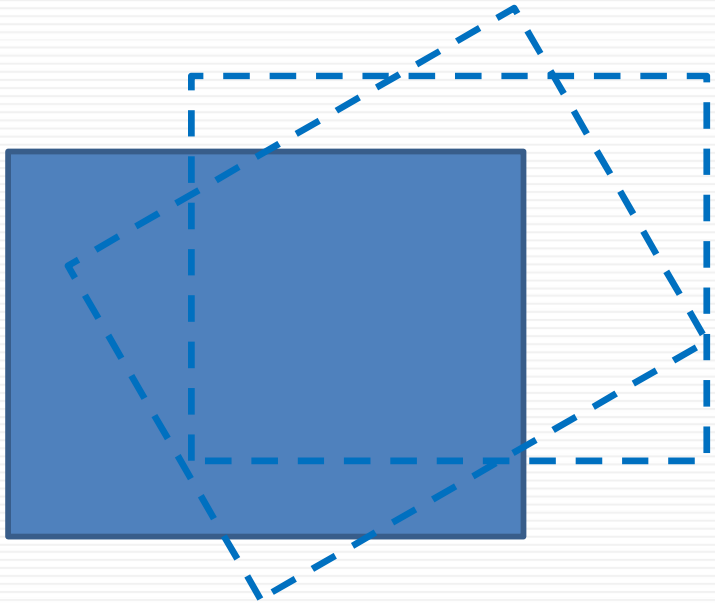
Ισορροπία

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δεν αλλάζει η κατάσταση του σώματος παρουσία δυνάμεων

- **Ακίνητο σώμα**
- **Ή όταν ένα σώμα βρίσκεται επί κινούμενου με σταθερή ταχύτητα σώματος**

(η σχετική τους ταχύτητα είναι 0)



1) το άθροισμα όλων των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα που βρίσκεται σε ισορροπία πρέπει να μηδέν.

$$\Sigma F=0$$

$u(x)=0$
$v(y)=0$
$w(z)=0$

ΔΕΝ ΚΙΝΕΙΤΑΙ

2) το άθροισμα όλων των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο = μηδέν

$$\Sigma M=0$$

$\theta_x=0$
$\theta_y=0$
$\theta_z=0$

ΔΕΝ ΣΤΡΕΦΕΤΑΙ

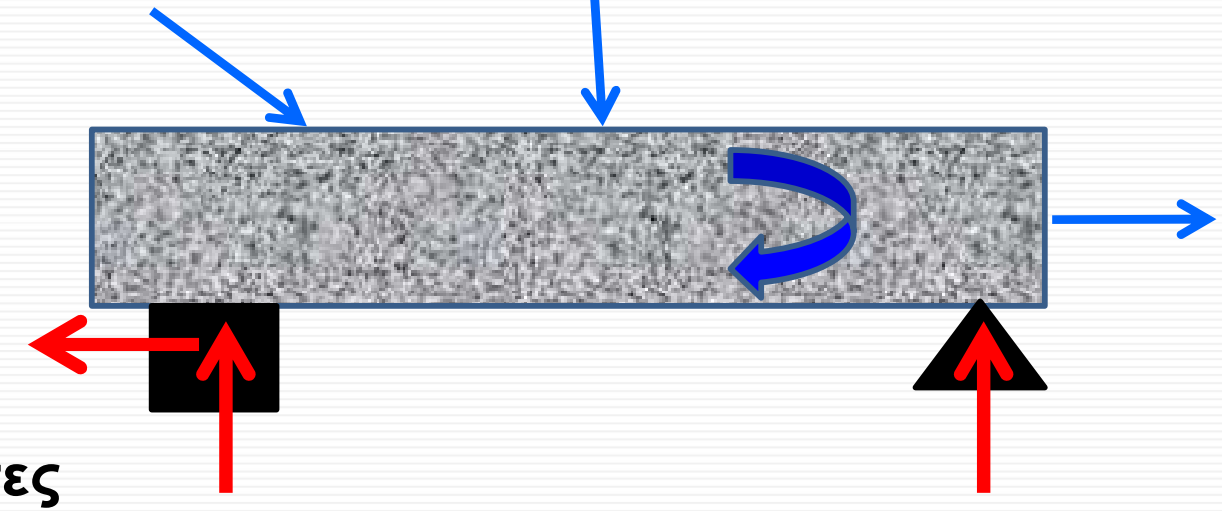
Σε στερεό σώμα – φορέα ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις (δράσεις ή φορτία) και εάν αυτό στηρίζεται, τότε από τις στηρίξεις εξέρχονται στο σώμα δυνάμεις: ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΙΣ

Υπό την επίδραση ΟΛΩΝ των εξωτερικών δυνάμεων ή ροπών (από ζεύγη δυνάμεων) εάν το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία (δεν κινείται κατά x ή y ή z και δεν περιστρέφεται) τότε:

$$\Sigma F_{x\,|\,y\,|\,z} = 0 \qquad \Sigma M_{x\,|\,y\,|\,z} = 0$$

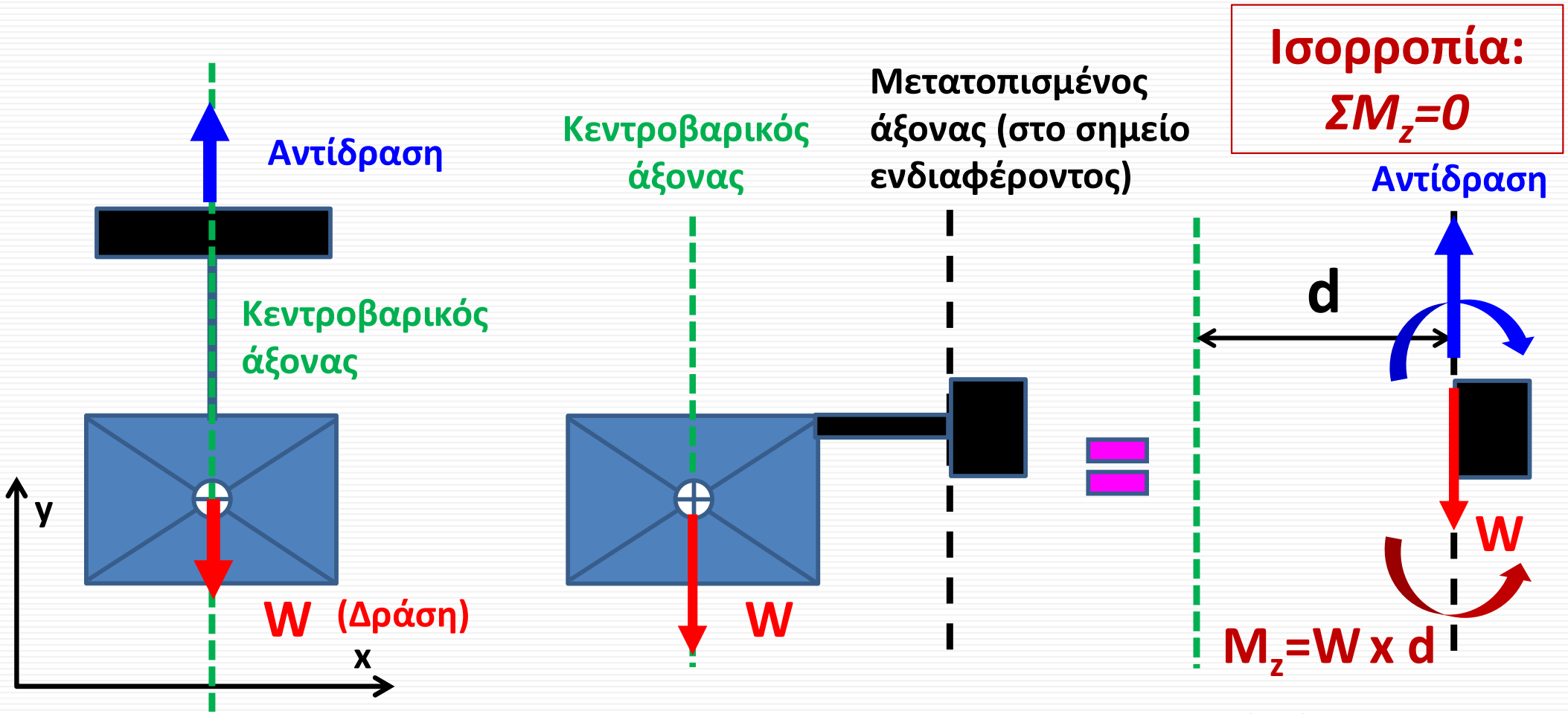
SOS!!!
Ροπές από δράσεις και αντιδράσεις ως προς οποιοδήποτε σημείο ΕΝΤΟΣ Ή ΕΚΤΟΣ ΤΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ !!!

Εάν είναι γνωστές οι δράσεις και με την απαίτηση για ισορροπία του στερεού σώματος➔ από τις ανωτέρω 6 εξισώσεις ισορροπίας προκύπτουν οι 6 άγνωστες αντιδράσεις των στηρίξεων (ισοστατικότητα).



Ισορροπία

d = Μοχλοβραχίονας



Ισορροπία: $\Sigma F_y=0$

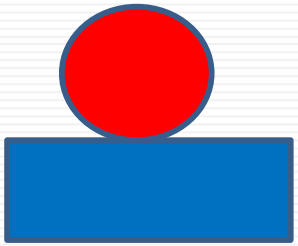
Επειδή το σώμα είναι απαραμόρφωτο, είθισται το βάρος του (W=m*g) να εφαρμόζεται σε ένα ειδικό σημείο το οποίο λέγεται Κ.Β. Δηλαδή εφαρμόζεται κατά τον κατακόρυφο άξονα που περνά από το Κ.Β. (ολισθαίνον διάνυσμα)

Η μεταφορά δύναμης σε παράλληλο άξονα ➔ ροπή Μ

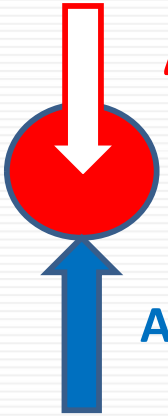
(εάν υποθετικά το βάρος ασκούνταν απευθείας στην στήριξη τότε δεν θα παραγόταν ροπή)

Ισορροπία και διάγραμμα ελευθέρου σώματος (ΔΕΣ)

Σχεδιασμός του αντικειμένου (απομονωμένο) και των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν σε αυτό ➔
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ



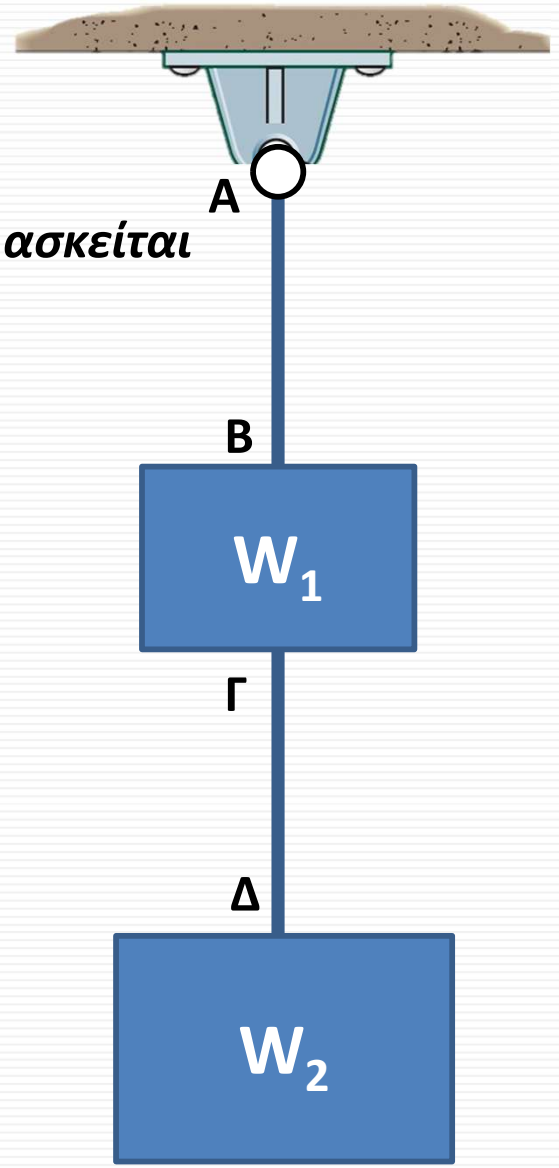
v=0



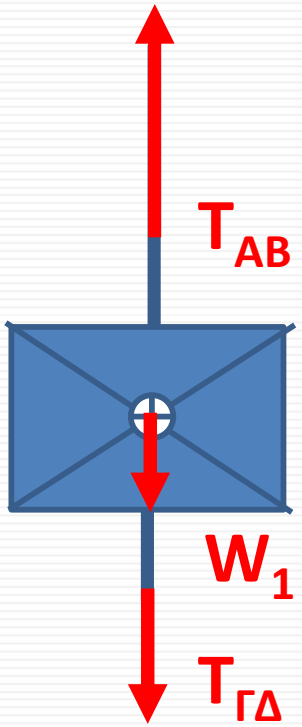
Δράση: Βάρος = mg

Αντίδραση

Ζητούμενο: πόση ένταση ασκείται στο καλώδιο ΑΒ;



Σχεδιασμός του αντικειμένου (απομονωμένο) και των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν σε αυτό ➔ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

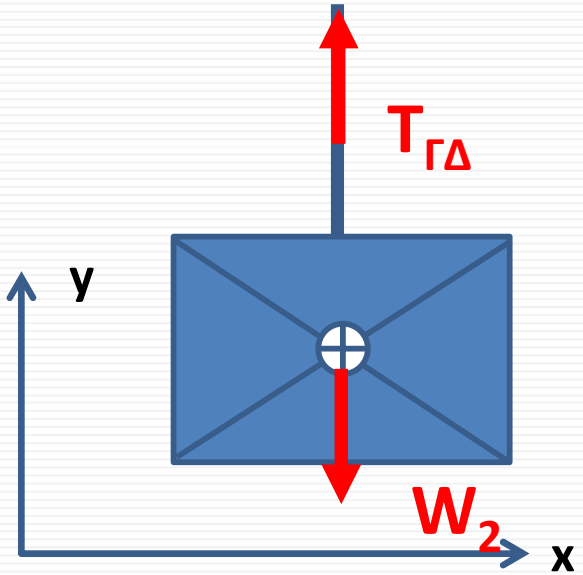


Ζητούμενο: πόση ένταση ασκείται στο καλώδιο ΑΒ;

$\Sigma F = 0 : T_{AB} - W_1 - T_{\Gamma\Delta} = 0$

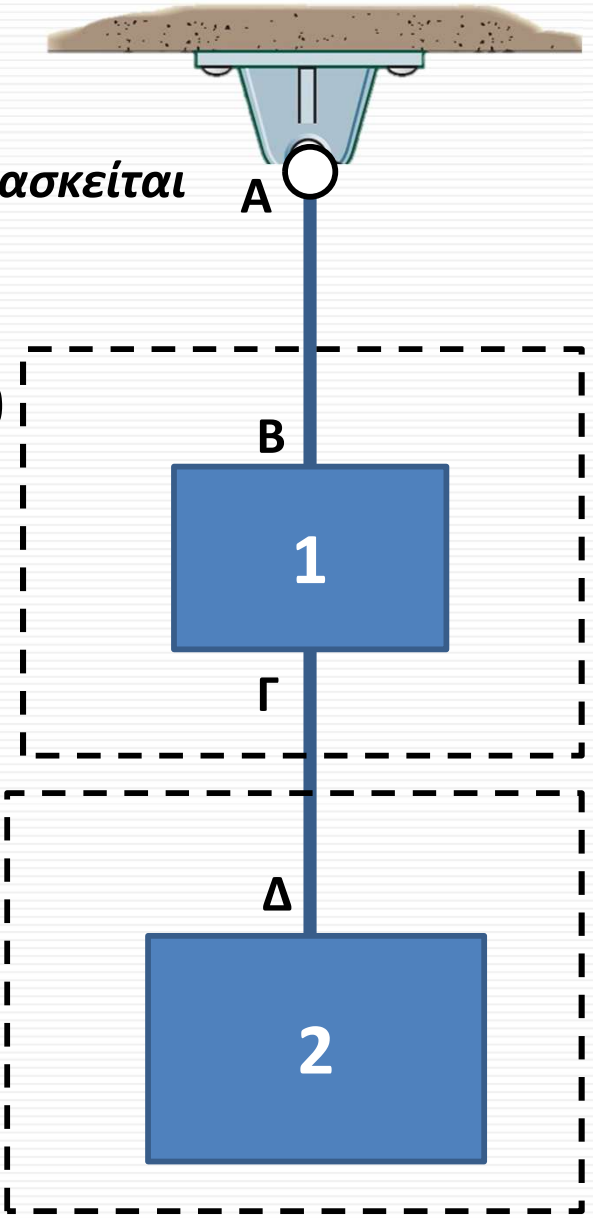
➔ $T_{AB} = W_1 + T_{\Gamma\Delta}$

➔ $T_{AB} = W_1 + W_2$

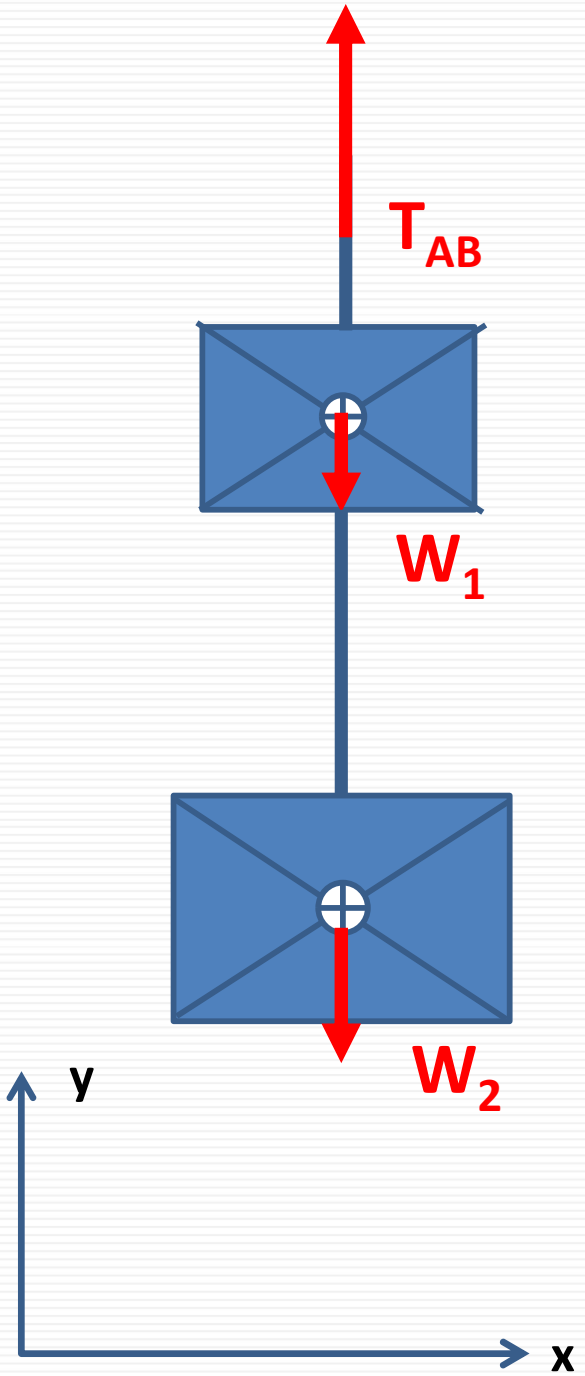


$\Sigma F = 0 : T_{\Gamma\Delta} - W_2 = 0$

➔ $T_{\Gamma\Delta} = W_2$



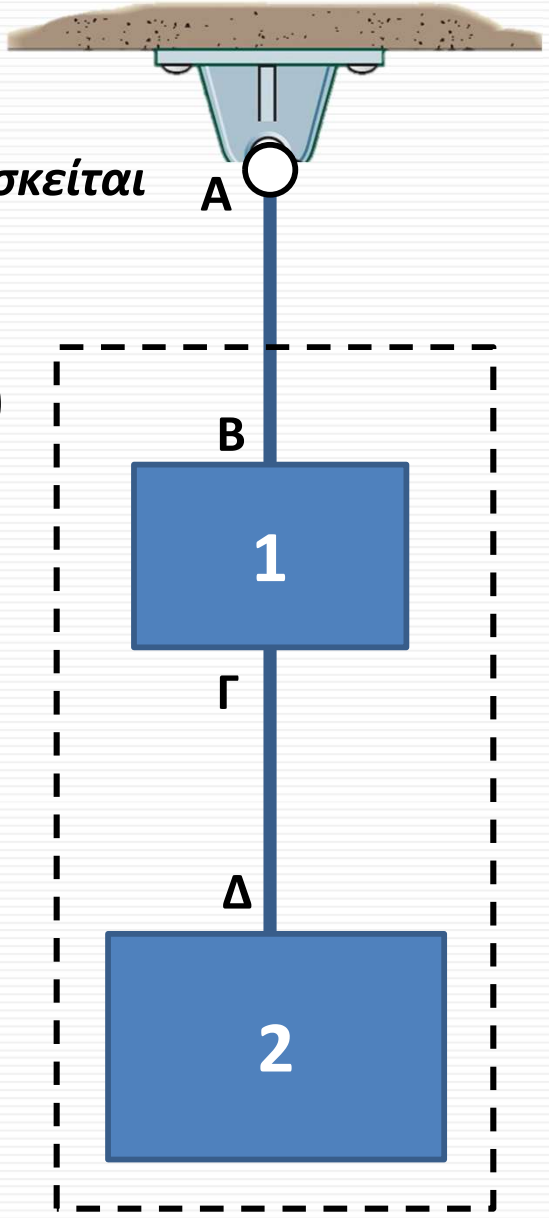
Σχεδιασμός του αντικειμένου (απομονωμένο) και των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν σε αυτό ➔ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ



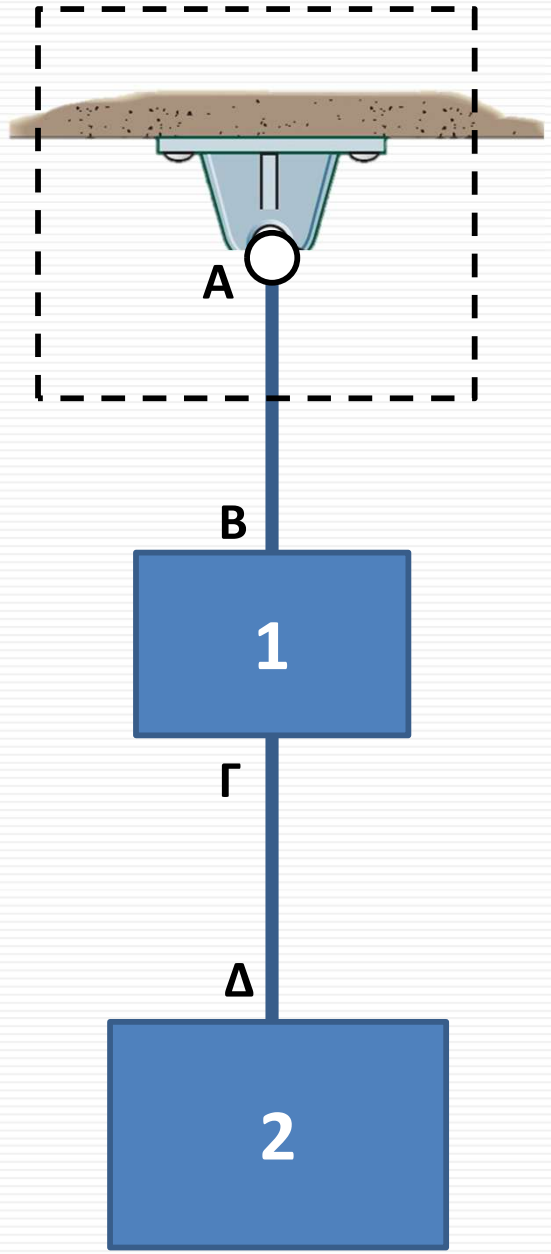
Ζητούμενο: πόση ένταση ασκείται στο καλώδιο ΑΒ;

$$\Sigma F = 0 : T_{AB} - W_1 - W_2 = 0$$

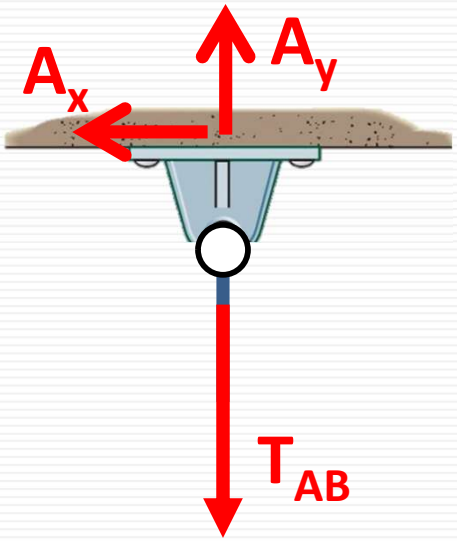
$$\rightarrow T_{AB} = W_1 + W_2$$



Σχεδιασμός του αντικειμένου (απομονωμένο) και των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν σε αυτό ➔ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ



Ποιες είναι οι Αντιδράσεις στην στήριξη;

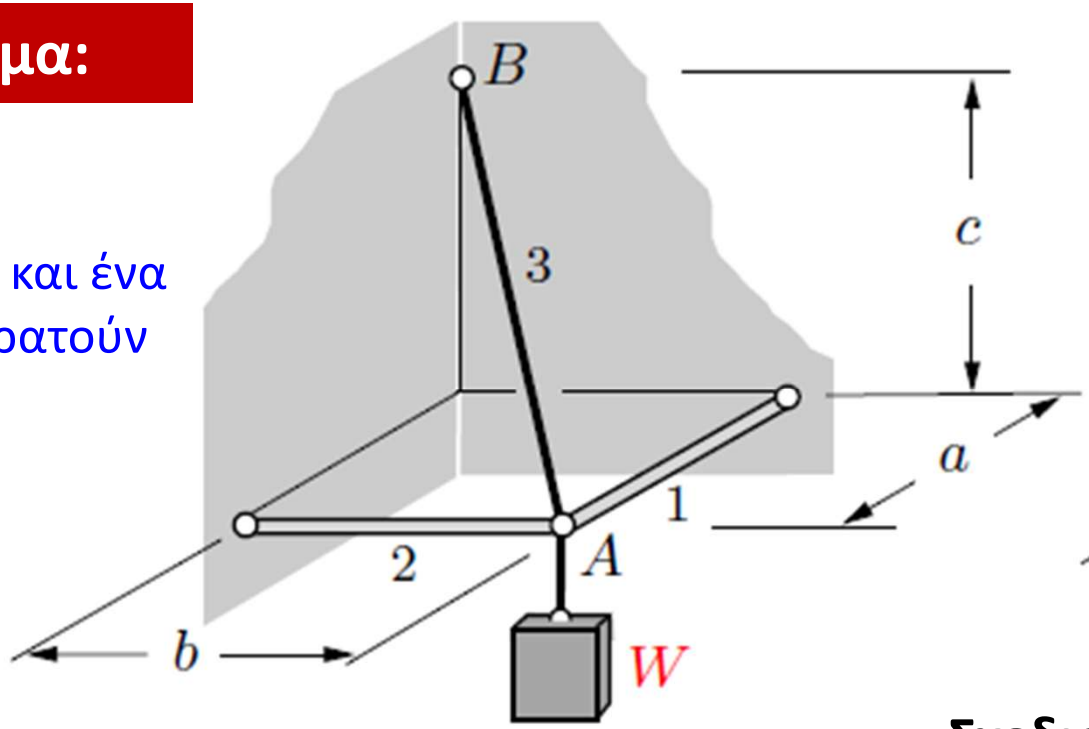


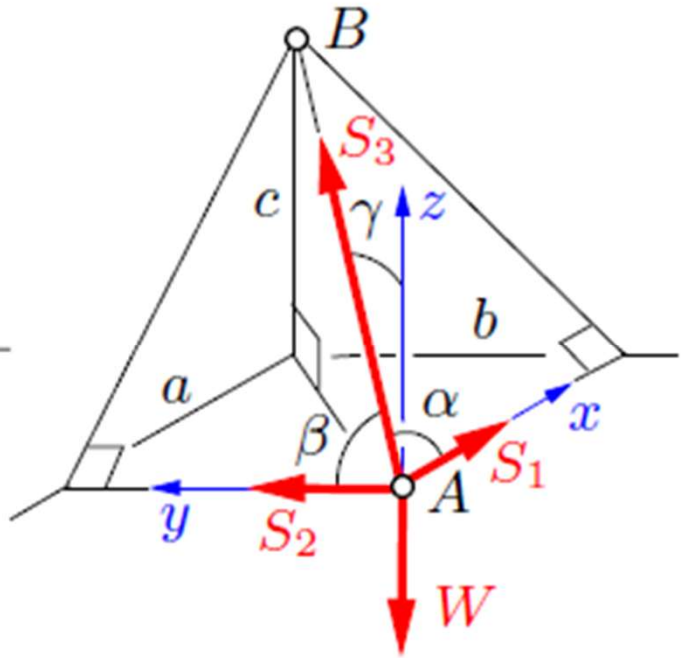
$\Sigma F_x = 0 : A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 : A_y = T_{AB} = W_1 + W_2$

Παράδειγμα:

Δύο ράβδοι και ένα σκοινί συγκρατούν το βάρος W





Σχεδιασμός του σημείου/κόμβου όπου ασκείται η φόρτιση και οι αντιδράσεις των ράβδων/σκοινιού

➔ **ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ**

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Διαγώνιος μήκους:

$$\overline{AB} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\sum F_{ix} = 0: \quad S_1 + S_3\cos\alpha = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad S_2 + S_3\cos\beta = 0$$

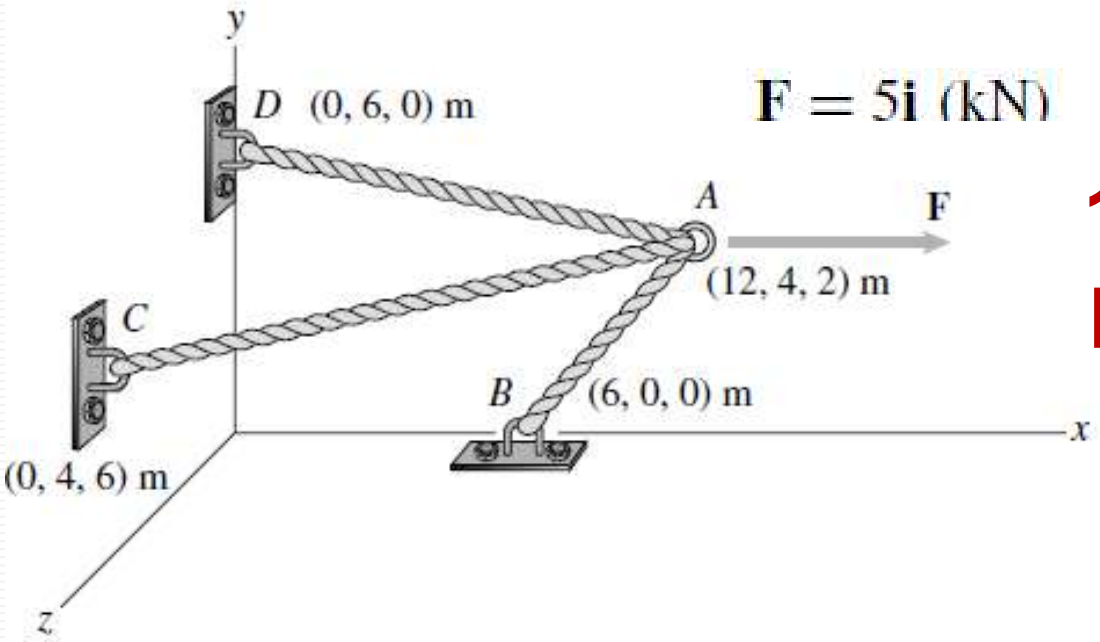
$$\sum F_{iz} = 0: \quad S_3\cos\gamma - W = 0$$

$$\underline{\underline{S_3}} = \frac{W}{\cos\gamma} = \underline{\underline{W\,\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}}},$$

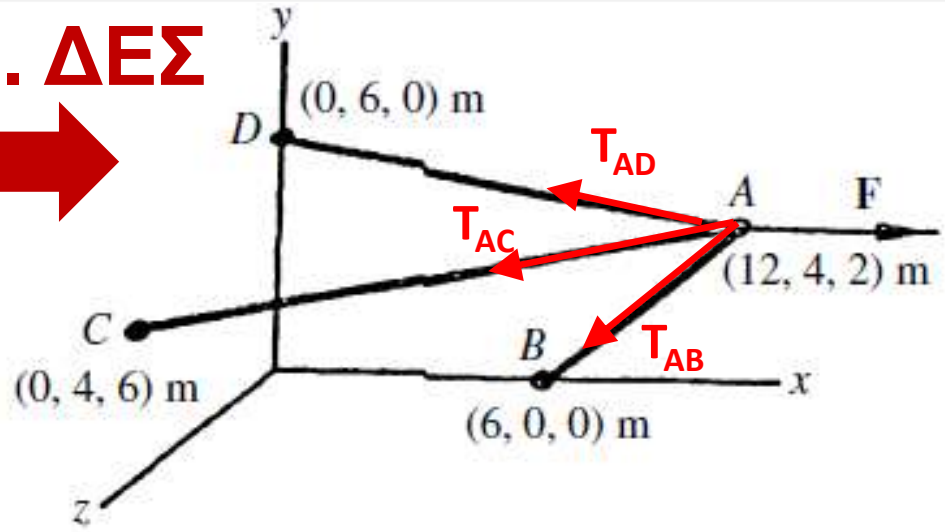
$$\underline{\underline{S_1}} = -S_3\cos\alpha = -W\,\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = \underline{\underline{-W\,\frac{a}{c}}}$$

$$\underline{\underline{S_2}} = -S_3\cos\beta = -W\,\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \underline{\underline{-W\,\frac{b}{c}}}$$

Παράδειγμα:



1. ΔΕΣ



2. Διανύσματα κατεύθυνσης έκαστης δύναμης:

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|} = \frac{(6-12)\mathbf{i} + (0-4)\mathbf{j} + (0-2)\mathbf{k}}{\sqrt{(6-12)^2 + (4)^2 + (2)^2}}$$

$$= \frac{-6}{7.483}\mathbf{i} - \frac{4}{7.483}\mathbf{j} - \frac{2}{7.483}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{e}_{AB} = 0.8018\mathbf{i} - 0.5345\mathbf{j} - 0.267\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{e}_{AC} = -0.9487\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0.3163\mathbf{k},$$

$$\mathbf{e}_{AD} = -0.9733\mathbf{i} + 0.1622\mathbf{j} - 0.1622\mathbf{k}.$$

3. Διανύσματα έκαστης δύναμης:

$$\mathbf{T}_{AB} = |\mathbf{T}_{AB}|\mathbf{e}_{AB}, \quad \mathbf{T}_{AC} = |\mathbf{T}_{AC}|\mathbf{e}_{AC}, \quad \mathbf{T}_{AD} = |\mathbf{T}_{AD}|\mathbf{e}_{AD}$$

4. Ισορροπία:

$$\sum \mathbf{F} = 0 = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AD} + \mathbf{F} = 0$$

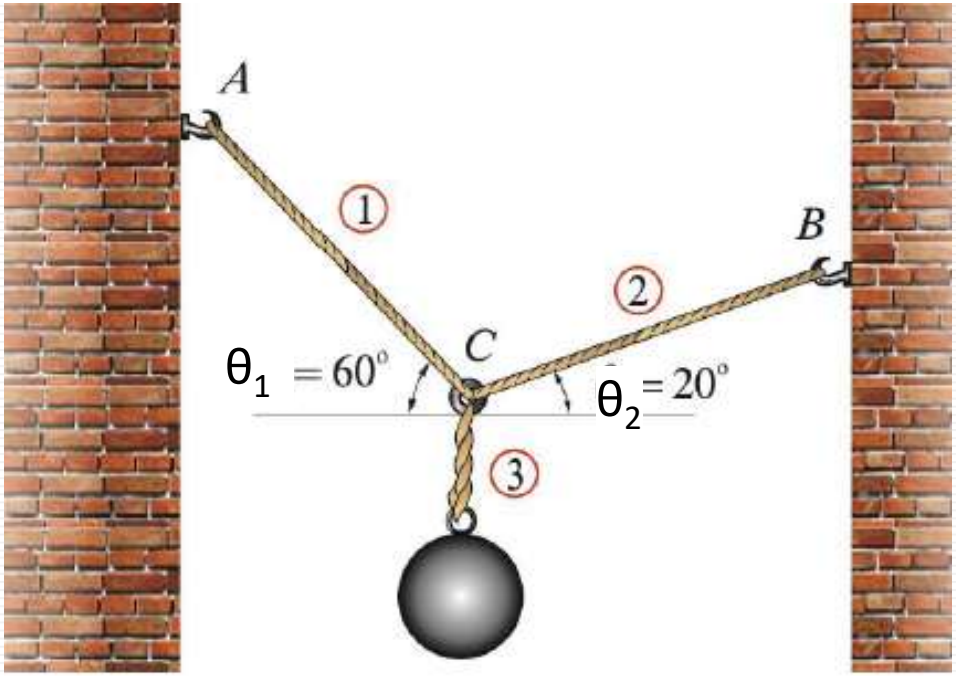
$$\sum \mathbf{F}_x = (-0.8018|\mathbf{T}_{AB}| - 0.9487|\mathbf{T}_{AC}| - 0.9733|\mathbf{T}_{AD}| + 5)\mathbf{i} = 0$$

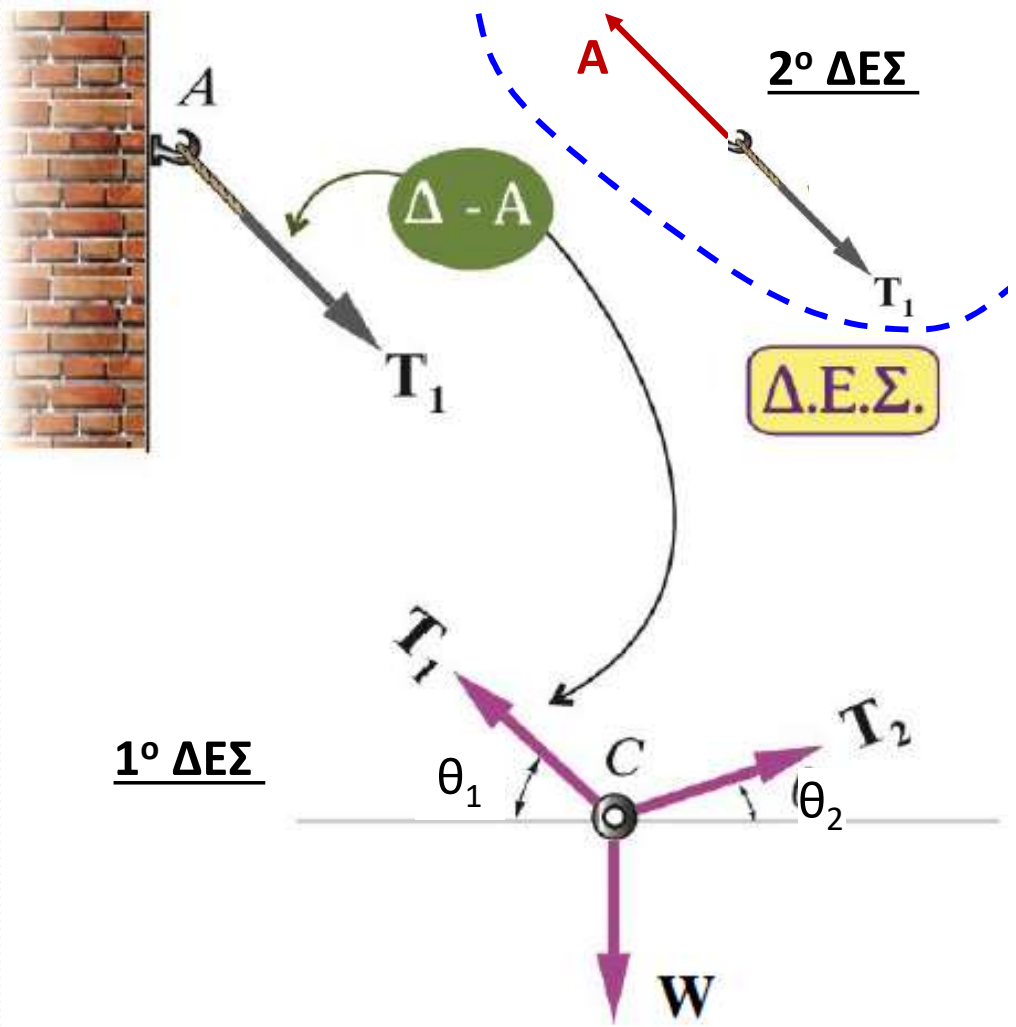
$$\sum \mathbf{F}_y = (-0.5345|\mathbf{T}_{AB}| + 0|\mathbf{T}_{AC}| + 0.1622|\mathbf{T}_{AD}|)\mathbf{j} = 0$$

$$\sum \mathbf{F}_z = (-0.2673|\mathbf{T}_{AB}| + 0.3163|\mathbf{T}_{AC}| - 0.1622|\mathbf{T}_{AD}|)\mathbf{k} = 0.$$

Σύστημα 3 εξισώσεων με τρεις αγνώστους, T_{AB}, T_{AC} , T_{AD})

Παράδειγμα:





Εξισώσεις ισορροπίας κόμβου C

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; -T_1\cos\theta_1 + T_2\cos\theta_2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$T_1\cos 60^\circ = T_2\cos 20^\circ \;\Rightarrow$$

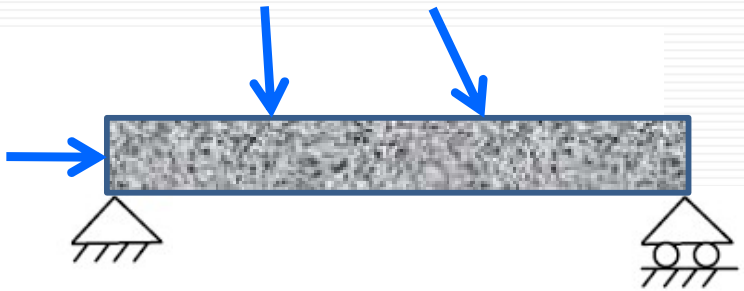
$$\boxed{T_1 = 1.88T_2}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; T_1\sin\theta_1 + T_2\sin\theta_2 - W = 0 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{0.866T_1 + 0.34T_2 = W}$$

$$T_1 = 0.95W \quad , \quad T_2 = 0.51W$$

Παράδειγμα:



$$\left.\begin{array}{l}\Sigma\vec{F}=0\\ \Sigma\vec{M}_o=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}\Sigma\vec{F}_x=0\\ \Sigma\vec{F}_y=0\\ \Sigma\vec{M}_o=0\end{array}\right\}$$

Η χρήση της ΣF_y δεν δίνει άμεσο αποτέλεσμα, δηλαδή τιμή σε άγνωστη αντίδραση εκτός και εάν προηγηθεί η ΣΜο=0



Η’

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma\vec{F}_a=0\\ \Sigma\vec{M}_A=0\\ \Sigma\vec{M}_B=0\end{array}\right\}$$

- Γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας. Από την ισορροπία στον άξονα x:

$\Sigma\vec{F}_X=0\Rightarrow$ Προκύπτει η άγνωστη $\vec{A}_X$

- Από την ισορροπία των ροπών ως προς το σημείο Α:

$\Sigma\vec{M}_A=0\Rightarrow$ Προκύπτει η άγνωστη $\vec{B}_Y$

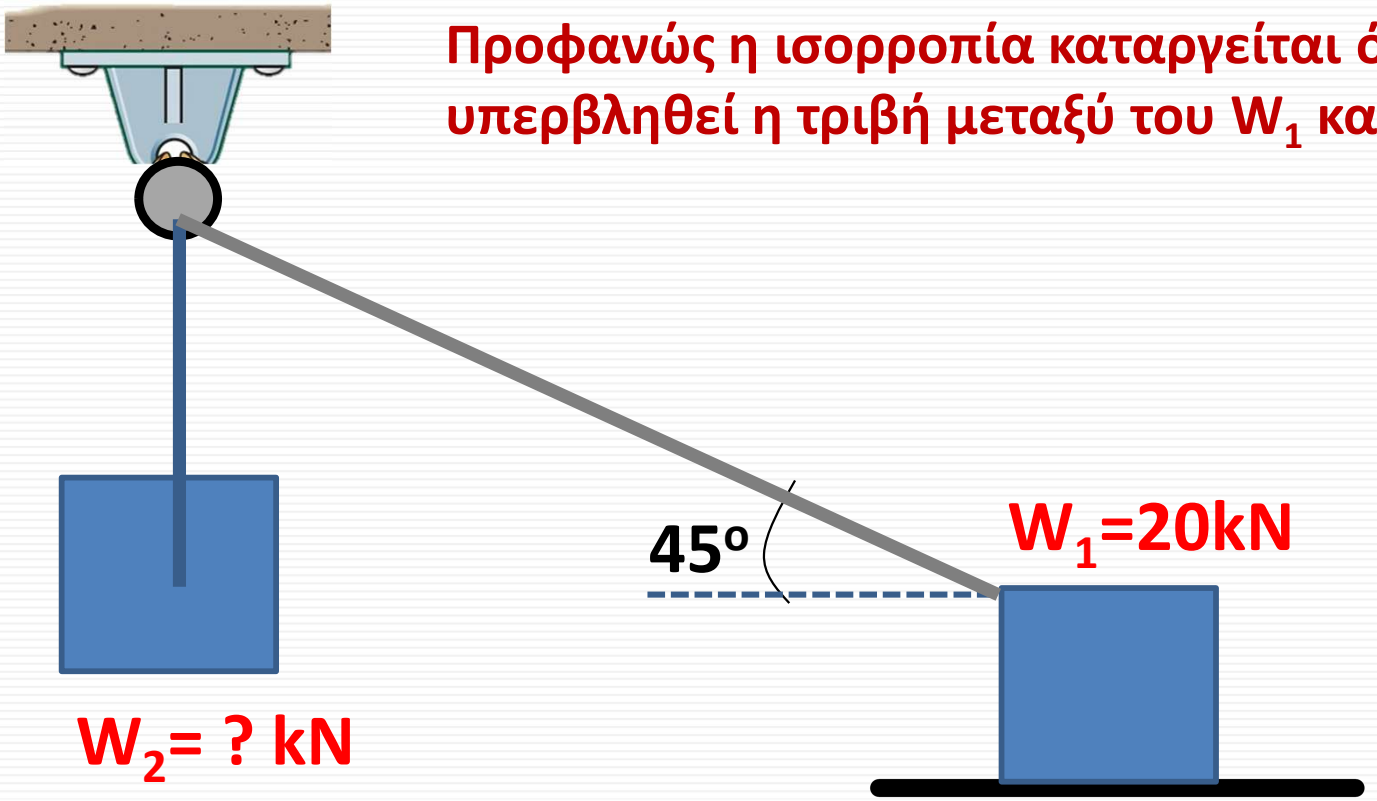
- Από την ισορροπία των ροπών ως προς το σημείο Β:

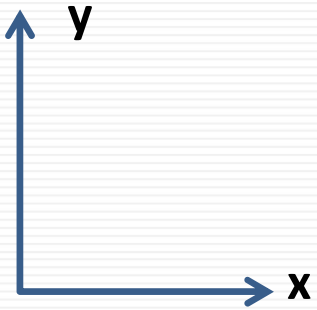
$\Sigma\vec{M}_B=0\Rightarrow$ Προκύπτει η άγνωστη $\vec{A}_Y$

Παράδειγμα: Πόσο είναι το βάρος W_2 ώστε να ισορροπεί το σύστημα;

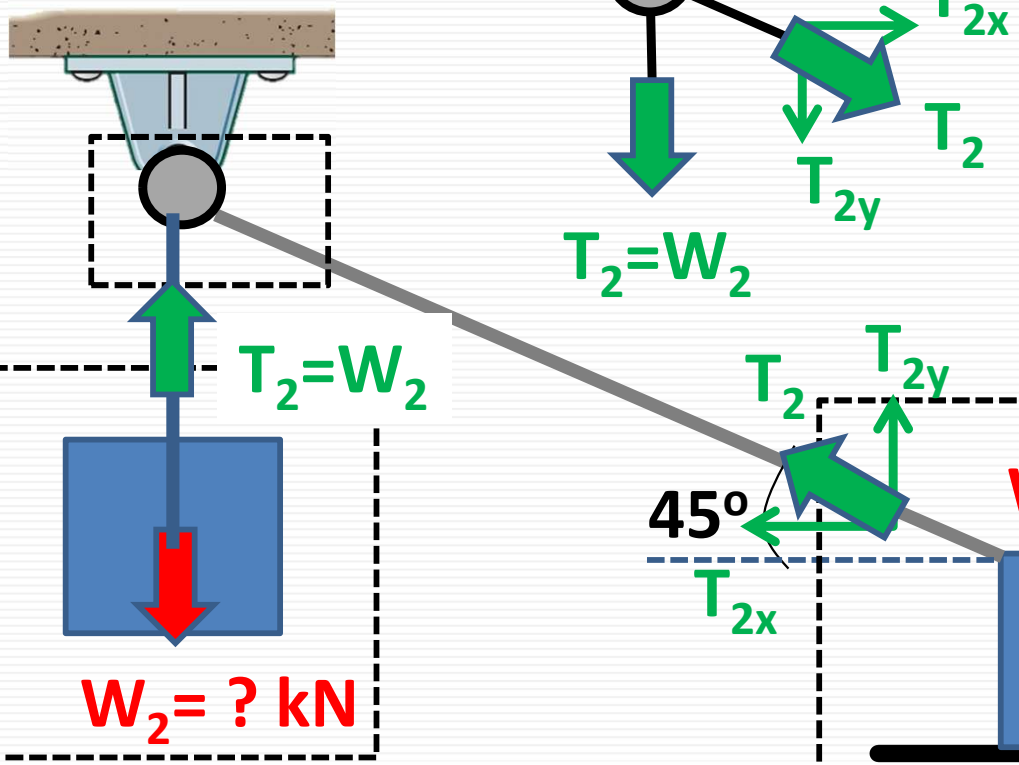
Το καλώδιο είναι συνεχές…

Προφανώς η ισορροπία καταργείται όταν υπερβληθεί η τριβή μεταξύ του W_1 και του εδάφους.





Παράδειγμα: Πόσο είναι το βάρος W_2 ώστε να ισορροπεί το σύστημα;



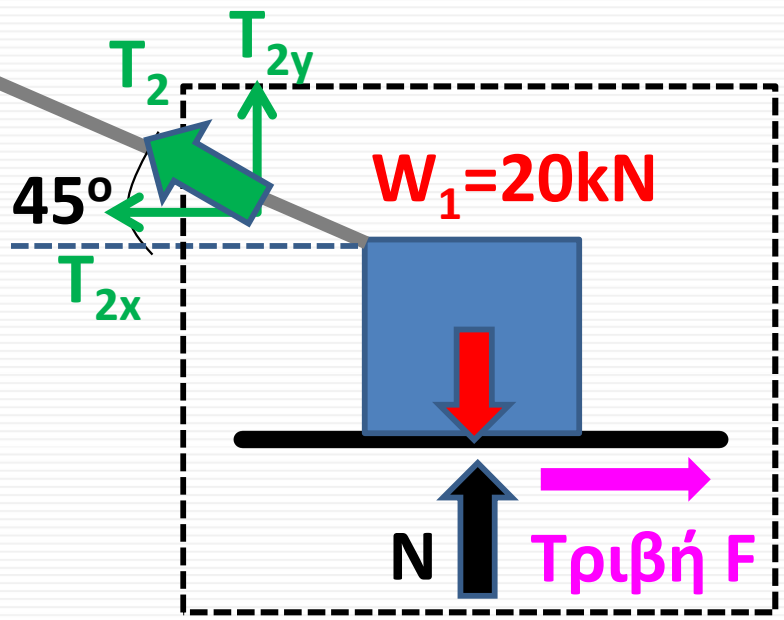
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow T_2 - W_2 = 0$

$T_{2y} = T_{2x} \approx 0,71T_2 = 0,71W_2$

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow T_{2x} - R_x = 0 \rightarrow R_x = 0,71W_2$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_y - T_2 - T_{2y} = 0 \rightarrow$

$R_y = W_2 + 0,71W_2 = 1,71W_2$



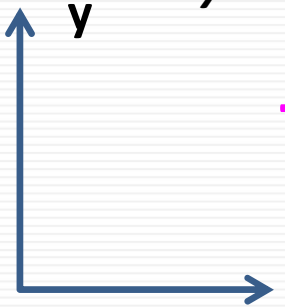
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow$

$N + T_{2y} - W_1 = 0 \rightarrow$

$N = 20 - 0,71W_2$

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F - T_{2x} = 0$

$\rightarrow F = 0,71W_2$



Τριβή F = μ·N (έστω μ=1)

$\rightarrow 0,71W_2 = 20 - 0,71W_2 \rightarrow W_2 = 20/(2 \cdot 0,71) \rightarrow W_2 = 14.1kN$

Παράδειγμα: Πόσο είναι το βάρος W_2 ώστε να ισορροπεί το σύστημα;

Υπάρχει επίσης ο κίνδυνος να ανατραπεί το W_1:
Για να μην ανατραπεί πρέπει να κοιτάξω και ισορροπία ροπών
Το σώμα είναι πρίσμα με πλευρές a,b (πάχους t)
Εξετάζω τις ροπές ως προς το σημείο Ο με την υπόθεση ότι το σώμα έχει ελάχιστα ανασηκωθεί και όλη η αντίδραση Ν περνάει από το σημείο Ο

Η T_{2y} και Ν δεν παράγουν ροπή (ο άξονάς τους διέρχεται από το Ο)

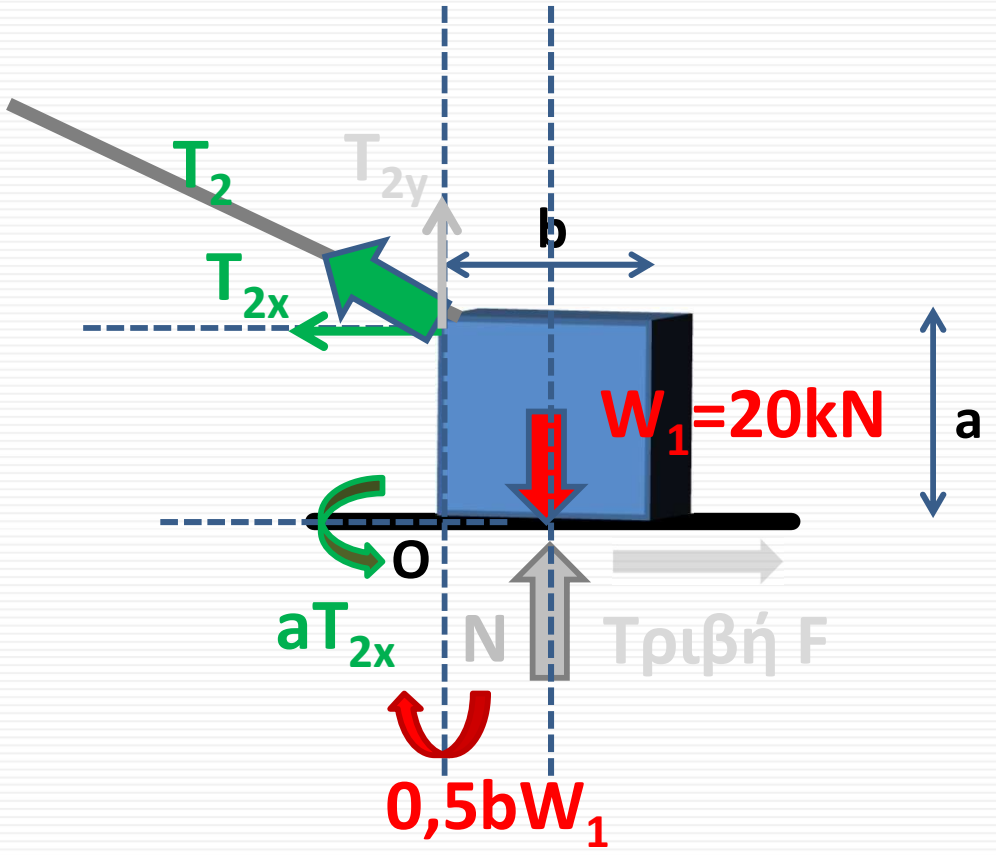
$T_{2x} \approx 0,71W_2 = 10kN$

$\Sigma M_O = 0$ ➔

$aT_{2x} - 0,5bW_1 =$

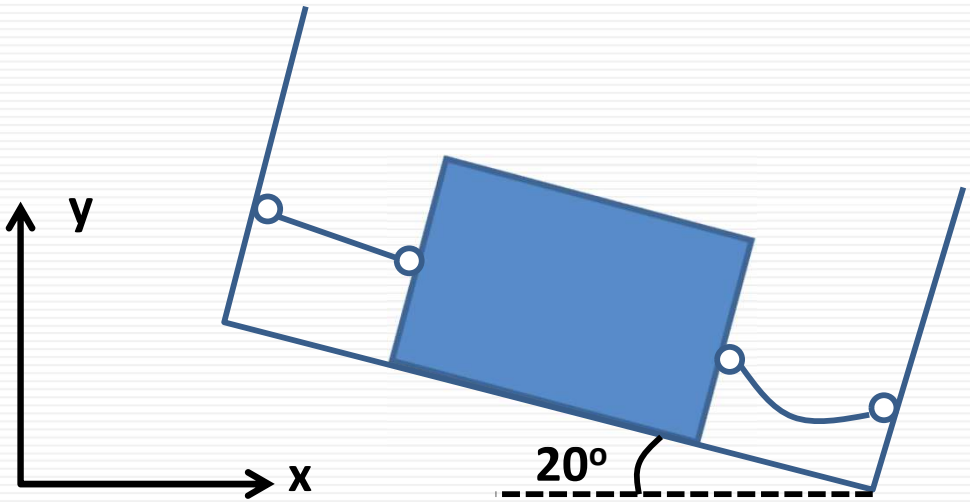
$10a - 10b = 0$

$a = b$



$W_2 = 14.1kN$

Άσκηση για το σπίτι



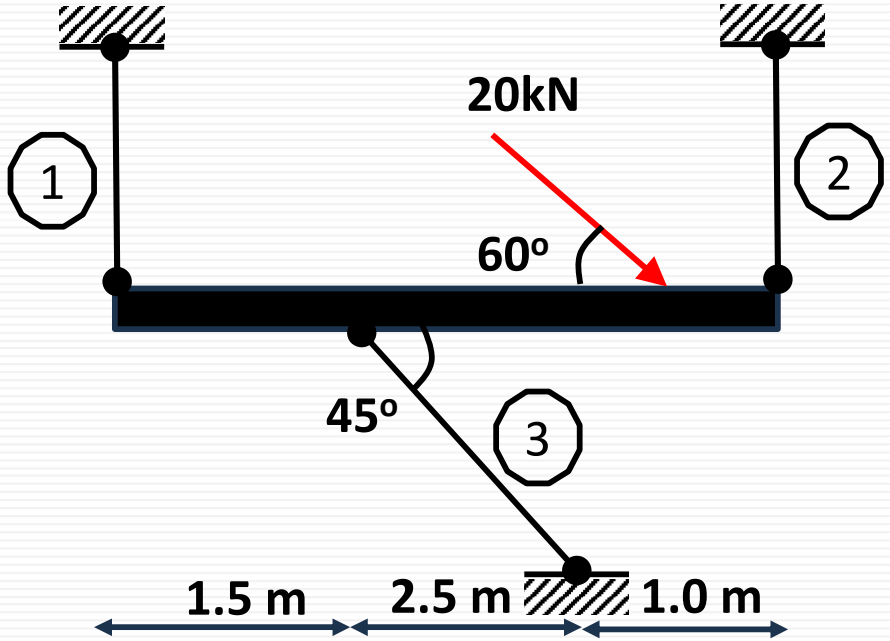
Απαραμόρφωτο σώμα βάρους **W**=1335Nt συγκρατείται στην αριστερή του πλευρά με τεντωμένο σκοινί (λειτουργεί ως ελαστικό ελατήριο με **K**=2,7Nt/mm και αρχικό μήκος σκοινιού L_o=1650mm). Μη λαμβάνοντας υπόψη την τριβή:

Α) σχεδιάστε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος **ΔΕΣ**.

Β) υπολογίστε την εφελκυστική δύναμη του σκοινιού **T** *(λύση: T=456,6 N)*

Γ) υπολογίστε την κάθετη στο κιβώτιο αντίδραση **N**

Δ) Δεδομένου ότι στο σκοινί η εφελκυστική δύναμη δίδεται ως $\mathbf{T=K\cdot(L-L_o)}$ υπολογίστε το τελικό μήκος **L** του σκοινιού *(λύση: L=1819.1mm)*.



Αβαρής δοκός στηρίζεται με τρεις δεσμικές ράβδους, 1, 2 και 3. Φέρει εξωτερικό συγκεντρωμένο φορτίο 20kN.

Να προσδιορισθούν οι αντιδράσεις των τριών στηριγμάτων S_1, S_2 και S_3. (*λύση: S_1=-3.51kN, S_2 = 10.86 kN και S_3 = -14.1 kN, το – δηλώνει θλιπτική δύναμη για την δεσμική ράβδο*)