



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΔΟΜΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

1^ο εξάμηνο

Σουσάνα Ταστάνη, Επίκουρη Καθηγήτρια

stastani@civil.duth.gr

Οι σπουδές του Πολιτικού Μηχανικού

1. Επιστημονικό υπόβαθρο και προαπαιτούμενες δεξιότητες
2. Εφαρμοσμένα αντικείμενα (τεχνολογία, κανονισμοί, κλπ.)


Τεχνική Μηχανική

- Μικρός όγκος νέων γνώσεων
- Μεγάλες απαιτήσεις γρήγορης και ακριβούς εφαρμογής
- Το απόλυτο «προαπαιτούμενο» μάθημα

... επομένως ...

- Αυξημένα ECTS
- Πολλή εξάσκηση από τους φοιτητές
- Κουλτούρα αξιολόγησης και επαλήθευσης αποτελεσμάτων → STOP στα αριθμητικά σφάλματα

Ξεκινάμε από τα Μαθηματικά και τη Φυσική...

- Νόμοι του Νεύτωνα (Sir Isaak Newton, Principia - 1687, 1^{ος} και 3^{ος}) 
- Διανυσματικός λογισμός (γεωμετρική εποπτεία και άλγεβρα υπολογισμών)
- Στοιχειώδης τριγωνομετρία

... για να μάθουμε ειδικότερα..

- Σύνθεση και Ανάλυση δυνάμεων και ροπών
- Κινητική του στερεού σώματος (δύναμη, ροπή) → ισοροπία
- Στηρίξεις, σύνδεσμοι, αντιδράσεις συνδέσμων
- Σύνθετοι φορείς (νόμοι μόρφωσης, τρόποι επίλυσης)

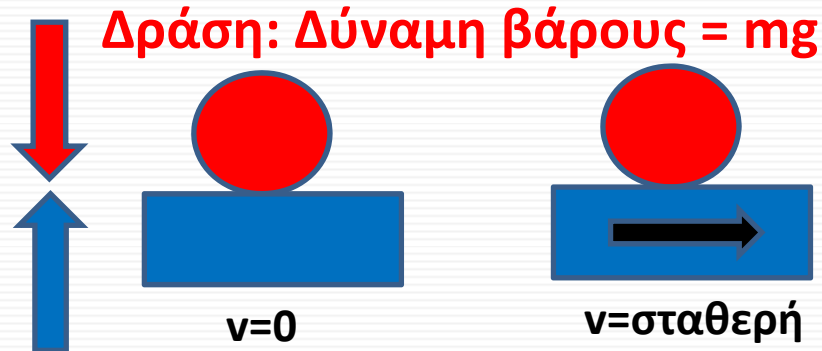
Ισορροπία



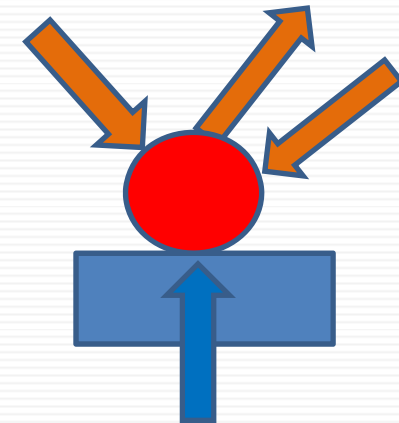
Δεν αλλάζει η κατάσταση του σώματος παρουσία δυνάμεων

- Ακίνητο σώμα (σε ηρεμία)
- όταν ένα σώμα κινείται ομαλά ($v=\text{σταθερή}$)

1^{ος} Ν.Ν.: Αν σε ένα σώμα δεν ασκείται καμία δύναμη ($\Sigma F=0$) η ταχύτητα του σώματος δεν μπορεί να μεταβληθεί



Αντίδραση = Δράση (3^{ος} Ν.Ν.)



το διανυσματικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα που βρίσκεται σε ισορροπία πρέπει να μηδέν $\rightarrow \Sigma F=0$

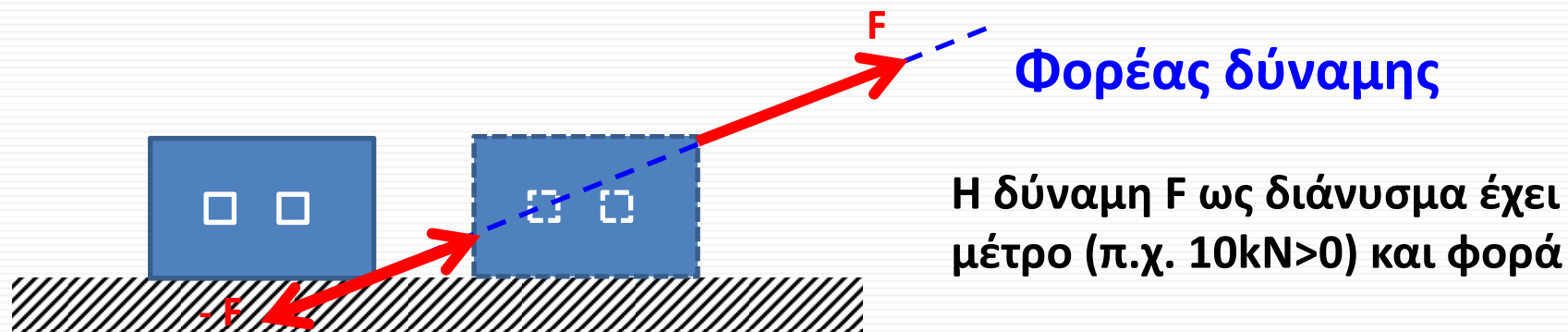
Χρήση σε περίπτωση εύρεσης άγνωστων δυνάμεων που ασκούνται σε σώμα σε ισορροπία.



Η δύναμη γίνεται αντιληπτή από το αποτέλεσμα: προκαλεί κίνηση/παραμόρφωση ενός υλικού σημείου ή σώματος

Μηχανική Στερεού σώματος

Παραδοχή: Το Στερεό σώμα αποτελείται από υλικά σημεία των οποίων οι σχετικές αποστάσεις δεν μεταβάλλονται, όταν στο σώμα, σε ένα σημείο του, ασκείται μία δύναμη F .



Η δύναμη F ως διάνυσμα έχει μέτρο (π.χ. $10\text{kN} > 0$) και φορά

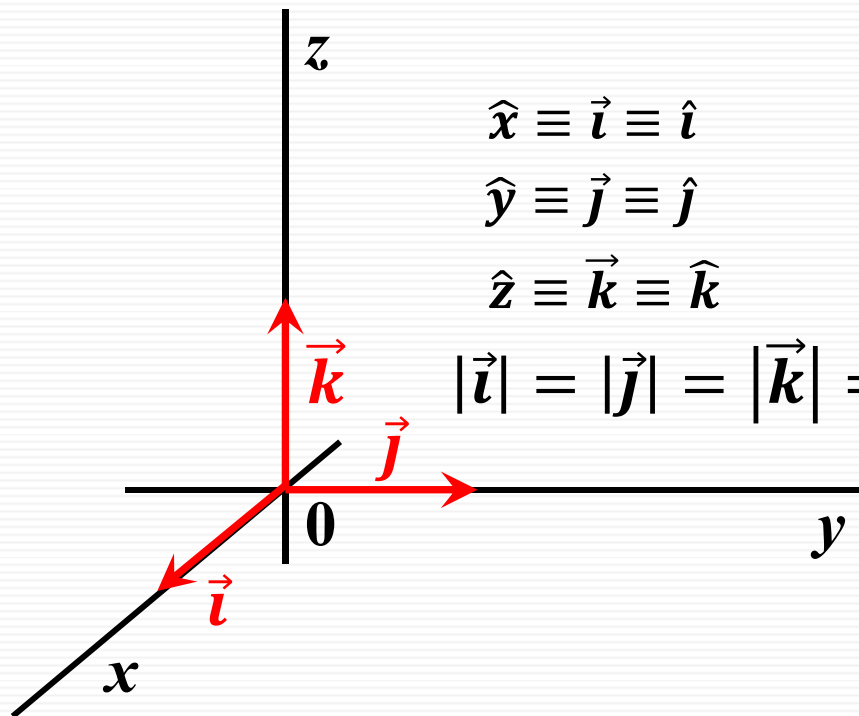
Δεν αλλάζει το αποτέλεσμα της δύναμης, όταν αυτή μετακινείται επί του άξονά της (φορέα της)

Εάν ασκούνται δυνάμεις σε ένα στερεό σώμα και αυτό βρίσκεται σε «ηρεμία», σημαίνει ότι η $\sum F = 0$ και τότε το σώμα βρίσκεται σε ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – ΜΗΚΟΣ – ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

- Έστω διάνυσμα στο επίπεδο \vec{v} (ή \mathbf{v}) με συνιστώσες (v_x, v_y) : $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$
- Όπως γνωρίζουμε από την Γεωμετρία, το φυσικό ή Ευκλείδειο μήκος του διανύσματος (δηλαδή αυτό που θα μετρούσαμε αν απλώναμε μια μεζούρα κατά μήκος του με μονάδες μέτρησης ίδιες με αυτές των αξόνων) είναι:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \geq 0$$

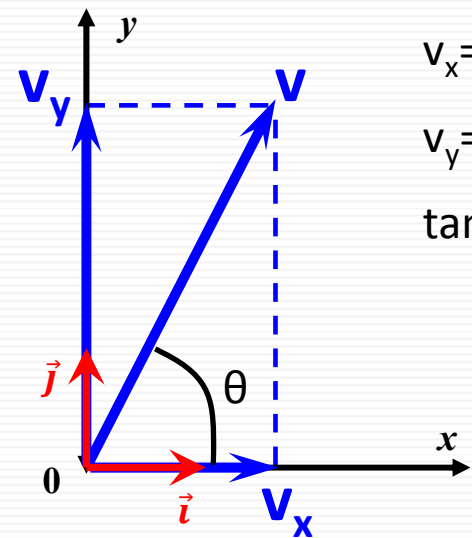


$$\hat{x} \equiv \vec{i} \equiv \hat{i}$$

$$\hat{y} \equiv \vec{j} \equiv \hat{j}$$

$$\hat{z} \equiv \vec{k} \equiv \hat{k}$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$



$$v_x = |\vec{v}| \cos\theta$$

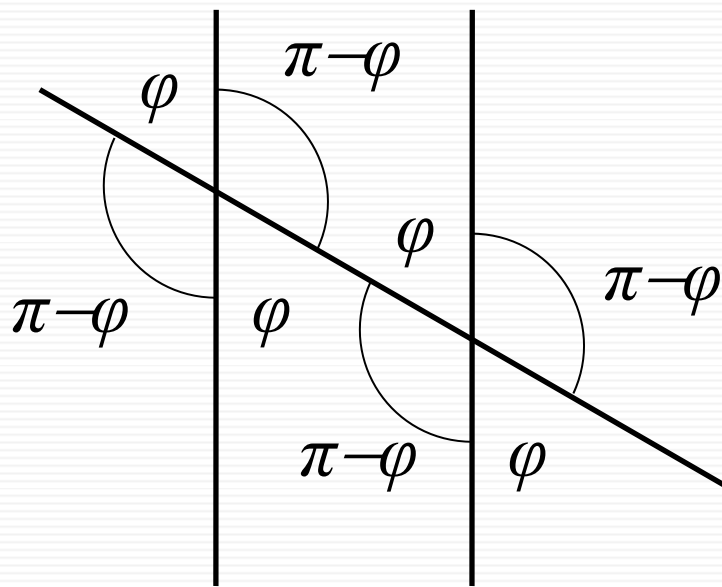
$$v_y = |\vec{v}| \sin\theta$$

$$\tan\theta = v_y/v_x$$

Μηχανικοί χρησιμοποιούμε σχεδόν πάντα την εξαιρετικά βολική κατηγορία συστημάτων αναφοράς **ορθοκανονικά** (*orthonormal, ON*), και απαρτίζονται από διανύσματα με μήκος 1 (**κανονικά**) και μεταξύ τους **ορθογώνια**.

Υπονοούμενες Γνώσεις

Γεωμετρία – Τριγωνομετρία



Οι γωνίες είναι ίσες όταν είναι:

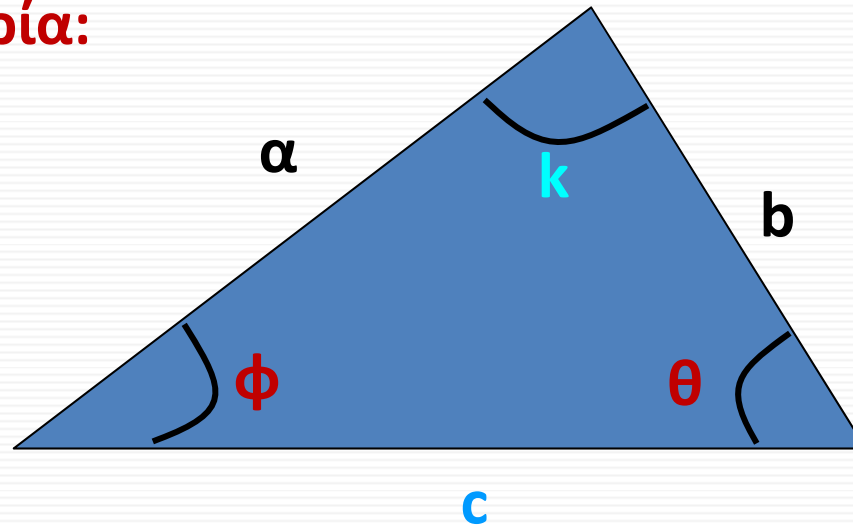
- κατά κορυφήν
- εντός (ή εκτός) εναλλάξ
- εντός-εκτός και επί τα αυτά μέρη

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \varphi) &\equiv \sin \varphi & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &\equiv \cos \varphi \\ \cos(\pi - \varphi) &\equiv -\cos \varphi & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &\equiv \sin \varphi \end{aligned}$$

Παραπληρωματικές γωνίες
(άθροισμα 180°)

Συμπληρωματικές γωνίες
(άθροισμα 90°)

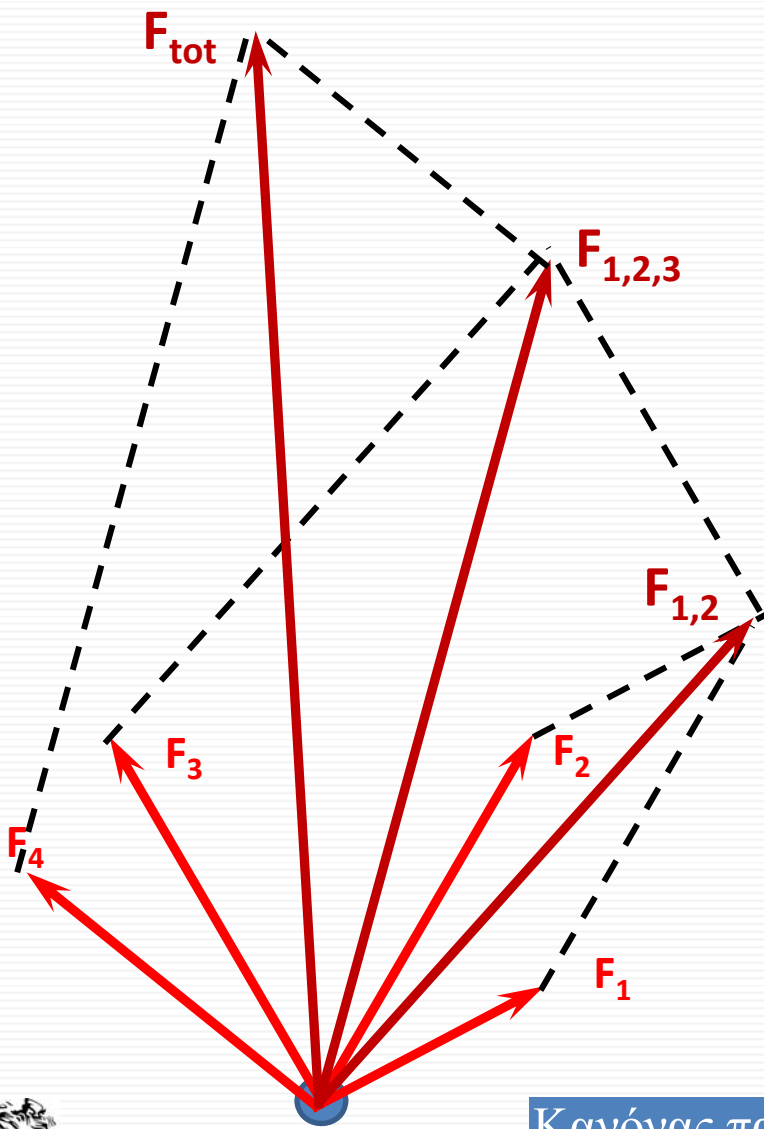
Από τριγωνομετρία:



Νόμος των συνημίτωνων: $c^2 = a^2 + b^2 - ab \cos k$

Νόμος των ημιτόνων: $\frac{\sin \varphi}{b} = \frac{\sin k}{c} = \frac{\sin \theta}{a}$

Ιδιότητες διανυσμάτων: Σύνθεση (γεωμετρία/τριγωνομετρία)



Έστω τέσσερα διανύσματα F_i , $i=1, 2, 3, 4$ οι άξονες των οποίων συντρέχουν σε μία θέση (π.χ. «υλικό σημείο» ενός σώματος). Η σύνθεση, δηλαδή η εύρεση του συνισταμένου F_{tot} (του μέτρου και της διεύθυνσής του) που προφανώς άγεται από το ίδιο σημείο μπορεί να γίνει με την Αρχή Παραλληλογράμμου (γραφική μέθοδος)

Συντίθενται αρχικά οι F_1 & $F_2 \rightarrow F_{1,2}$

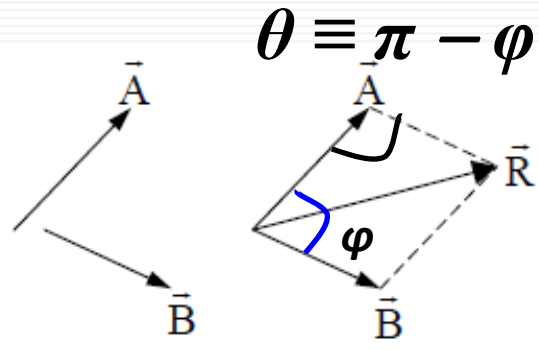
Ακολούθως οι $F_{1,2}$ & $F_3 \rightarrow F_{1,2,3}$

Τελικώς οι $F_{1,2,3}$ & $F_4 \rightarrow F_{tot}$



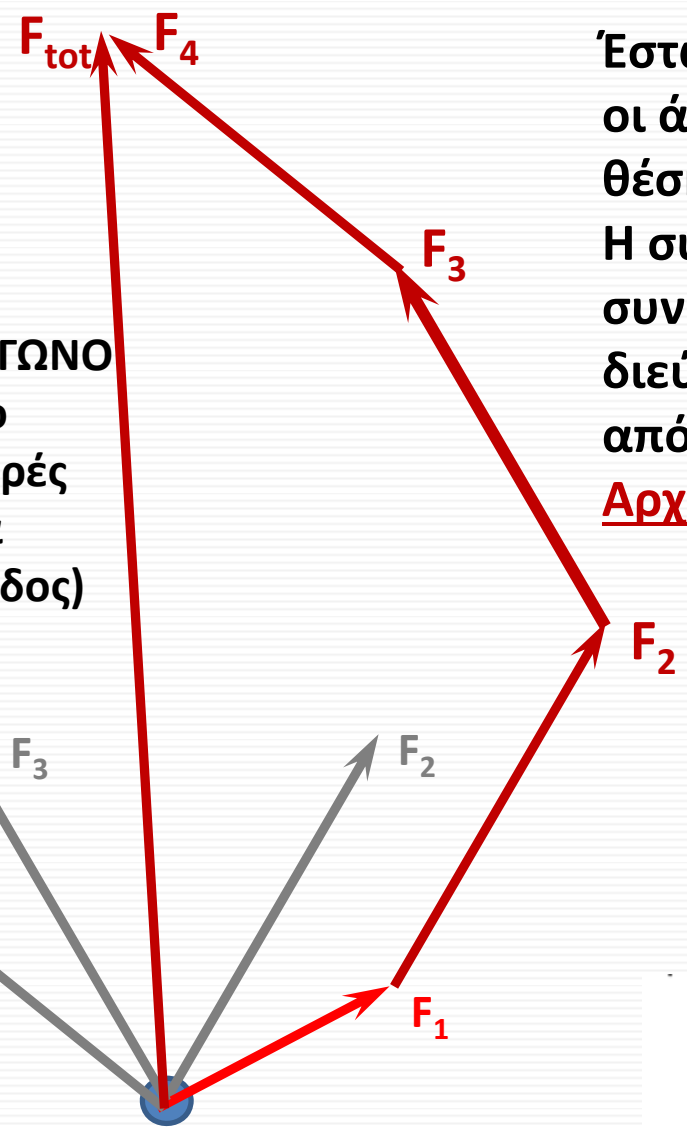
Κανόνας παραλληλογράμμου

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\varphi$$



Ιδιότητες διανυσμάτων: Σύνθεση (γεωμετρία/τριγωνομετρία)

ΔΥΝΑΜΟΠΟΛΥΓΩΝΟ
(παράθεση): το
σχήμα με πλευρές
τα διανύσματα
(γραφική μέθοδος)

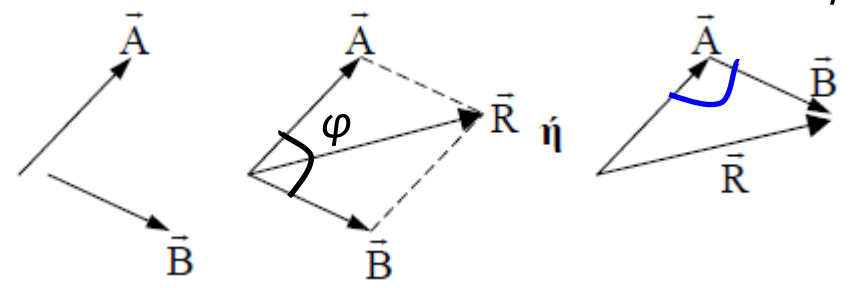


Έστω τέσσερα διανύσματα F_i , $i=1, 2, 3, 4$ οι άξονες των οποίων συντρέχουν σε μία θέση (π.χ. «υλικό σημείο» ενός σώματος). Η σύνθεση, δηλαδή η εύρεση του συνισταμένου F_{tot} (του μέτρου και της διεύθυνσής του) που προφανώς άγεται από το ίδιο σημείο μπορεί να γίνει με την Αρχή παράθεσης (γραφική μέθοδος)

Κανόνας παράθεσης

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta$$

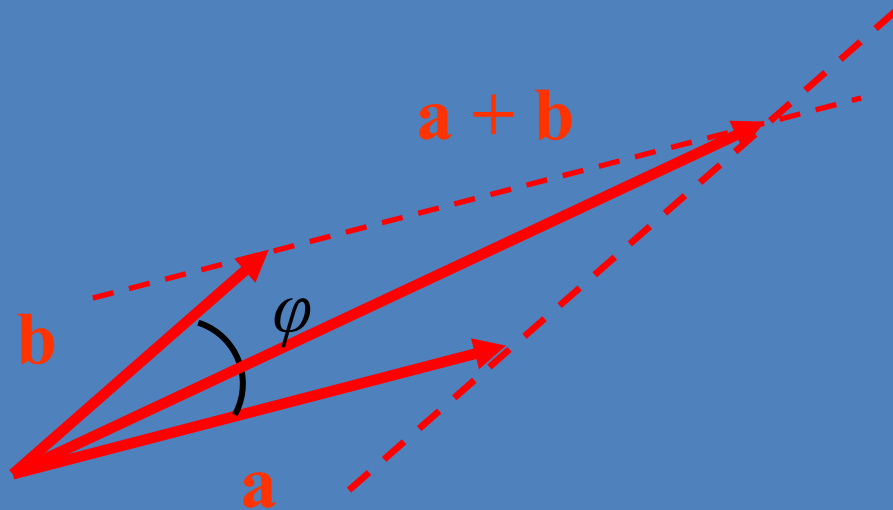
$$\theta \equiv \pi - \varphi$$





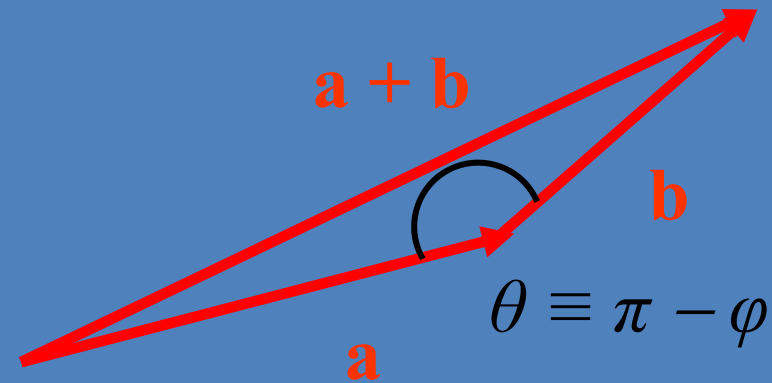
Σύνθεση διανυσμάτων

Ανακεφαλαίωση - Διευκρινήσεις



Κανόνας παραλληλογράμμου

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\varphi$$



Κανόνας παράθεσης

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta$$

Ιδιότητες διανυσμάτων: Σύνθεση

Εάν τα διανύσματα δίδονται σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τότε:

$$\vec{F}_1 = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j}$$

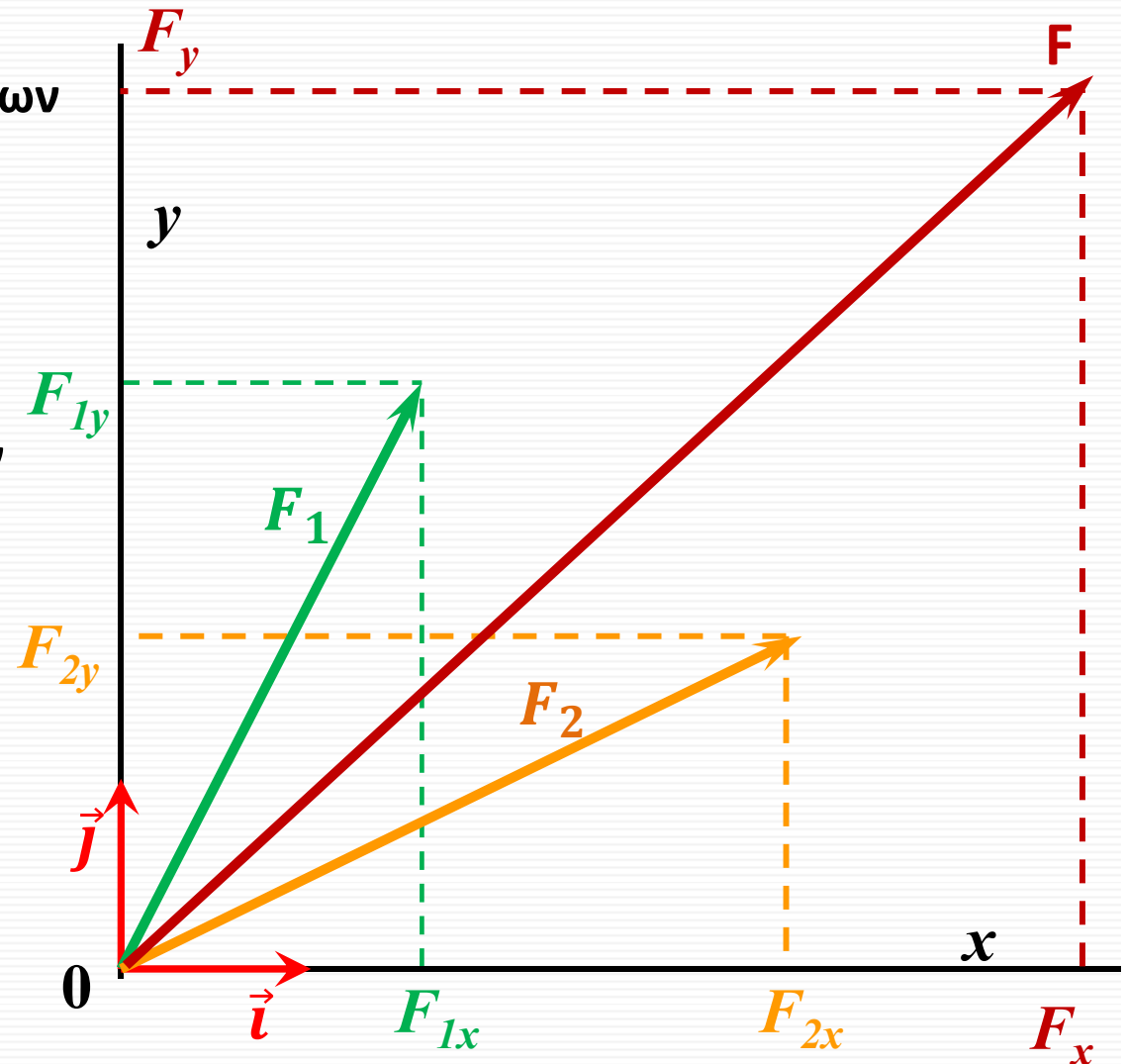
$$\vec{F}_2 = F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j}$$

Το μέτρο/μήκος των διανυσμάτων κατά x, y : αλγεβρικό άθροισμα

$$F_x = F_{1x} + F_{2x}$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$$



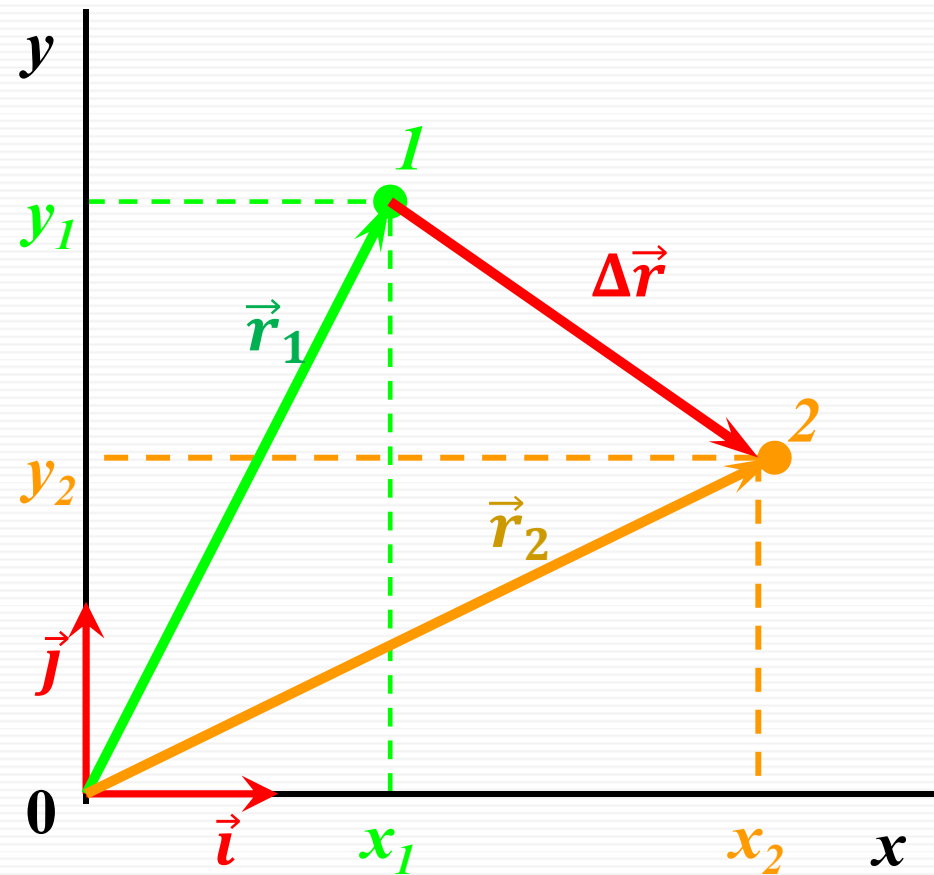
Το μέτρο/μήκος τότε: $|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$$

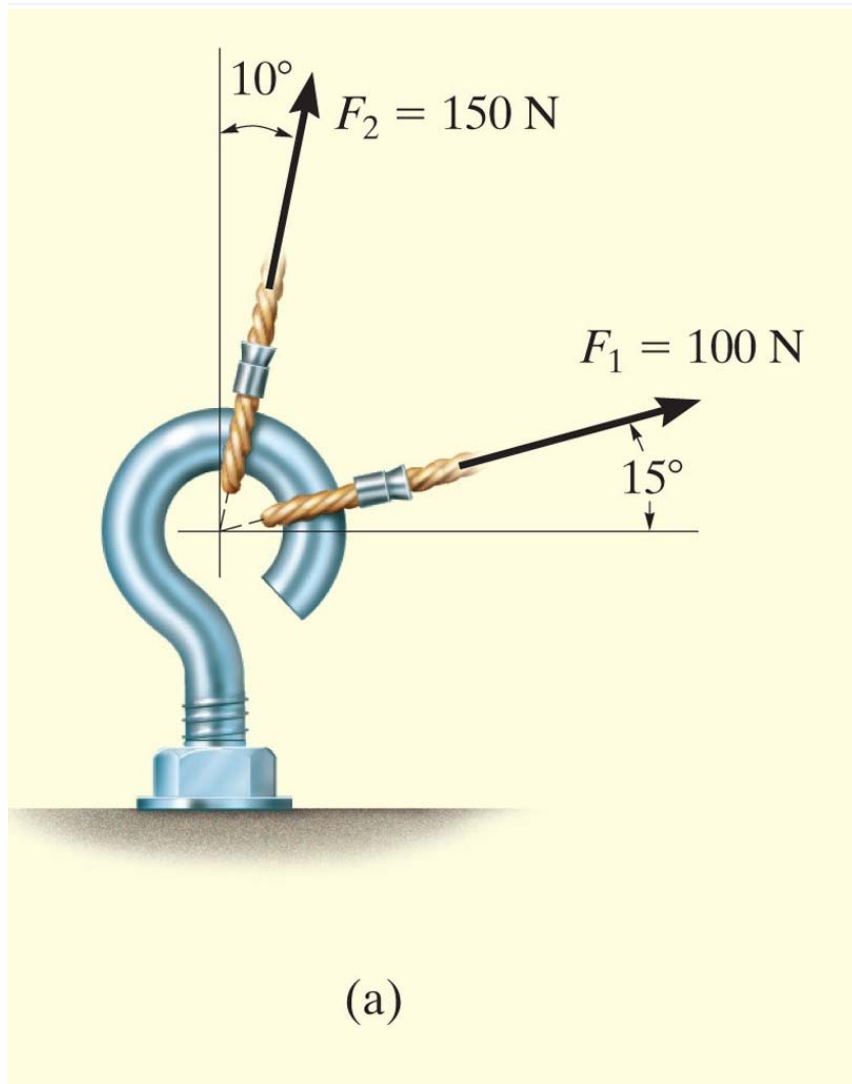
$$\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

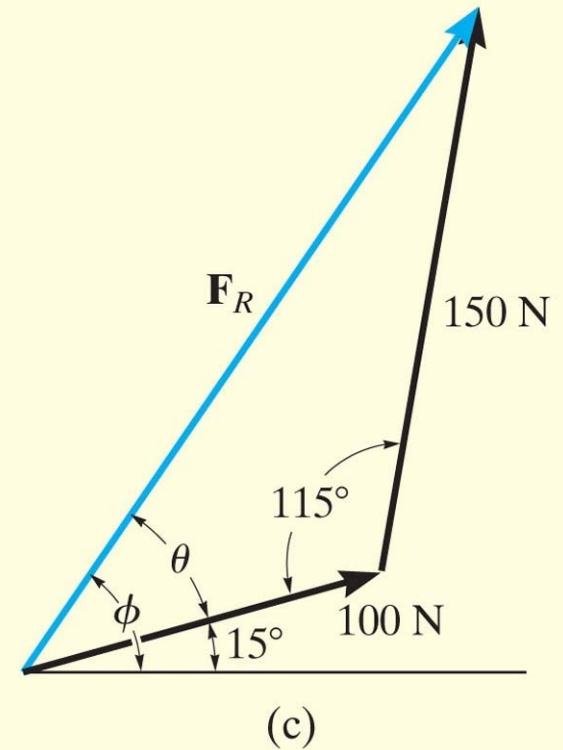


Σύνθεση Δυνάμεων στο Επίπεδο



Σύνθεση Δυνάμεων στο Επίπεδο

$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{(100 \text{ N})^2 + (150 \text{ N})^2 - 2(100 \text{ N})(150 \text{ N}) \cos 115^\circ} \\ &= \sqrt{10\,000 + 22\,500 - 30\,000(-0.4226)} = 212.6 \text{ N} \\ &= 213 \text{ N} \end{aligned}$$

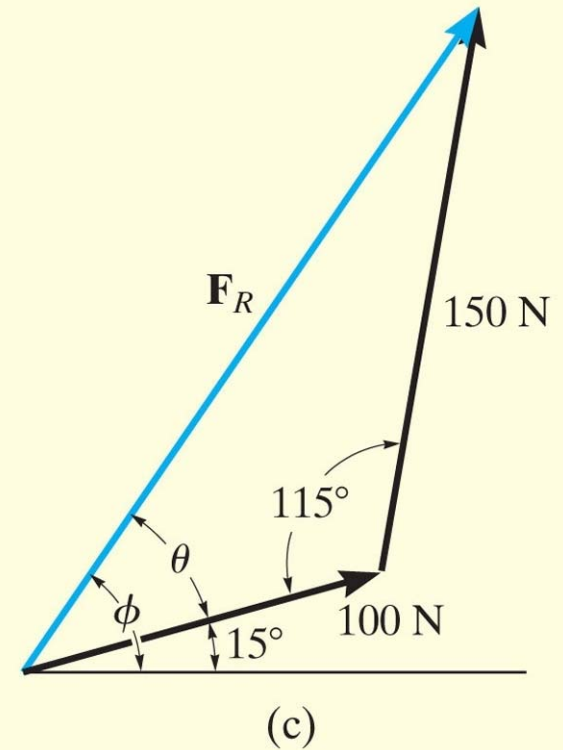


Σύνθεση Δυνάμεων στο Επίπεδο

$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{(100 \text{ N})^2 + (150 \text{ N})^2 - 2(100 \text{ N})(150 \text{ N}) \cos 115^\circ} \\ &= \sqrt{10\,000 + 22\,500 - 30\,000(-0.4226)} = 212.6 \text{ N} \\ &= 213 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\frac{150 \text{ N}}{\sin \theta} = \frac{212.6 \text{ N}}{\sin 115^\circ}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{150 \text{ N}}{212.6 \text{ N}} (\sin 115^\circ) \\ \theta &= 39.8^\circ \end{aligned}$$

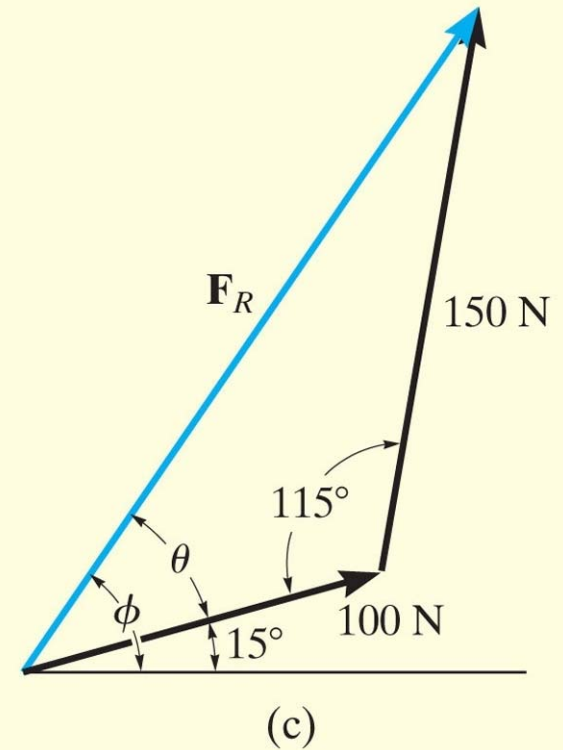


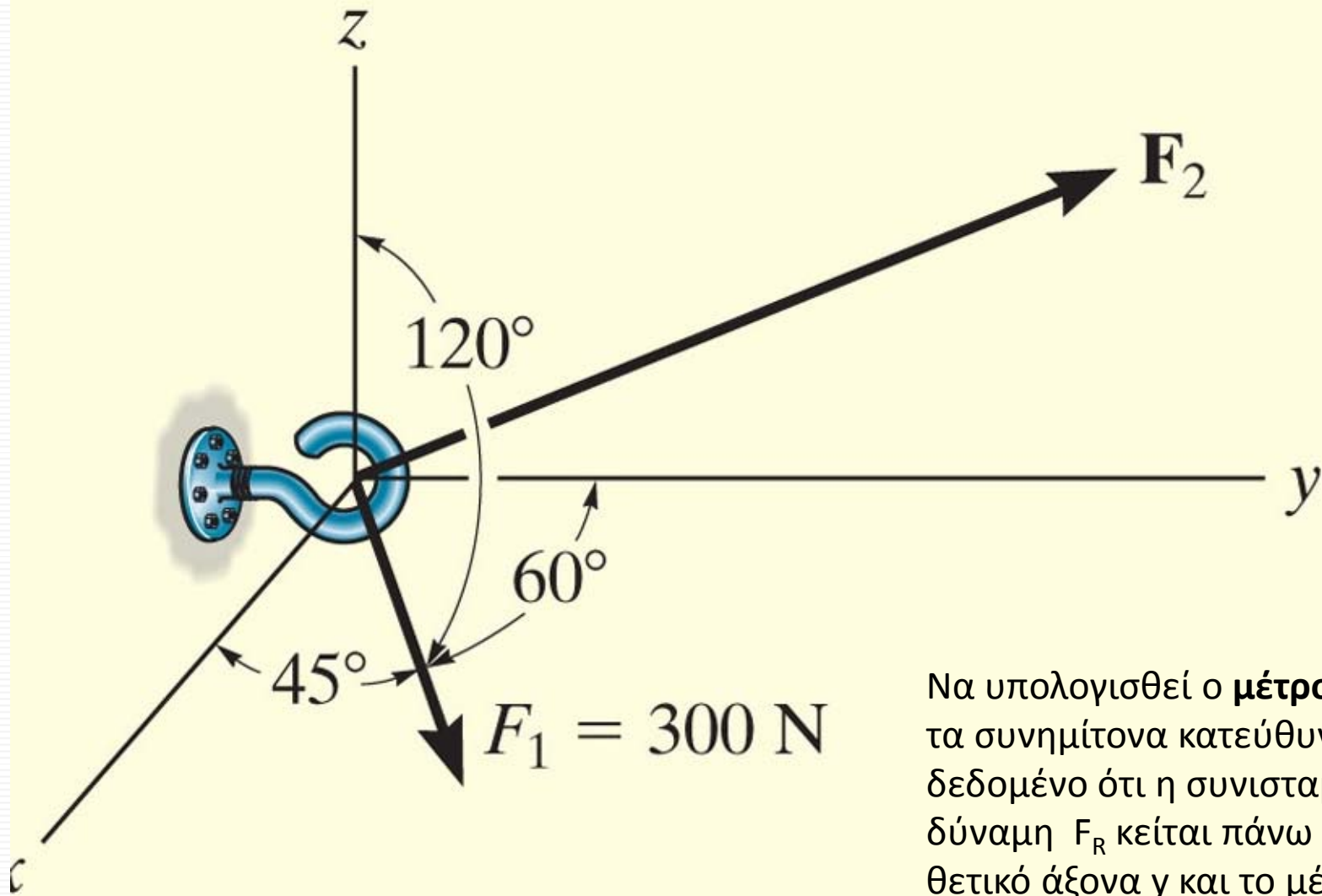
Σύνθεση Δυνάμεων στο Επίπεδο

$$\begin{aligned}F_R &= \sqrt{(100 \text{ N})^2 + (150 \text{ N})^2 - 2(100 \text{ N})(150 \text{ N}) \cos 115^\circ} \\&= \sqrt{10\,000 + 22\,500 - 30\,000(-0.4226)} = 212.6 \text{ N} \\&= 213 \text{ N}\end{aligned}$$

$$\frac{150 \text{ N}}{\sin \theta} = \frac{212.6 \text{ N}}{\sin 115^\circ} \quad \sin \theta = \frac{150 \text{ N}}{212.6 \text{ N}} (\sin 115^\circ)$$
$$\theta = 39.8^\circ$$

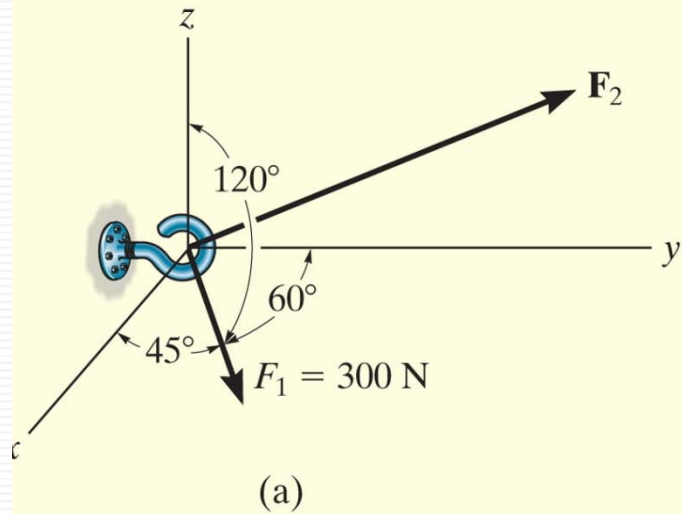
$$\phi = 39.8^\circ + 15.0^\circ = 54.8^\circ$$





(a)

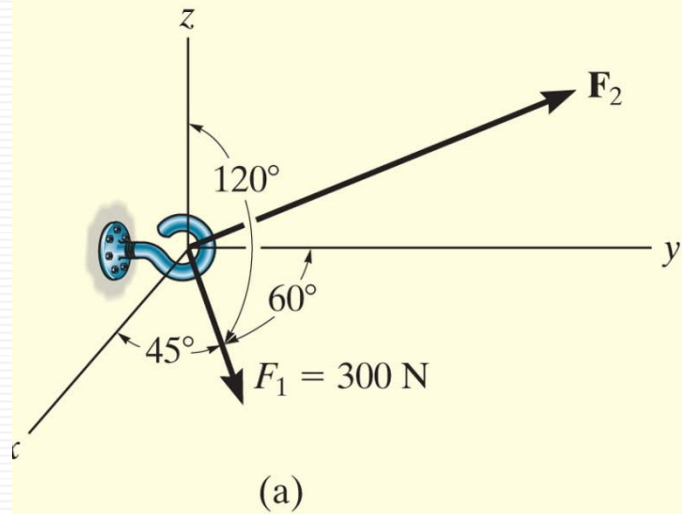
Να υπολογισθεί ο **μέτρο της F_2** και τα συνημίτονα κατεύθυνσης με δεδομένο ότι η συνισταμένη δύναμη F_R κείται πάνω στον θετικό άξονα y και το μέτρο της είναι 800N



$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= F_1 \cos \alpha_1 \mathbf{i} + F_1 \cos \beta_1 \mathbf{j} + F_1 \cos \gamma_1 \mathbf{k} \\ &= 300 \cos 45^\circ \mathbf{i} + 300 \cos 60^\circ \mathbf{j} + 300 \cos 120^\circ \mathbf{k} \\ &= \{212.1\mathbf{i} + 150\mathbf{j} - 150\mathbf{k}\} \text{ N}\end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_2 = F_{2x} \mathbf{i} + F_{2y} \mathbf{j} + F_{2z} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_R = (800 \text{ N})(+\mathbf{j}) = \{800\mathbf{j}\} \text{ N}$$



$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$800\mathbf{j} = 212.1\mathbf{i} + 150\mathbf{j} - 150\mathbf{k} + F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} + F_{2z}\mathbf{k}$$

$$800\mathbf{j} = (212.1 + F_{2x})\mathbf{i} + (150 + F_{2y})\mathbf{j} + (-150 + F_{2z})\mathbf{k}$$

$$0 = 212.1 + F_{2x} \quad F_{2x} = -212.1 \text{ N}$$

$$800 = 150 + F_{2y} \quad F_{2y} = 650 \text{ N}$$

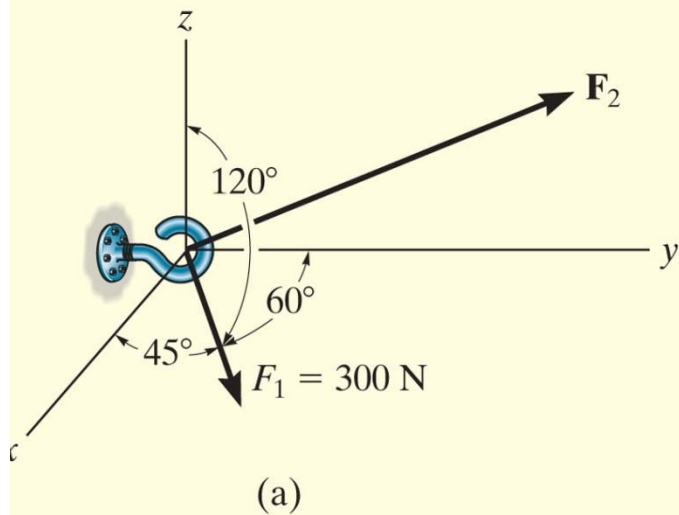
$$0 = -150 + F_{2z} \quad F_{2z} = 150 \text{ N}$$

$$F_2 = \sqrt{(-212.1 \text{ N})^2 + (650 \text{ N})^2 + (150 \text{ N})^2}$$
$$= 700 \text{ N}$$

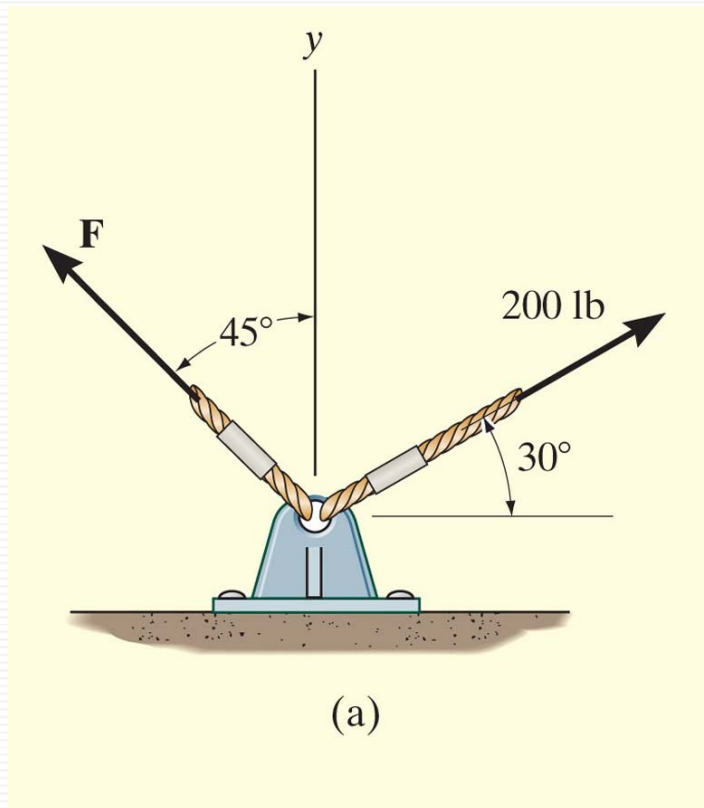
$$\cos \alpha_2 = \frac{-212.1}{700}; \quad \alpha_2 = 108^\circ$$

$$\cos \beta_2 = \frac{650}{700}; \quad \beta_2 = 21.8^\circ$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{150}{700}; \quad \gamma_2 = 77.6^\circ$$



Ασκήσεις για το σπίτι



Να υπολογισθεί η F και η F_R