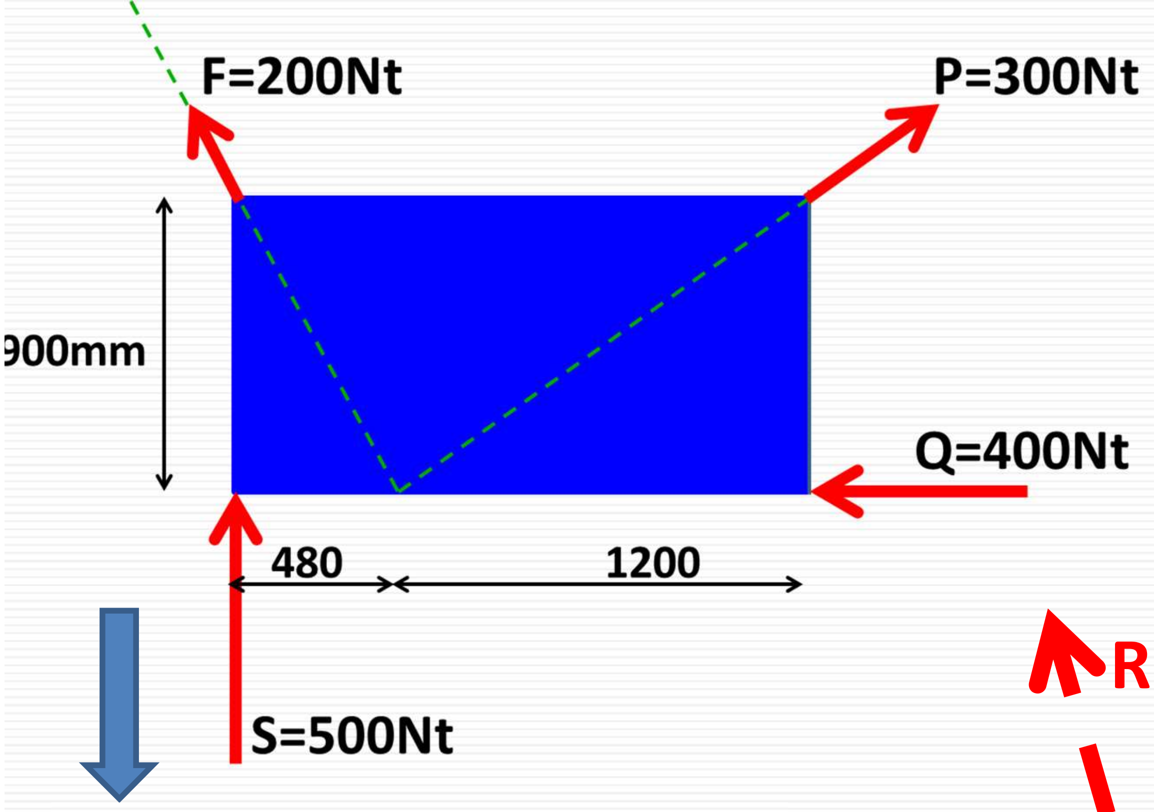
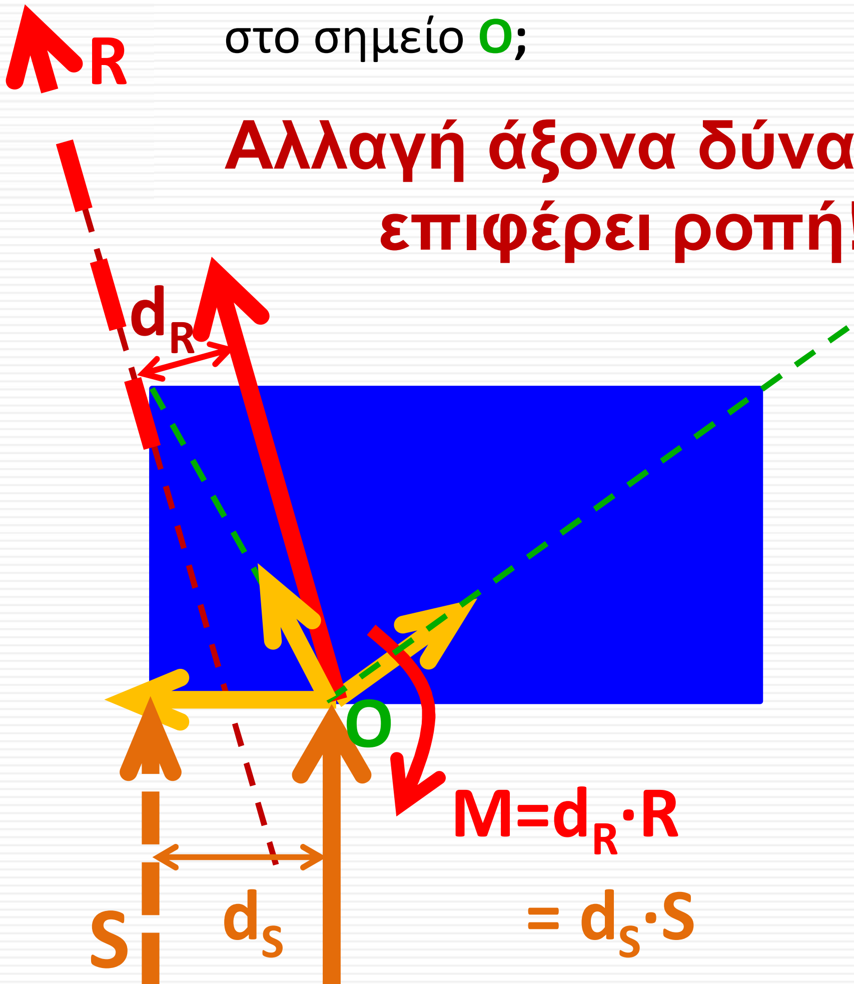
Σύνθεση Δυνάμεων



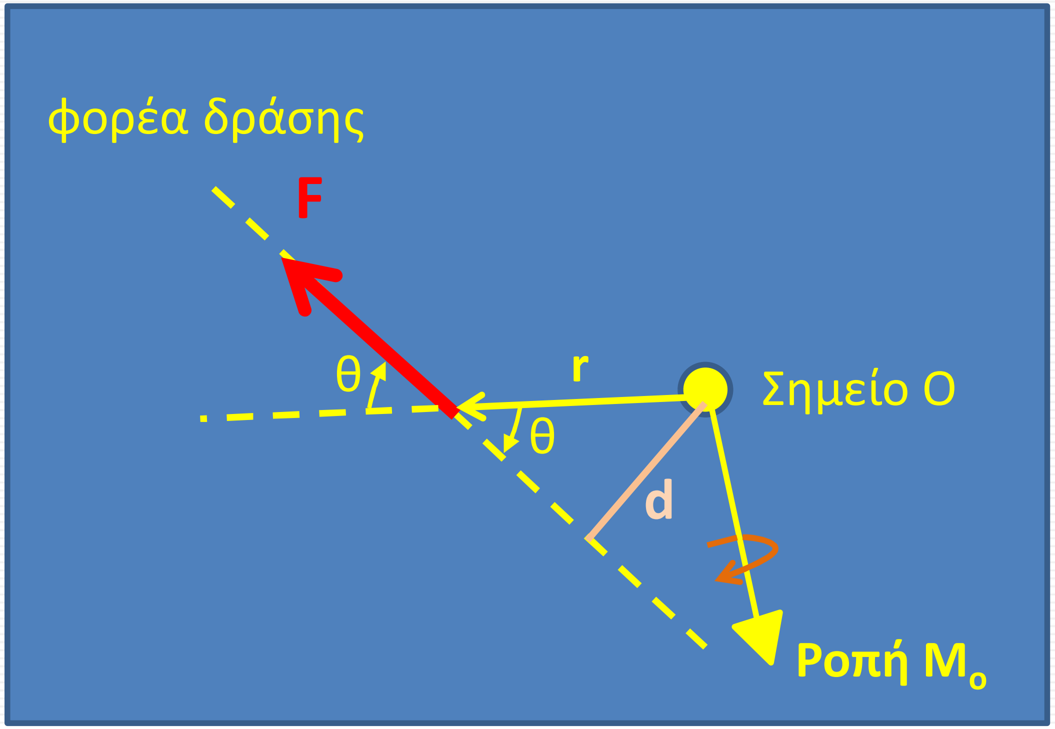
Εάν αντί των **συνιστωσών στις τέσσερις θέσεις** ασκήσω στο στερεό σώμα την **συνισταμένη R** σε οιαδήποτε θέση στον άξονα/φορέα της ➔ **Ισοδύναμη Κατάσταση χωρίς ροπή**

Εάν ζητώ αναγωγή όλων των δυνάμεων στο σημείο **O**;

Αλλαγή άξονα δύναμης ➔ επιφέρει ροπή!!!



Ροπή δυνάμεων στερεού σώματος



Για να συνθέσουμε δυνάμεις που ασκούνται σε διαφορετικά σημεία ενός στερεού ως προς ένα δεδομένο σημείο του σώματος (έστω σημείο Ο) πρέπει να ορίσουμε το **διάνυσμα της Ροπής M_o** ως το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων **θέσης r & δύναμης F**:

M_o=r x F

Όπου **r** το διάνυσμα θέσης από το σημείο Ο σε ΚΑΘΕ ΘΕΣΗ του φορέα δράσης της δύναμης F

Η δύναμη ως προς το σημείο Ο προκαλεί περιστροφή του σώματος.

Το μέτρο του M_o= r F sinθ = F d, **d η κάθετη απόσταση του Ο από τον φορέα δύναμης (μοχλοβραχίονας)**

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = \left(r_y F_z - r_z F_y\right)\vec{i} - \left(r_x F_z - r_z F_x\right)\vec{j} + \left(r_x F_y - r_y F_x\right)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

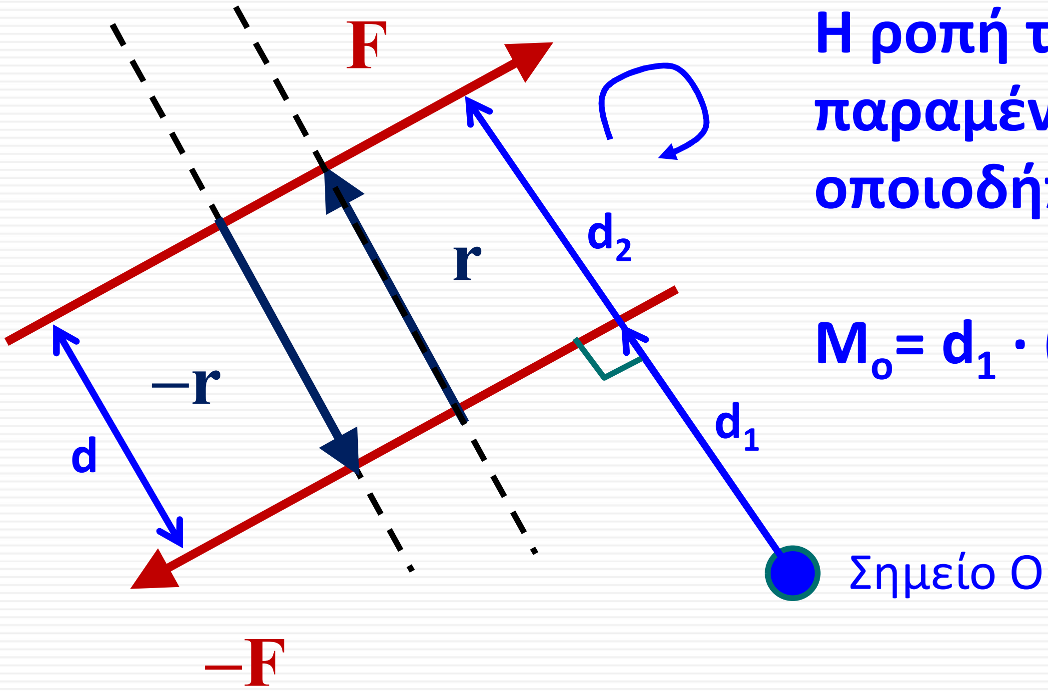
Περιστροφή επιπέδου yz γύρω από τον x: M_x

Περιστροφή επιπέδου xz γύρω από τον y: M_y

Περιστροφή επιπέδου xy γύρω από τον z: M_z

Ζεύγος δυνάμεων ≡ Ροπή

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \equiv (-\mathbf{r}) \times (-\mathbf{F})$$

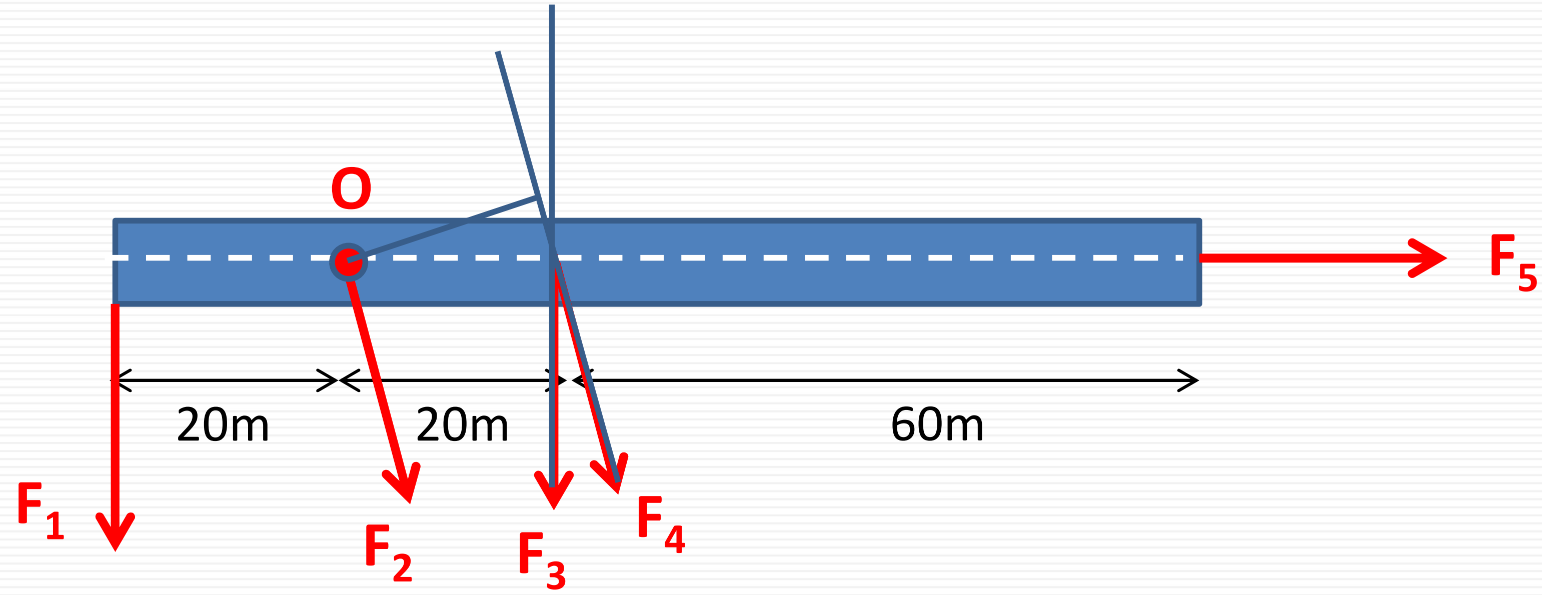


Η ροπή του ζεύγους δυνάμεων παραμένει σταθερή ως προς οποιοδήποτε σημείο του χώρου

$$M_o = d_1 \cdot (-F) + d_2 \cdot F = (d_2 - d_1) \cdot F = d \cdot F$$

δύο δυνάμεις ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς, μπορούν να ληφθούν υπόψην ως ροπή χωρίς να ενδιαφέρει η θέση εφαρμογής!

Άσκηση :



Όλες οι δυνάμεις έχουν το ίδιο μέτρο (έστω F). Κατατάξτε τις δυνάμεις σύμφωνα με το μέτρο της ροπής που προκαλούν ως προς το σημείο Ο

$M_1 = 20F$

$M_2 = 0$

$M_3 = 20F$

$M_4 < 20F$

$M_5 = 0$

Απάντηση:

$M_1 = M_3 = 20F > M_4 > M_2 = M_5 = 0$

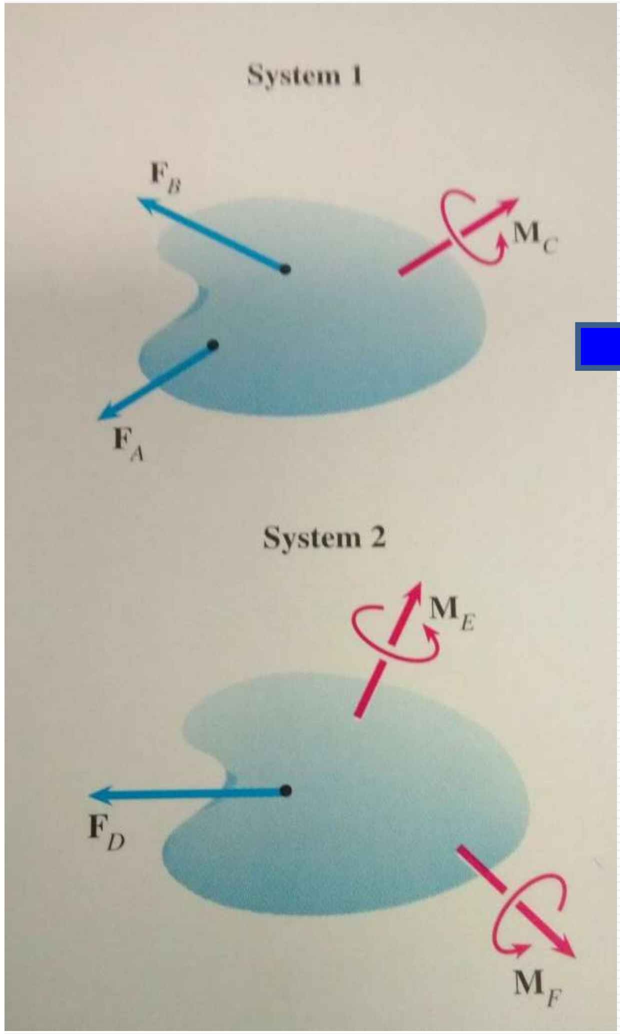
Ισοδυναμία Συστημάτων

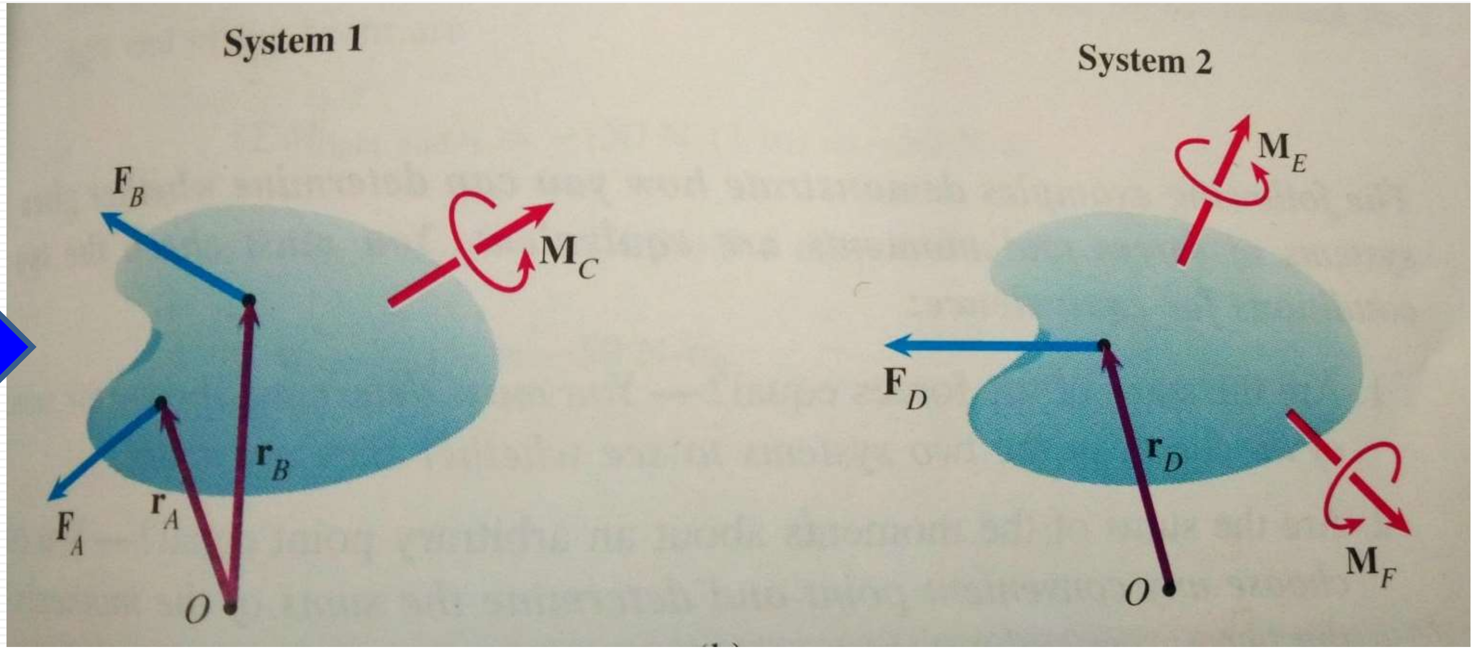
Εάν δύο συστήματα S_1 & S_2 είναι ισόδυναμα:

- $(\Sigma F)_1 = (\Sigma F)_2$
- $(\Sigma M_O)_1 = (\Sigma M_O)_2$ **αλλά και σε οποιοδήποτε άλλο σημείο!**

Ισοδυναμία Συστημάτων

- $(\Sigma F)_1 = (\Sigma F)_2$
- $(\Sigma M_O)_1 = (\Sigma M_O)_2$ αλλά και σε οποιοδήποτε άλλο σημείο (O')!





$(\Sigma F)_1 = (\Sigma F)_2 \rightarrow F_A + F_B = F_D$

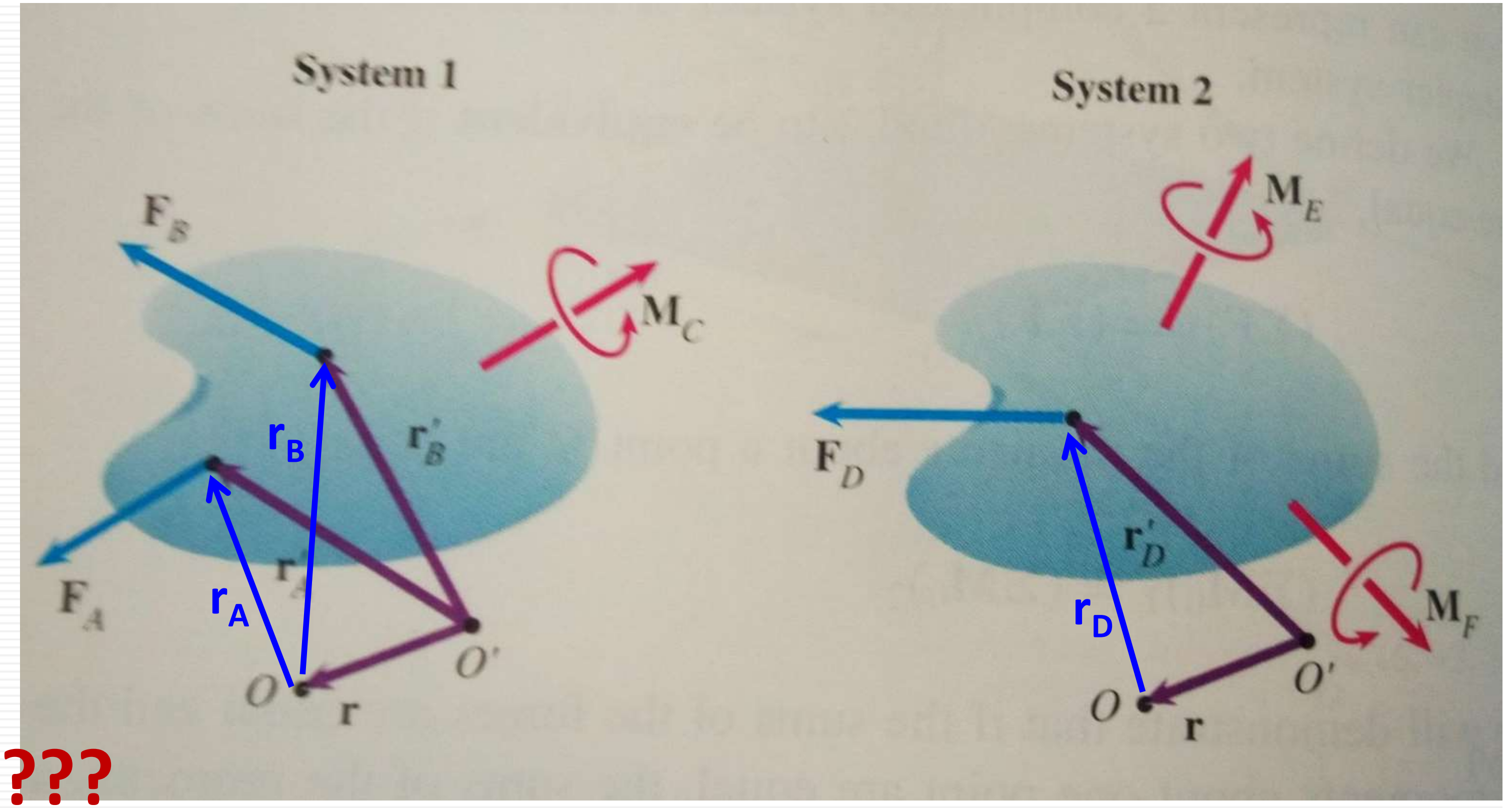
$(\Sigma M_O)_1 = (\Sigma M_O)_2 \rightarrow$

$r_A \times F_A + r_B \times F_B + M_C = r_D \times F_D + M_E + M_F$

- $(\Sigma F)_1 = (\Sigma F)_2$
- $(\Sigma M_O)_1 = (\Sigma M_O)_2$ αλλά και σε οποιοδήποτε άλλο σημείο (O')!

$(\Sigma F)_1 = (\Sigma F)_2 \Rightarrow F_A + F_B = F_D$

$(\Sigma M_O)_1 = (\Sigma M_O)_2 \Rightarrow$
$r_A \times F_A + r_B \times F_B + M_C =$
$r_D \times F_D + M_E + M_F$



$(\Sigma M_{O'})_1 = (\Sigma M_{O'})_2$???

$$\left.\begin{array}{l} r_A' \times F_A + r_B' \times F_B + M_C = r_D' \times F_D + M_E + M_F \\ r_A' = r + r_A \quad , \quad r_B' = r + r_B \quad , \quad r_D' = r + r_D \end{array}\right\}$$

$(r + r_A) \times F_A + (r + r_B) \times F_B + M_C = (r + r_D) \times F_D + M_E + M_F \Rightarrow$

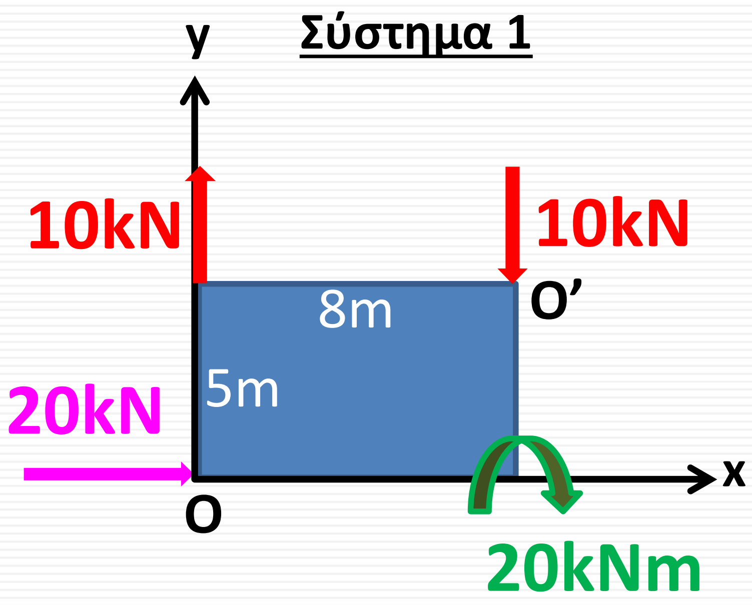
$r \times (\Sigma F)_1 + (\Sigma M_O)_1 = r \times (\Sigma F)_2 + (\Sigma M_O)_2$: ΙΣΧΥΕΙ!

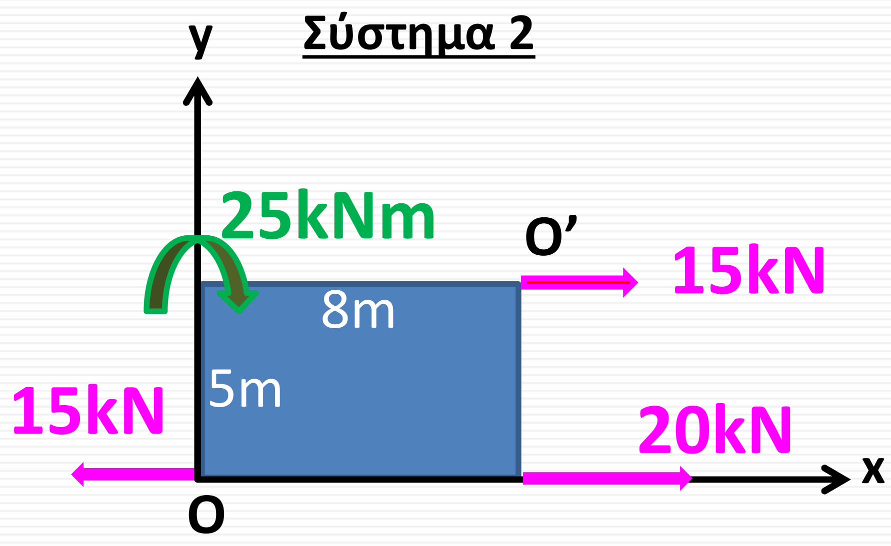
Ισοδυναμία Συστημάτων: ΣF, ΣΜ αμετάβλητες

Εάν δύο συστήματα S_1 & S_2 είναι ισόδυναμα:

- $(\Sigma F)_1 = (\Sigma F)_2$
- $(\Sigma M_O)_1 = (\Sigma M_O)_2$ **αλλά και σε οποιοδήποτε άλλο σημείο!**

Άσκηση No. 1) Είναι Ισοδύναμα τα δύο Συστήματα;
(μεταξύ τους ίσες δυνάμεις και ίσες ροπές ως προς οποιοδήποτε σημείο)





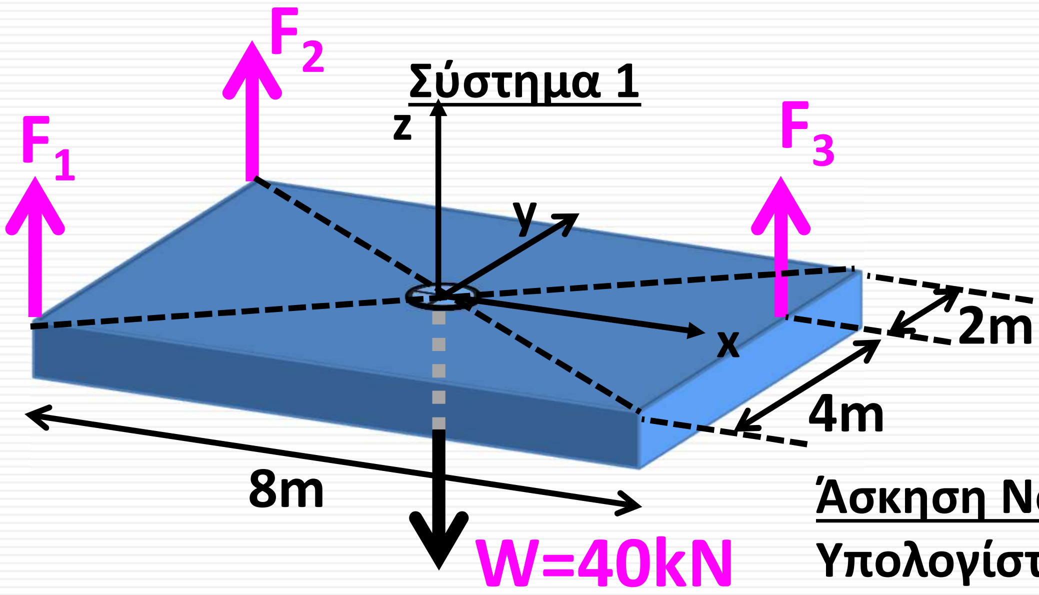
Ισοδυναμία Συστημάτων

Εάν δύο συστήματα S_1 & S_2 είναι ισόδυναμα:

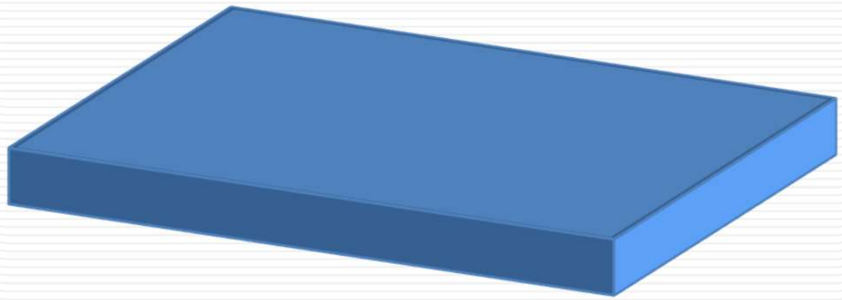
- **$(\Sigma F)_1 = (\Sigma F)_2$**
- **$(\Sigma M_O)_1 = (\Sigma M_O)_2$ αλλά και σε οποιοδήποτε άλλο σημείο!**

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = (r_y F_z - r_z F_y)\vec{i} - (r_x F_z - r_z F_x)\vec{j} + (r_x F_y - r_y F_x)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Περιστροφή επιπέδου yz γύρω από τον x: M_x	**Περιστροφή επιπέδου xz γύρω από τον y: M_y**	**Περιστροφή επιπέδου xy γύρω από τον z: M_z**

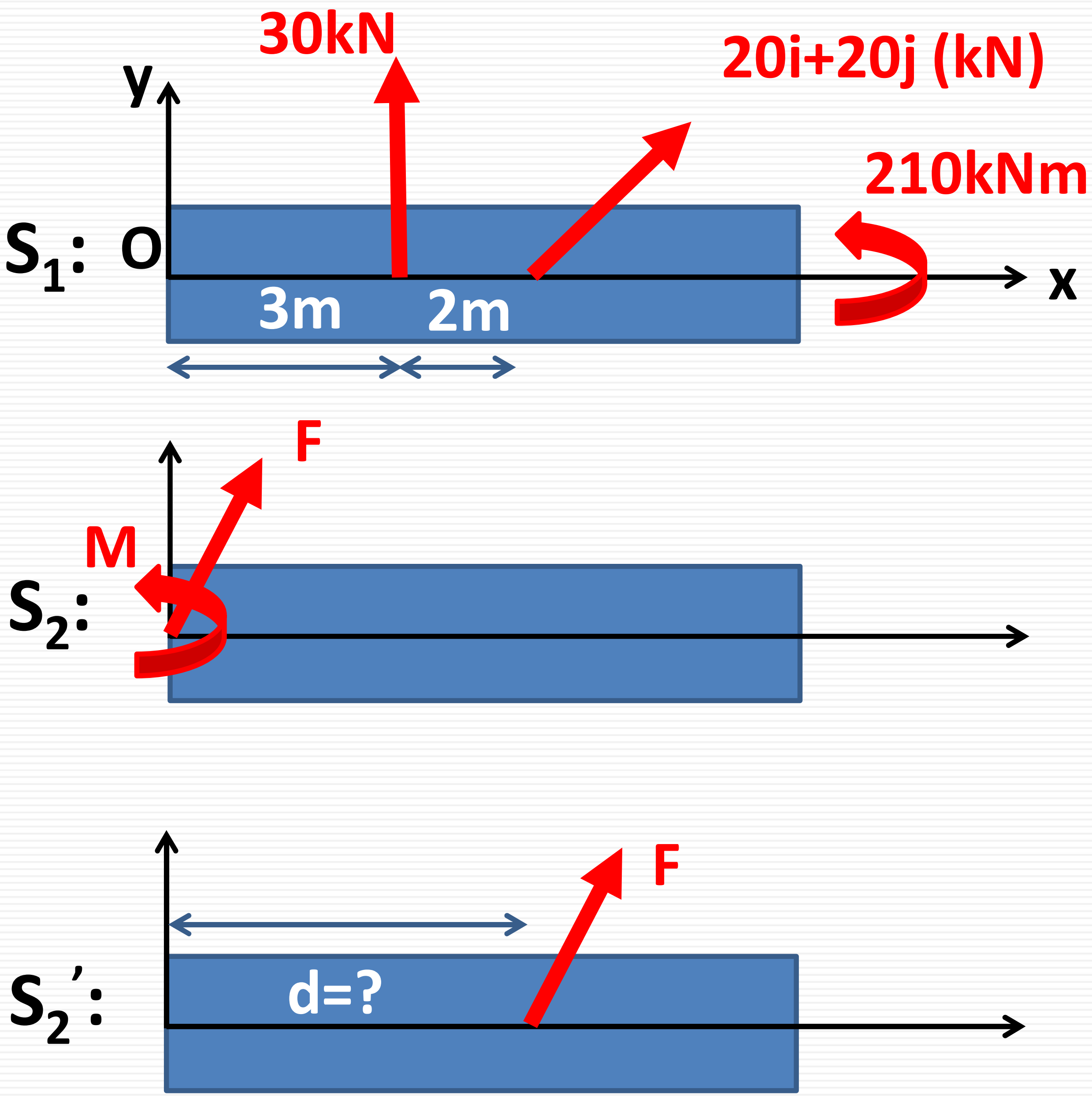


Σύστημα 2



Άσκηση Νο. 2) Τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα. Υπολογίστε τις δυνάμεις F_1, F_2 και F_3 (διανυσματικός λογισμός, M=r x F)

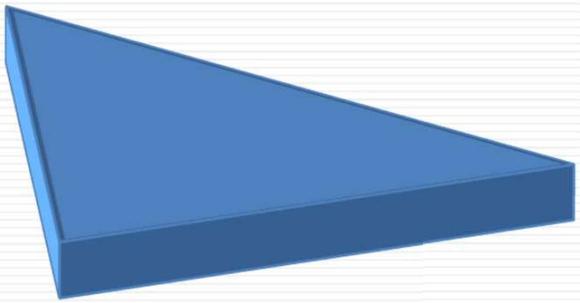
Ισοδυναμία Συστημάτων: Άσκηση για το σπίτι



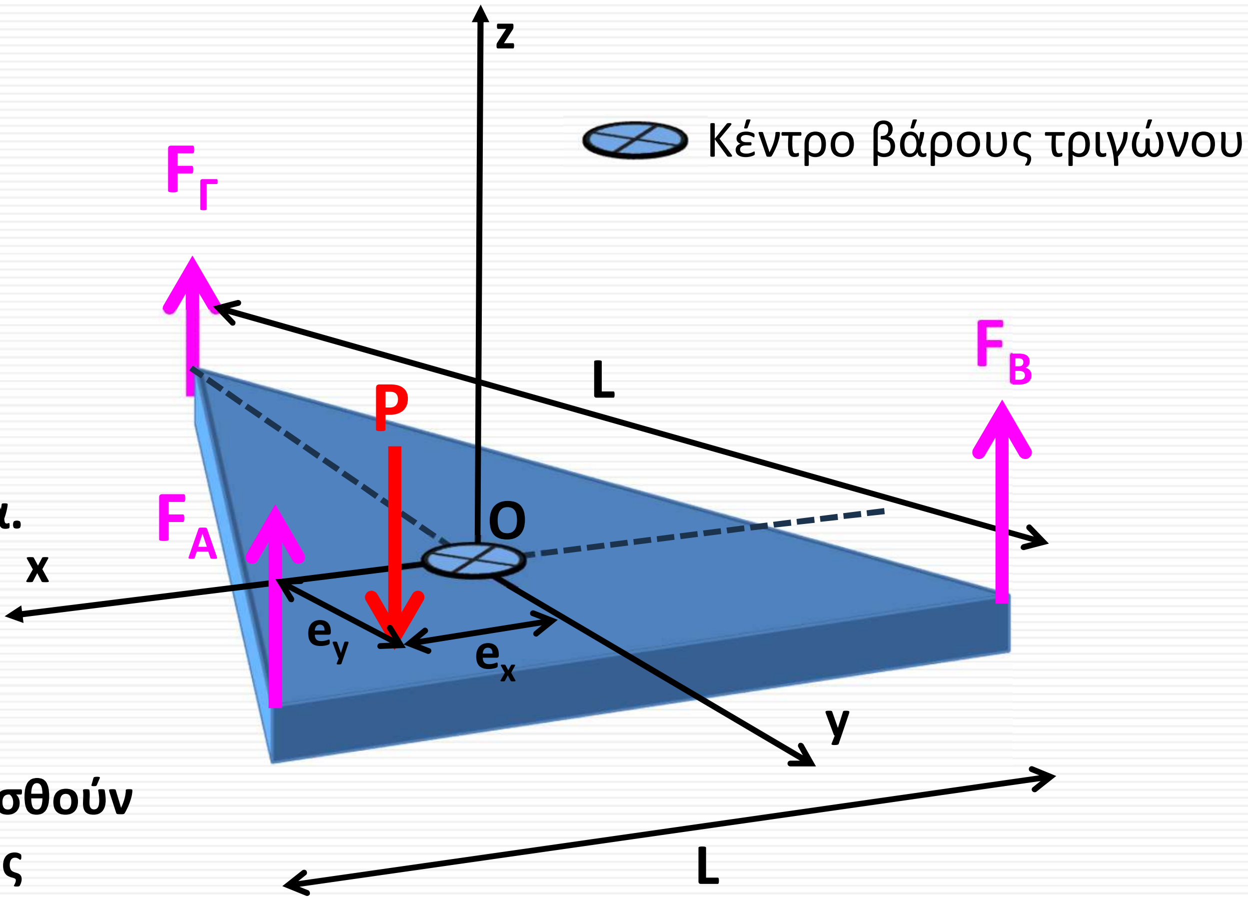
- $(\Sigma F)_1 = (\Sigma F)_2$
- $(\Sigma M_O)_1 = (\Sigma M_O)_2$
- $(\Sigma F)_1 = (\Sigma F)_{2'}$
- $(\Sigma M_O)_1 = (\Sigma M_O)_{2'}$
- $(\Sigma F)_2 = (\Sigma F)_{2'}$
- $(\Sigma M_O)_2 = (\Sigma M_O)_{2'}$

Ισοδυναμία Συστημάτων: Άσκηση για το σπίτι

Σύστημα 1



Σύστημα 2



Τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα.

Σε έναν ισοσκελή δίσκο, να υπολογισθούν οι δυνάμεις F_A , F_B , F_Γ συναρτήσει της δύναμης P και των εκκεντροτήτων e_x, e_y.
Βοήθημα: το Κ.Β. (σημείο Ο) απέχει από την πλευρά ΑΒ απόσταση 1/3Lcos30º=L/(2$\sqrt{3}$)

Λύση: $\overrightarrow{F_\Gamma} = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{e_y}{L}\right) P \cdot \vec{k}$

$$\overrightarrow{F_A} = \left(\frac{1}{3} + \frac{e_x}{L} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{e_y}{L}\right) P \cdot \vec{k}$$

$$\overrightarrow{F_B} = \left(\frac{1}{3} - \frac{e_x}{L} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{e_y}{L}\right) P \cdot \vec{k}$$