0 \rightarrow l \cdot S - 3 \cdot W = 0$$

$$\rightarrow S = 300 / 7.4 \rightarrow$$

$$S = 40.6 \text{ Kgr}$$

$$S_x = \cos \varphi \cdot S = 0.866 \cdot S \rightarrow S_x = 35.2 \text{ Kgr}$$

$$S_y = \sin \varphi \cdot S = 0.5 \cdot S \rightarrow S_y = 20.3 \text{ Kgr}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0 = S_x - R_B,$$

$$R_B = 35.2 \text{ Kgr}$$

$$\rightarrow \Sigma F_y = 0 = R_A - S_y - W,$$

$$R_A = 100 + 20.3 = 120.3 \text{ Kgr}$$

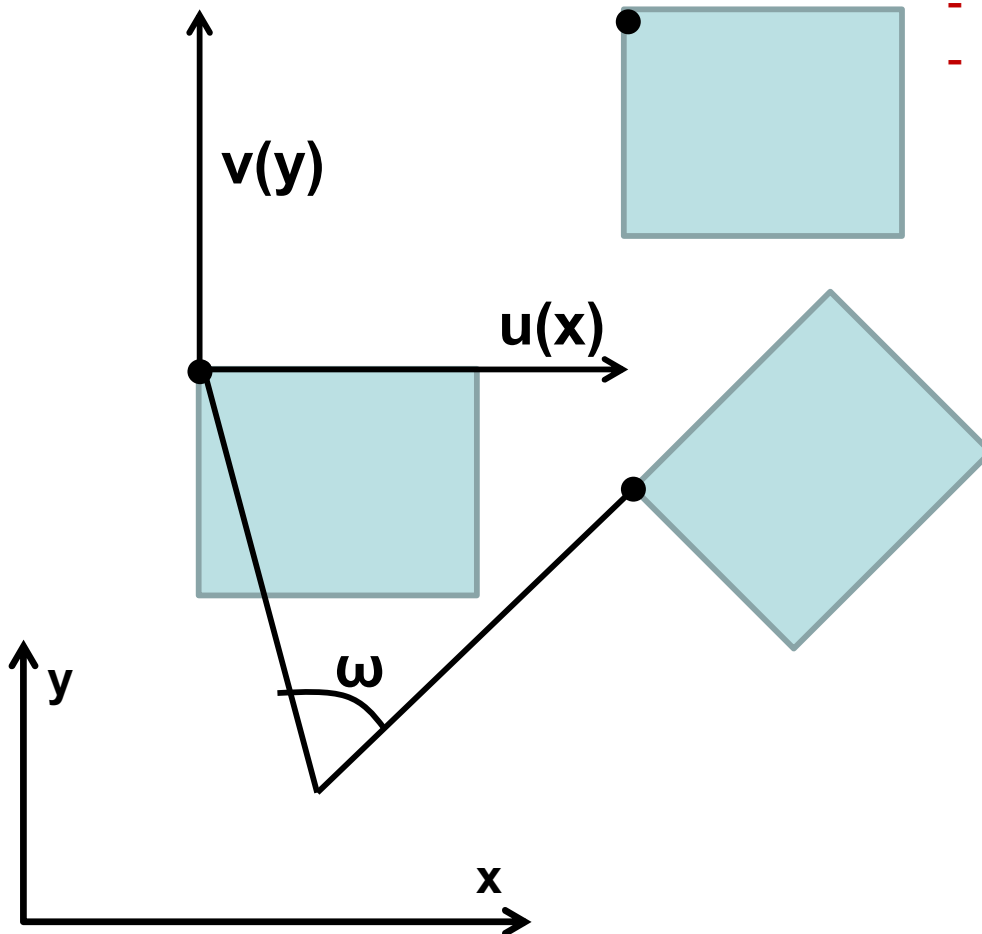
Ισορροπία και βαθμοί ελευθερίας

Στο επίπεδο:

Σε τυχαία μετακίνηση: μετάθεση $u(x) - v(y)$ και περιστροφή $\omega \rightarrow 3$ βαθμοί ελευθερίας κίνησης

Σε ισορροπία:

- επιβάλλεται ένας εξωτερικός περιορισμός για κάθε βαθμό ελευθερίας
- ανεξάρτητοι μεταξύ τους οι περιορισμοί
- Υλοποιούνται με συνδέσμους μεταξύ του σώματος και του εδάφους



$$\Sigma F = 0$$

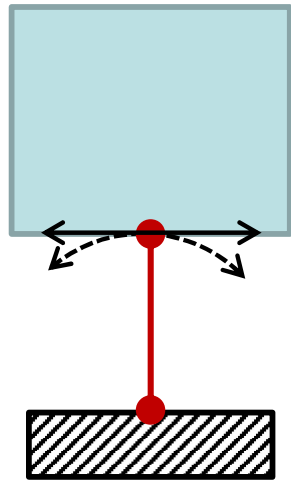
$$u(x) = 0 \quad \Delta \text{ΕΝ ΚΙΝΕΙΤΑΙ}$$

$$v(y) = 0$$

$$\Sigma M = 0$$

$$\omega = 0 \quad \Delta \text{ΕΝ ΣΤΡΕΦΕΤΑΙ}$$

Δεσμική ράβδος: απαγορεύει μετατόπιση στον άξονά της και αναπτύσσει αντίδραση στον άξονά της άγνωστου μέτρου και φοράς. Επιτρέπει απειροστή κίνηση κάθετα στον άξονά της!



$$u \neq 0$$

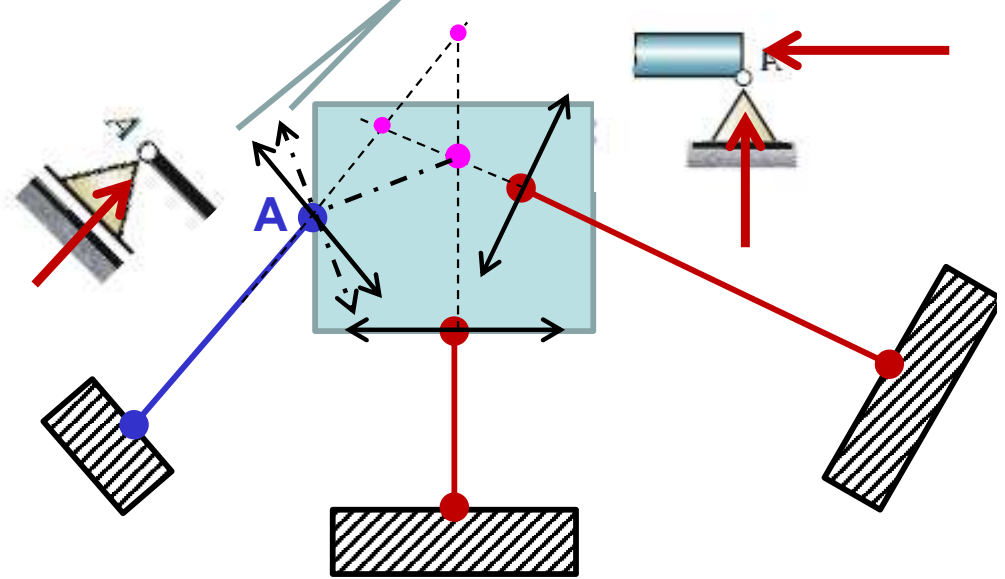
$$v = 0$$

$$\omega \neq 0$$

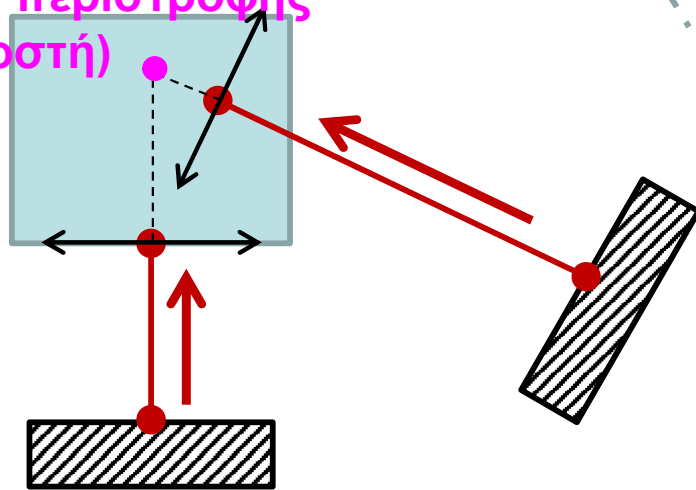


Μία δ. ράβδος = κύλιση

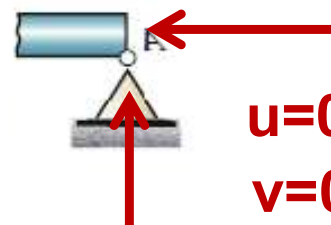
Αδύνατον το σημείο A να διαγράψει ταυτόχρονα δύο τροχιές!



Κέντρο περιστροφής (απειροστή)



ΑΚΙΝΗΤΟΠΟΙΗΣΗ ΦΟΡΕΑ = με 3 Δ.Ρ. που δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο → ΣΤΕΡΕΟΣ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ & ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΗ στήριξη



$$u = 0$$

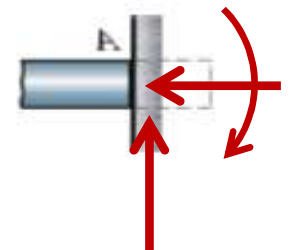
$$v = 0$$

$$\omega \neq 0$$

$$u = 0$$

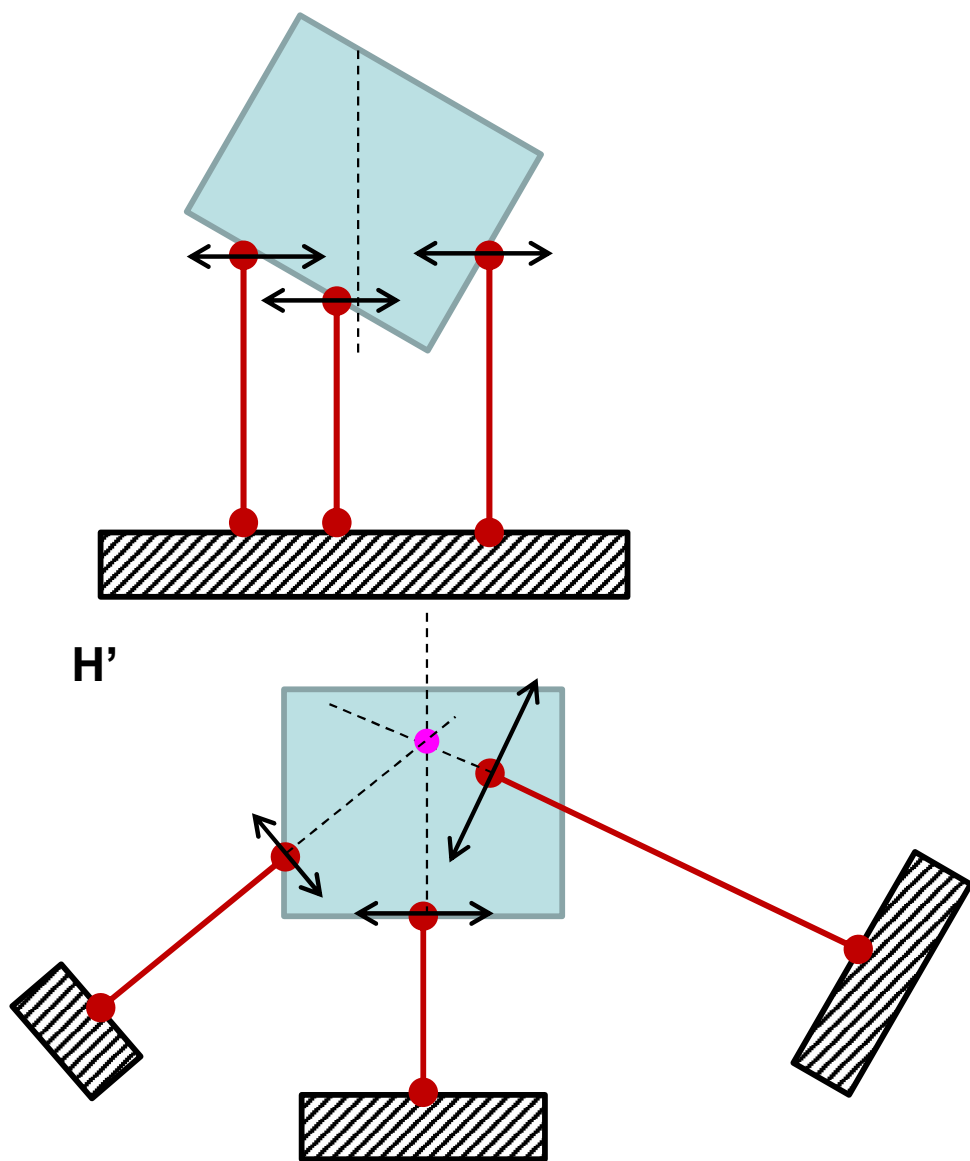
$$v = 0$$

$$\omega = 0$$



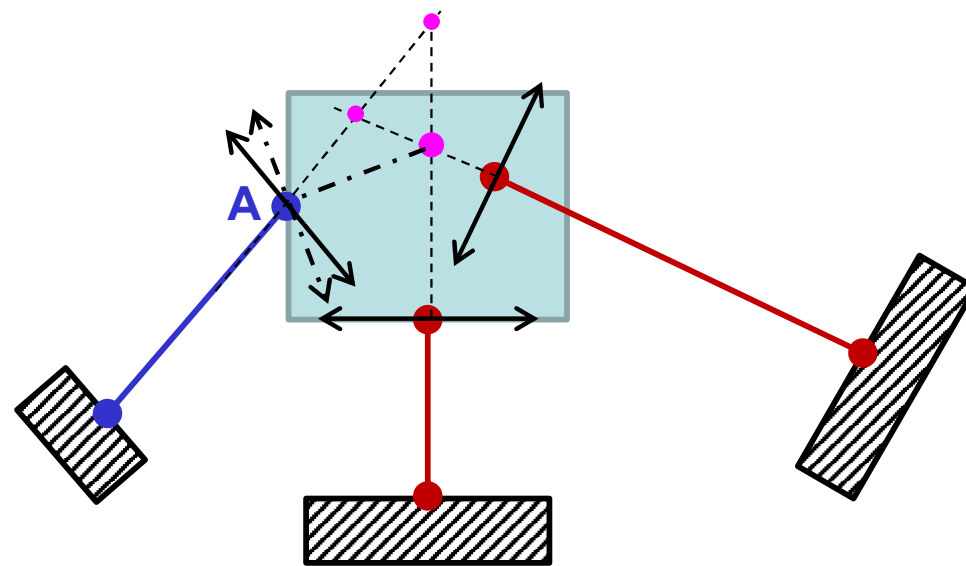
Δύο δ. ράβδοι = άρθρωση: επιτρέπει απειροστή περιστροφή ως προς Κ.Π. και μόνο!

Δεσμική ράβδος: απαγορεύει μετατόπιση στον άξονά της και αναπτύσσει αντίδραση στον άξονά της άγνωστου μέτρου και φοράς. Επιτρέπει απειροστή κίνηση κάθετα στον άξονά της!



Χαλαρή στήριξη ΦΟΡΕΑ:
 δυνατή η απειροστή περιστροφή: όταν οι 3 Δ.Ρ. συντρέχουν ή είναι παράλληλες → ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ

Αδύνατον το σημείο A να διαγράψει ταυτόχρονα δύο τροχιές!



ΑΚΙΝΗΤΟΠΟΙΗΣΗ ΦΟΡΕΑ = με 3 Δ.Ρ. που δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο → ΣΤΕΡΕΟΣ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ & ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΗ στήριξη

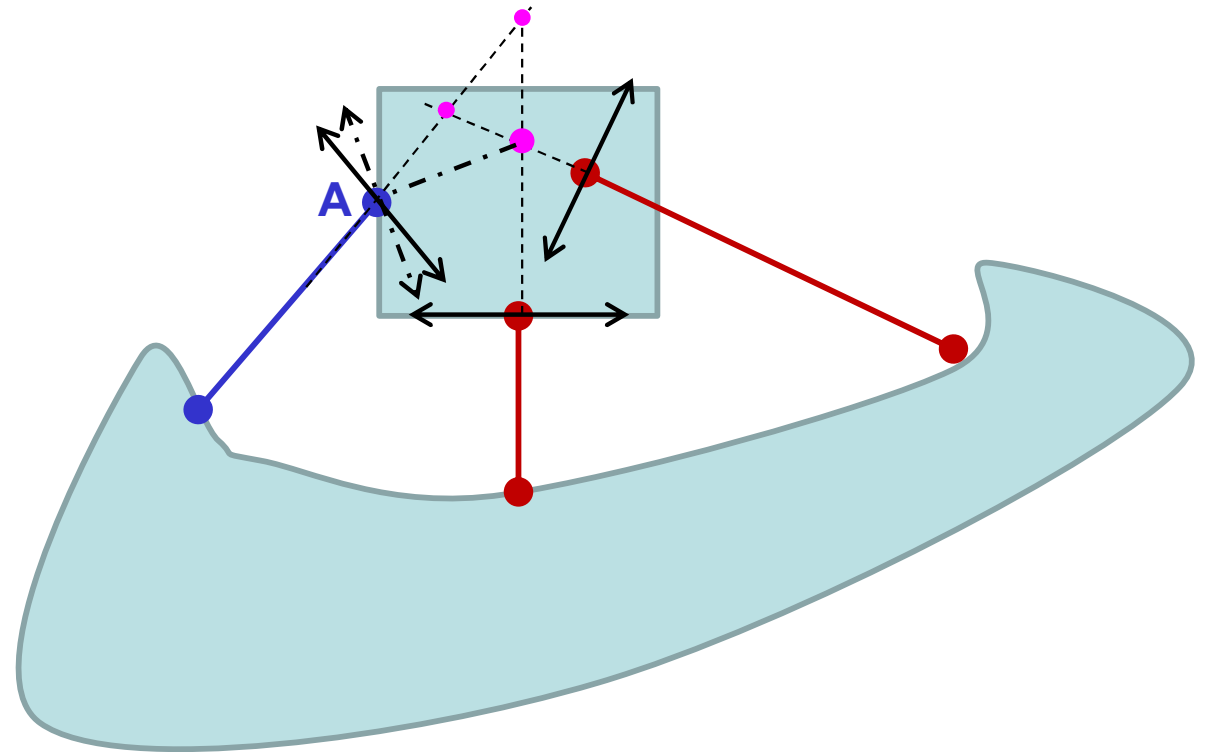
← Όμως...

ΣΤΕΡΕΟΣ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ η δίσκων

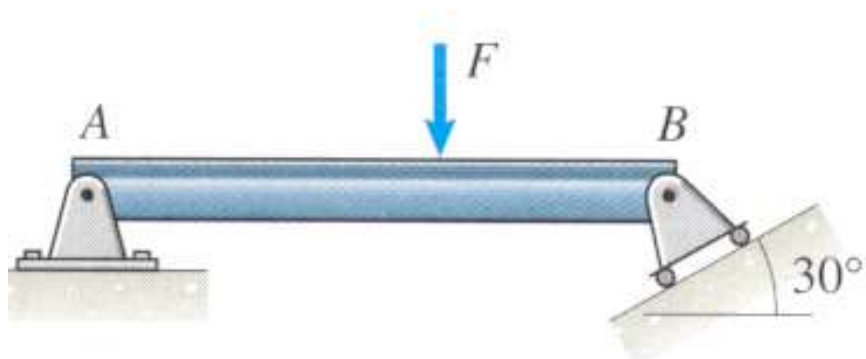
Δύο δίσκοι που συνδέονται
μεταξύ τους με 3 Δ.Ρ. και δεν
διέρχονται από το ίδιο
σημείο

Εάν n =δίσκοι που ανά
δύο συνδέονται με 3 Δ.Ρ.
που δεν συντρέχουν,
τότε ο ελάχιστος
αριθμός ρ δεσμικών
ράβδων του
σχηματισμού είναι:

$$\rho=3(n-1)$$



ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΦΟΡΕΑΣ: όταν στηρίζεται με 3 Δ.Σ. που δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο



Το στερεό (ή φορέας) με τις δράσεις και τις στηρίξεις (άρθρωση & κύλιση)

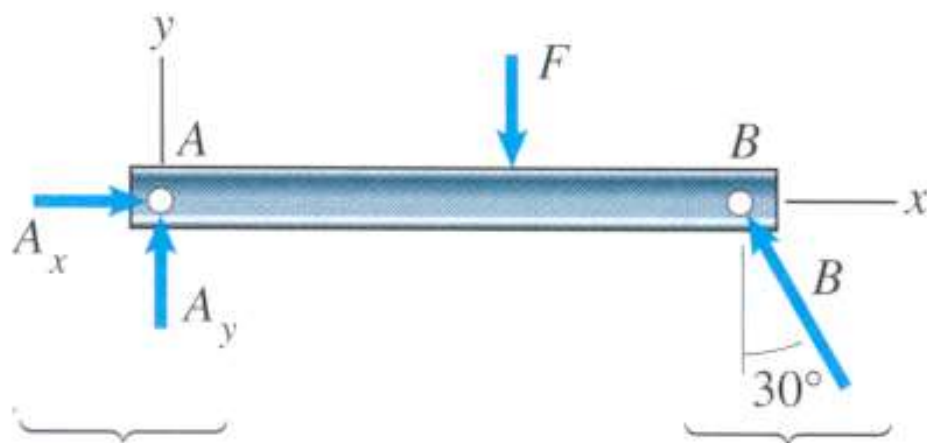
ΔΕΣ:

- Τρεις άγνωστες αντιδράσεις: A_x , A_y , B
- τρεις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\Sigma F_x=0, \Sigma F_y=0$$

$$\Sigma M_{z(O)}=0 \text{ ως προς οποιοδήποτε σημείο}$$

→ Το πρόβλημα έχει λύση

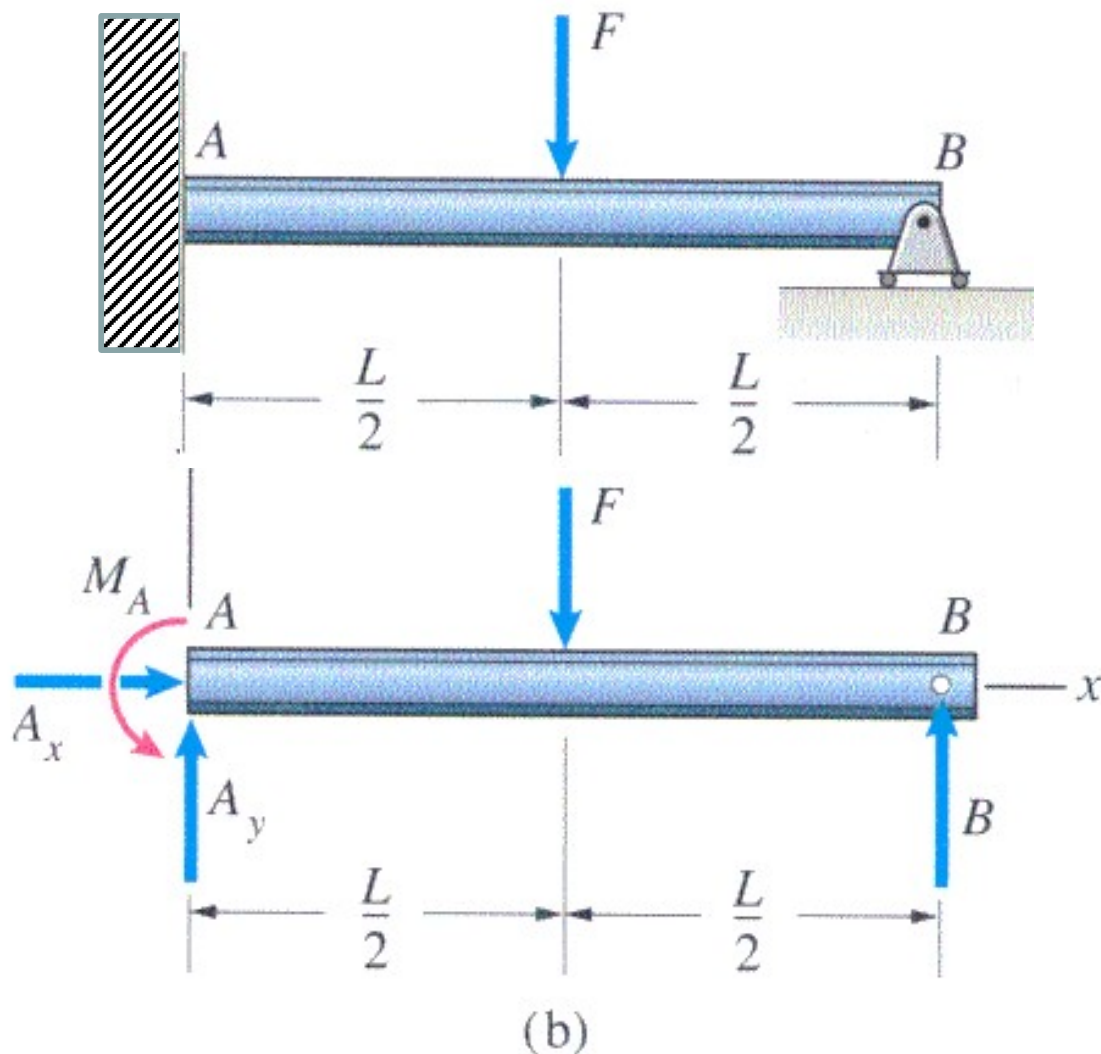


Αντιδράσεις της άρθρωσης

Αντίδραση της κύλισης

ΥΠΕΡΣΤΑΤΙΚΟΣ ΦΟΡΕΑΣ: όταν στηρίζεται με $\gg 3$ Δ.Σ.

υπάρχουν περισσότερες στηρίξεις από τρεις σε ένα 2D πρόβλημα (ενώ διαθέτω τρεις εξισώσεις – εργαλεία),



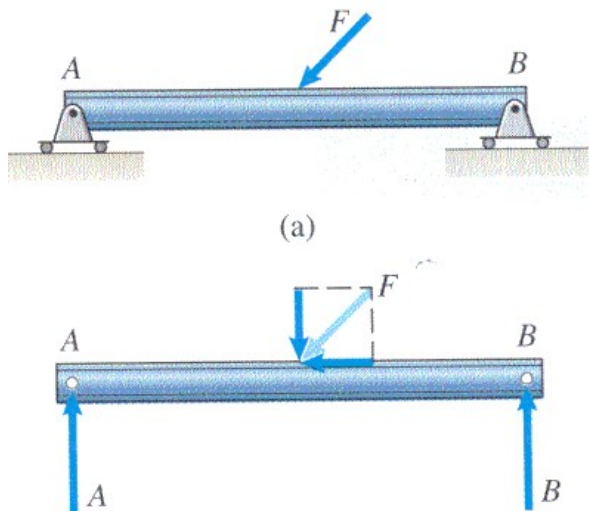
**4 Αντιδράσεις - 3 Ανεξάρτητες
Εξισώσεις ισορροπίας
= 1 Βαθμός Αοριστίας
(1 φορά υπερστατικός φορέας)**

Στατικώς απροσδιόριστα προβλήματα

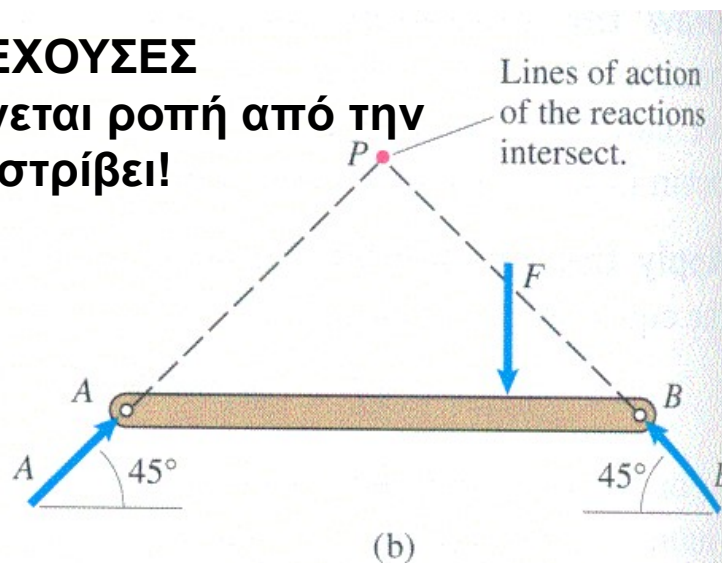
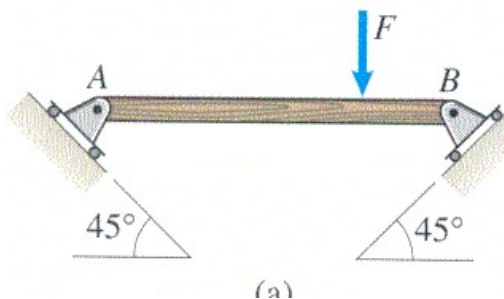
οι λιγότερες στηρίξεις: δεν προσφέρουν ισορροπία στο στερεό

- 2 ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΜΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΙΣ

μπορεί να κινηθεί $\leftarrow \rightarrow$:
 $\Sigma F_x \neq 0$
ΚΙΝΗΤΟΣ ΦΟΡΕΑΣ ή ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ



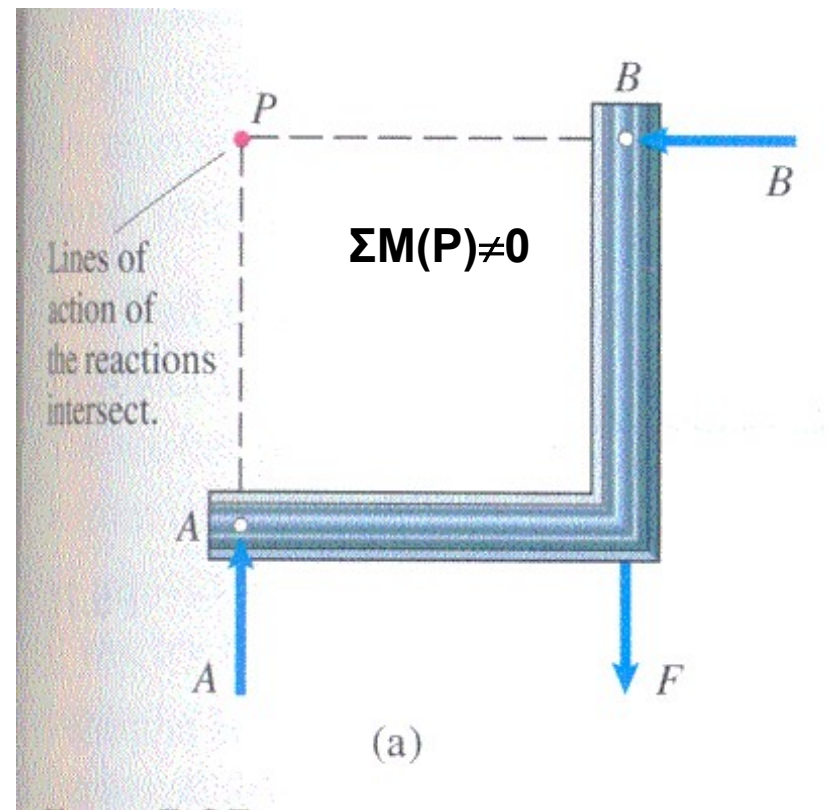
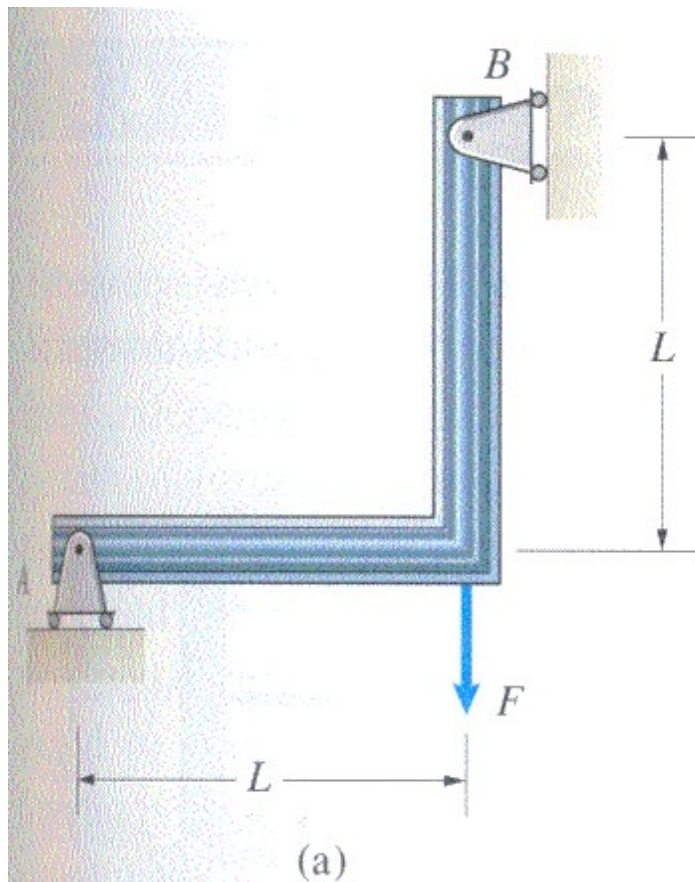
ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΕΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΙΣ \rightarrow παράγεται ροπή από την δράση F και ο φορέας στρίβει!



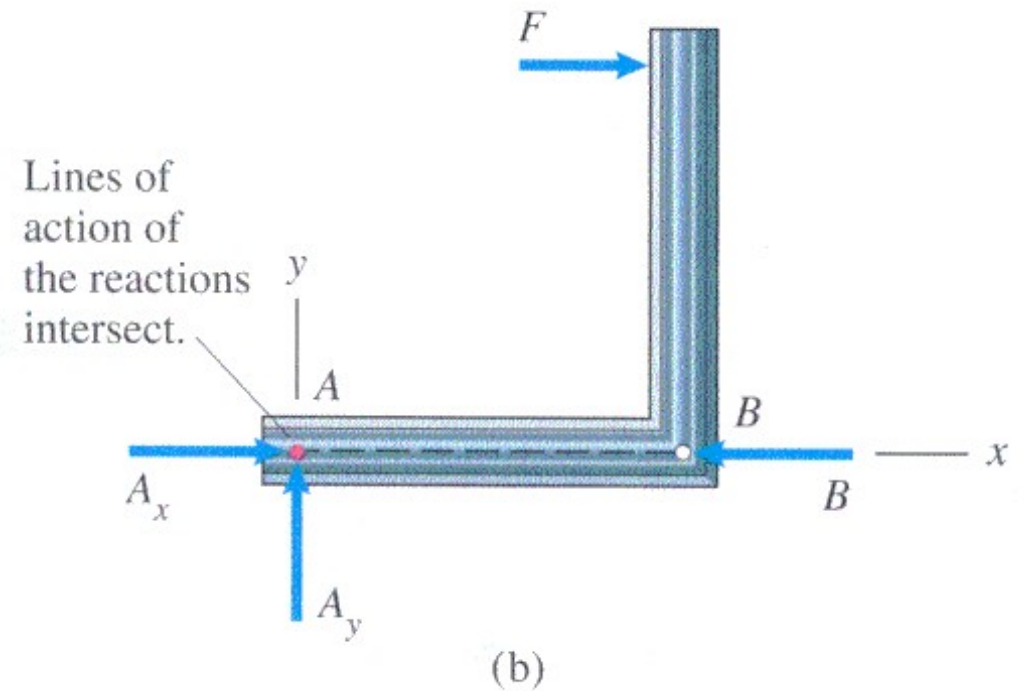
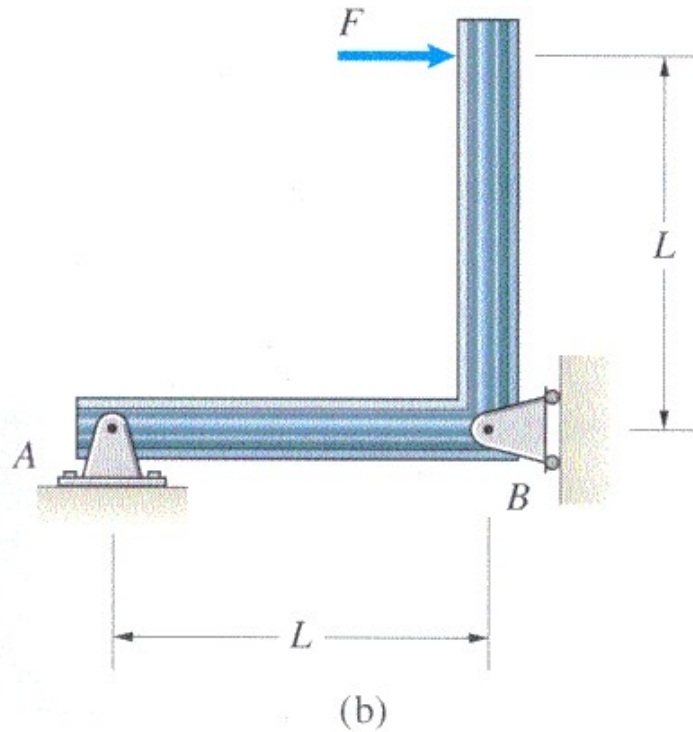
$\Sigma M(P) \neq 0$

οι λιγότερες στηρίξεις: δεν προσφέρουν ισορροπία στο στερεό

- Οι άξονες ενέργειας των αντιδράσεων συντρέχουν στο σημείο P , το φορτίο F ασκεί ροπή στο P
- Ο φορέας έχει δυνατότητα κίνησης (ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ)

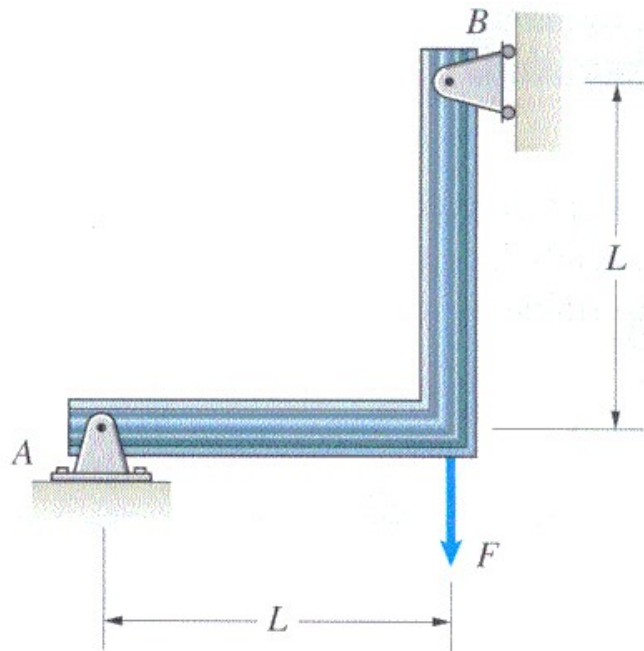


Λάθος τοποθέτηση στηρίξεων με $\Delta.P.=3$:

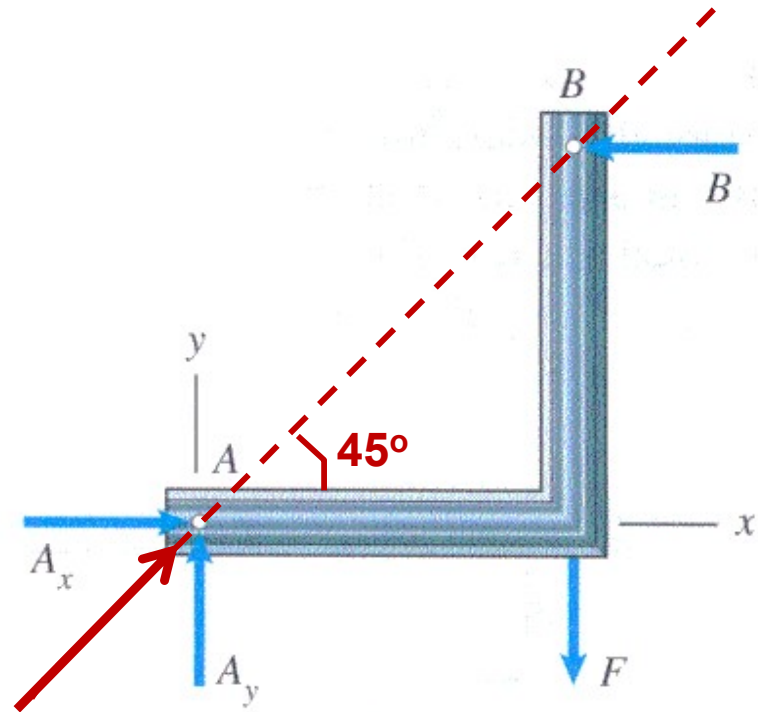


- Οι άξονες ενέργειας των αντιδράσεων συντρέχουν στο σημείο A , το φορτίο F ασκεί ροπή στο A
- Ο φορέας δεν στηρίζεται στερεά και αποτελεί μηχανισμό. Επομένως δεν ισορροπεί

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow A_x L - A_y L = 0 \Rightarrow A_x = A_y$$



(c)



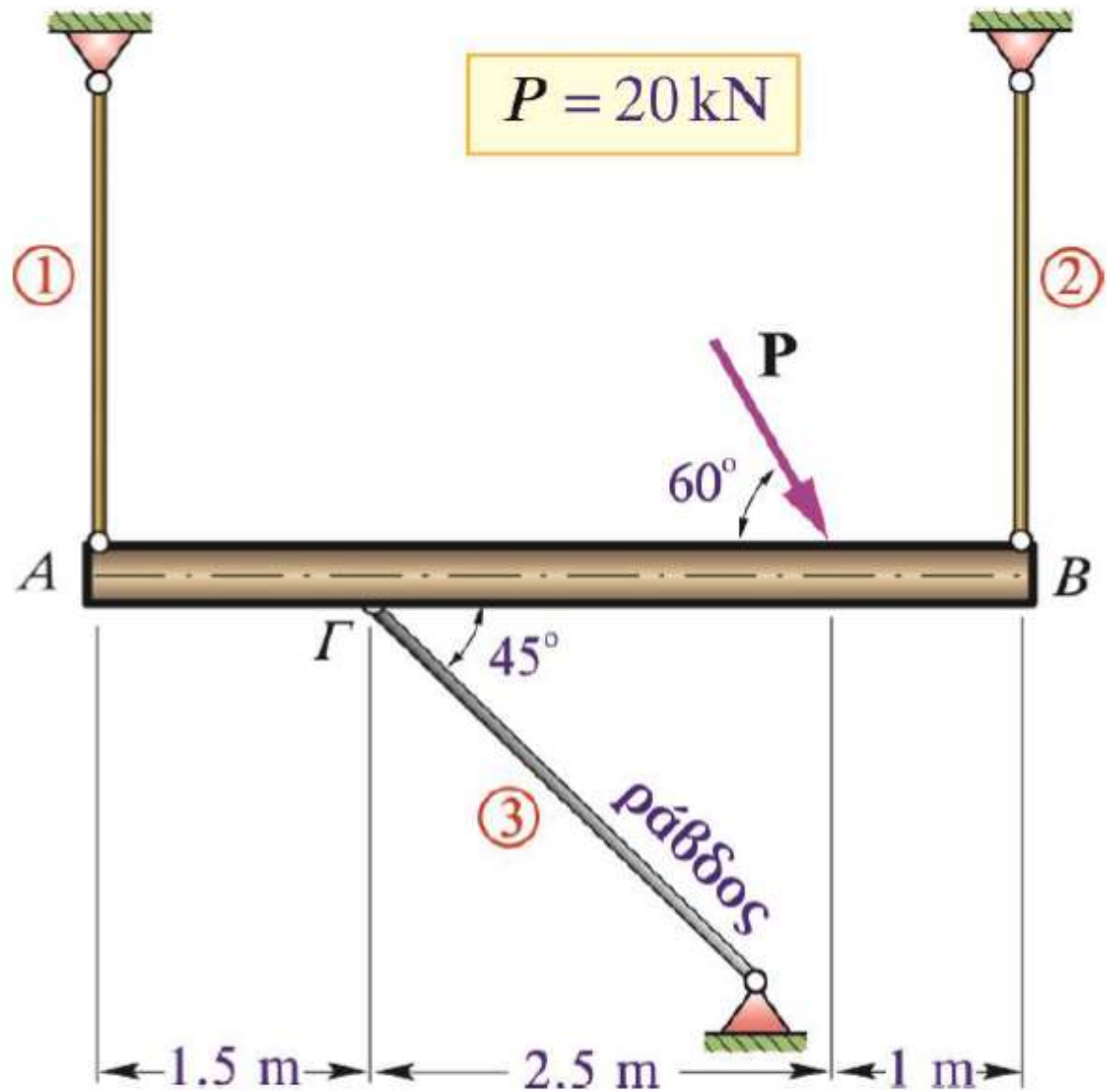
(c)

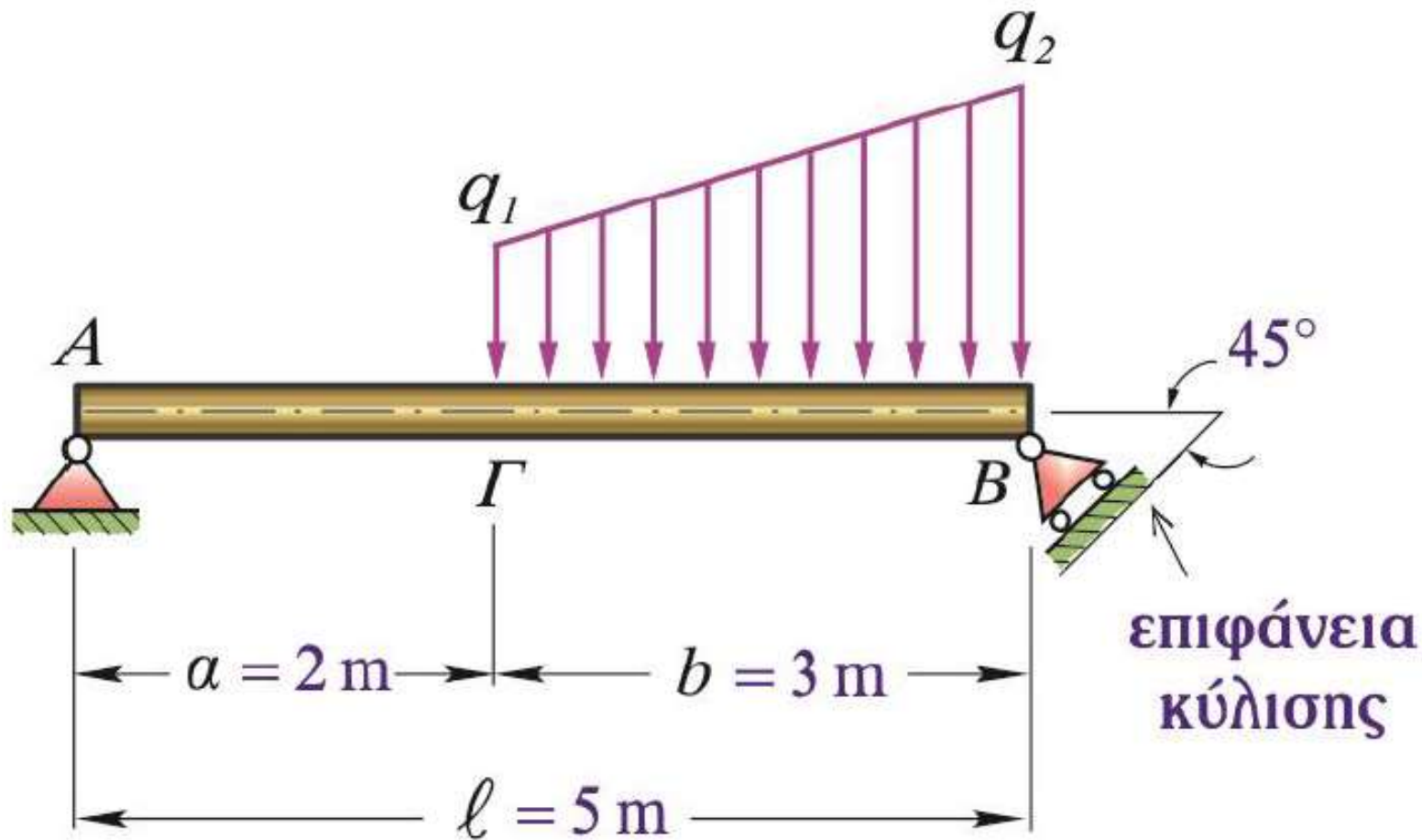
- Όταν οι άξονες ενέργειας των αντιδράσεων και το φορτίο F συντρέχουν στο σημείο B , δεν ασκείται ροπή στο B

($\Sigma M_B = 0$)

- Η δοκός στηρίζεται ισοστατικά και ισορροπεί

Ζητούνται οι δυνάμεις που ασκούν οι ράβδοι
①, ②, ③ στη δοκό.





$$q_1 = 20 \text{ kN/m} , \quad q_2 = 50 \text{ kN/m}$$

Να βρεθούν οι αντιδράσεις των στηρίξεων.