



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

DEMOCRITUS
UNIVERSITY
OF THRACE

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΔΟΜΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

1^ο εξάμηνο

Σουσάνα Ταστάνη, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

stastani@civil.duth.gr

Οι σπουδές του Πολιτικού Μηχανικού

1. Επιστημονικό υπόβαθρο και προαπαιτούμενες δεξιότητες
2. Εφαρμοσμένα αντικείμενα (τεχνολογία, κανονισμοί, κλπ.)

Τεχνική Μηχανική I

- Μικρός όγκος νέων γνώσεων
- Μεγάλες απαιτήσεις γρήγορης και ακριβούς εφαρμογής
- ΤΟ ΑΠΟΛΥΤΟ «ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΟ» ΜΑΘΗΜΑ

... επομένως ...

- Αυξημένα ECTS
- Πολλή εξάσκηση από τους φοιτητές
- Κουλτούρα αξιολόγησης και επαλήθευσης αποτελεσμάτων → STOP στα αριθμητικά σφάλματα

Τεχνική Μηχανική Ι

Προτεινόμενα συγγράμματα (ευδοξος)

Στατική, ΤΟΜΟΣ Ι

Γδούτος Εμμανουήλ Ε.

ΣΤΑΤΙΚΗ- ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Beer Ferdinand P., Johnston
Russell E., Mazurek F. David

ελεύθερα συγγράμματα – ebooks, π.χ.



- Rajapakse, N., Gross, D., Hauger, W., Schröder, J., & Wall, W. A. (2009). *Engineering Mechanics 1: Statics*. Springer Berlin Heidelberg.

- W.M.C.McKenzie. Examples in Structural Analysis (2006). LONDON AND NEW YORK. [<https://civilengineering.files.wordpress.com/2014/10/examples-in-structural-analysis-2006-by-william-m-c-mckenzie-good-one.pdf>, accessed 18/10/2021]

- Αβραμίδης, Ι., Μορφίδης, Κ. 2015. Ισοστατικοί φορείς. [ηλεκτρ. βιβλ.] Αθήνα:Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών. Διαθέσιμο στο: <http://hdl.handle.net/11419/1004>

eclass → Ασκήσεις → ανοικτή άσκηση «εξάσκηση» για όλο το εξάμηνο

Τεχνική Μηχανική Ι

Μάθημα Πέμπτης, 10:00-13:00

θεωρία και επίλυση ασκήσεων από την διδάσκουσα

Μάθημα Τρίτης, 12:00-13:00

Οι φοιτητές επιλύουν ΕΝΤΟΣ της τάξης άσκηση που τους έχει ανατεθεί από το μάθημα της Πέμπτης

(Bonus: +1 μονάδα στον βαθμό της εξέτασης μαθήματος)

ΩΡΕΣ ΓΡΑΦΕΙΟΥ

Απορίες- συμβουλευτική:

ΤΡΙΤΗ, ΤΕΤΑΡΤΗ, ΠΕΜΠΤΗ:

14:00-16:00

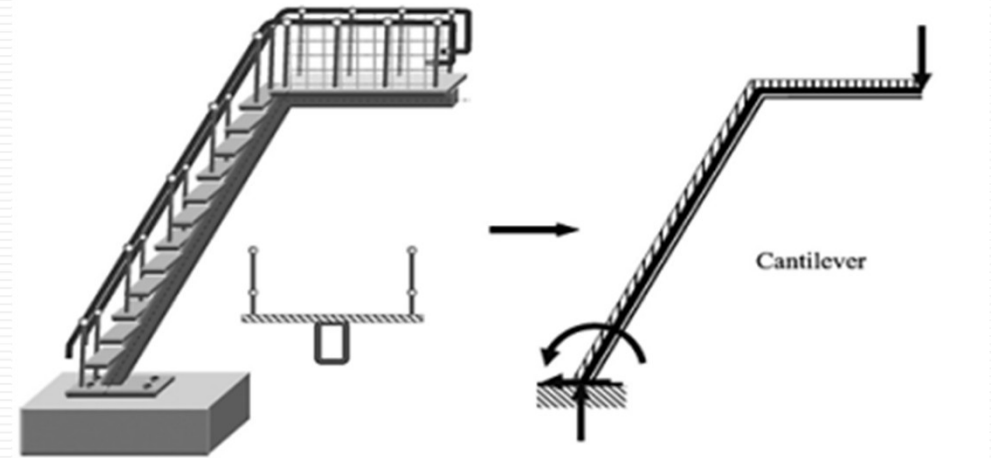
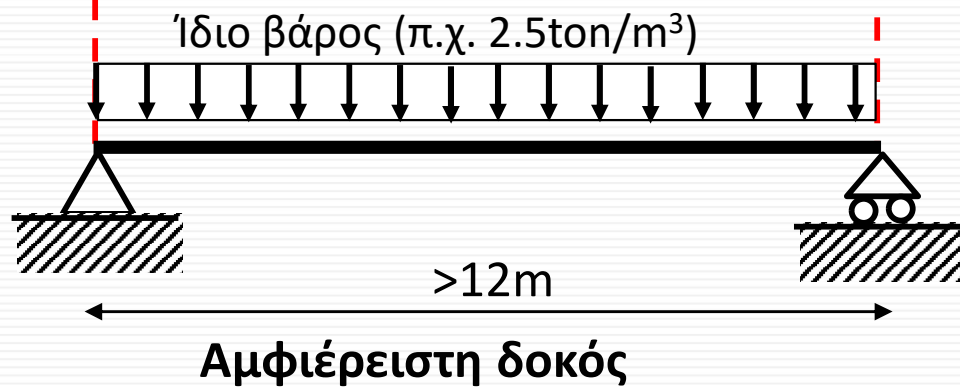
Ξεκινάμε από τη Φυσική και τα Μαθηματικά ...

- **Νόμοι του Νεύτωνα (Sir Isaak Newton, Principia - 1687, 1^{ος} και 3^{ος})**
- **Διανυσματικός λογισμός (γεωμετρική εμποπτεία και άλγεβρα υπολογισμών)**
- **Στοιχειώδης τριγωνομετρία**

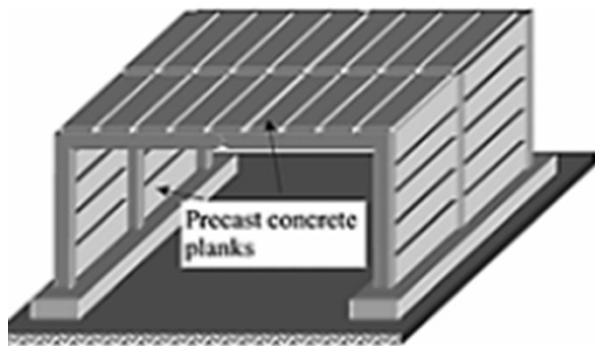
... για να μάθουμε ειδικότερα ...

- **Σύνθεση και Ανάλυση δυνάμεων και ροπών**
- **Κινητική του στερεού σώματος (δύναμη, ροπή) → ισορροπία**
- **Στηρίξεις, σύνδεσμοι, αντιδράσεις συνδέσμων**
- **Σύνθετοι φορείς (νόμοι μόρφωσης, τρόποι επίλυσης)**

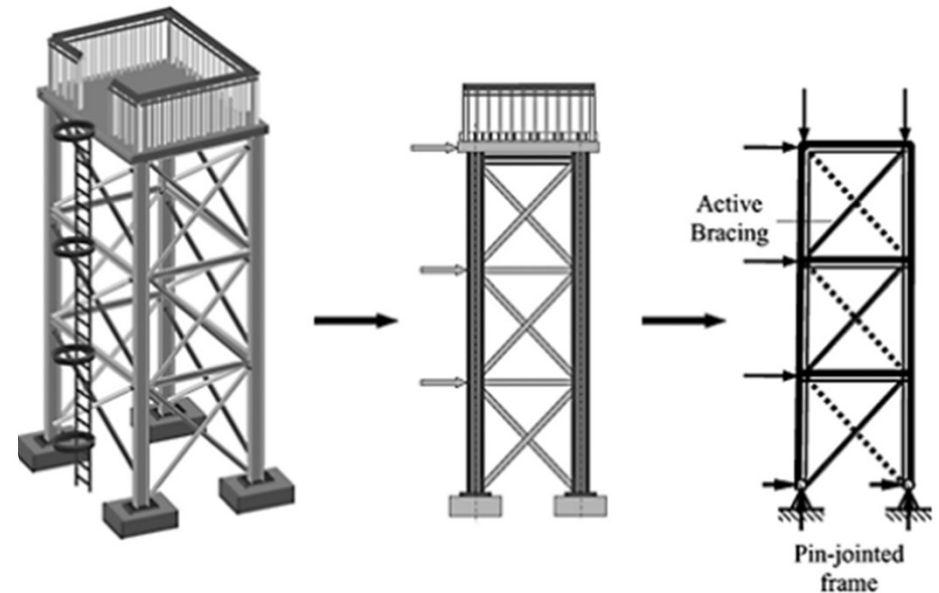
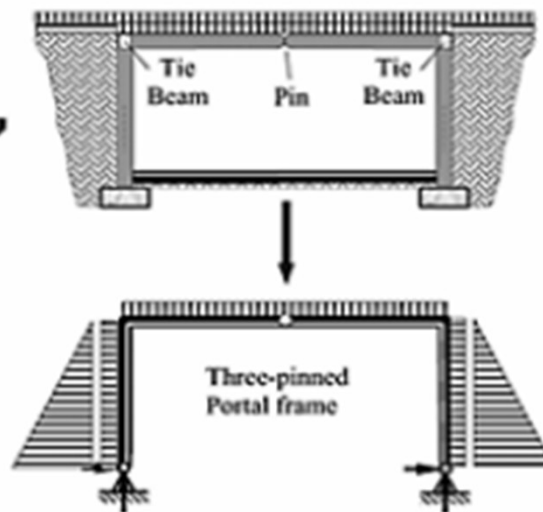
προσομοίωση φορέων



πρόβολος



Τριαρθρωτή κατασκευή



δικτύωμα

Ξεκινάμε από τα Μαθηματικά και τη Φυσική...

- Νόμοι του Νεύτωνα (Sir Isaak Newton, Principia - 1687, 1^{ος} και 3^{ος}) 
- Διανυσματικός λογισμός (γεωμετρική εμποπτεία και άλγεβρα υπολογισμών)
- Στοιχειώδης τριγωνομετρία

... για να μάθουμε ειδικότερα..

- Σύνθεση και Ανάλυση δυνάμεων και ροπών
- Κινητική του στερεού σώματος (δύναμη, ροπή) → ισορροπία
- Στηρίξεις, σύνδεσμοι, αντιδράσεις συνδέσμων
- Σύνθετοι φορείς (νόμοι μόρφωσης, τρόποι επίλυσης)

Ισορροπία



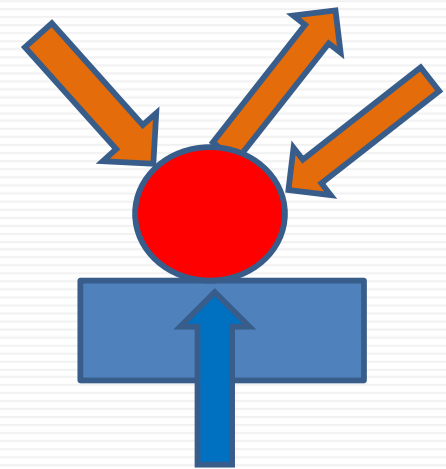
Δεν αλλάζει η κατάσταση του σώματος παρουσία δυνάμεων

- Ακίνητο σώμα (σε ηρεμία)
- όταν ένα σώμα κινείται ομαλά ($v=\text{σταθερή}$)

1^{ος} Ν.Ν.: Αν σε ένα σώμα δεν ασκείται καμία δύναμη ($\Sigma F=0$) η ταχύτητα του σώματος δεν μπορεί να μεταβληθεί



Αντίδραση = Δράση (3^{ος} Ν.Ν.)



το διανυσματικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα που βρίσκεται σε ισορροπία πρέπει να μηδέν $\rightarrow \Sigma F=0$

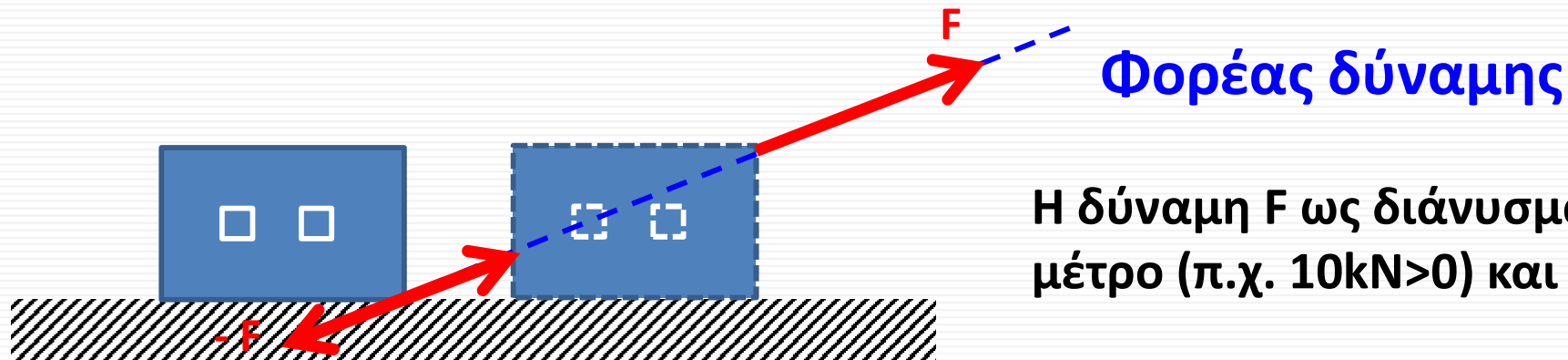
Χρήση σε περίπτωση εύρεσης άγνωστων δυνάμεων που ασκούνται σε σώμα σε ισορροπία.



Η δύναμη γίνεται αντιληπτή από το αποτέλεσμα: προκαλεί κίνηση/παραμόρφωση ενός υλικού σημείου ή σώματος

Μηχανική Στερεού σώματος

Παραδοχή: Το Στερεό σώμα αποτελείται από υλικά σημεία των οποίων οι σχετικές αποστάσεις δεν μεταβάλλονται, όταν στο σώμα, σε ένα σημείο του, ασκείται μία δύναμη F .

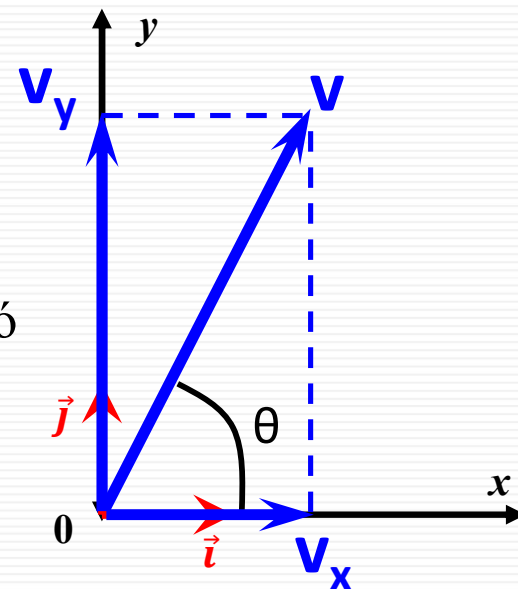


Δεν αλλάζει το αποτέλεσμα της δύναμης, όταν αυτή μετακινείται επί του άξονά της (φορέα της)

Εάν ασκούνται δυνάμεις σε ένα στερεό σώμα και αυτό βρίσκεται σε «ηρεμία», σημαίνει ότι η $\Sigma F=0$ και τότε το σώμα βρίσκεται σε ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ.

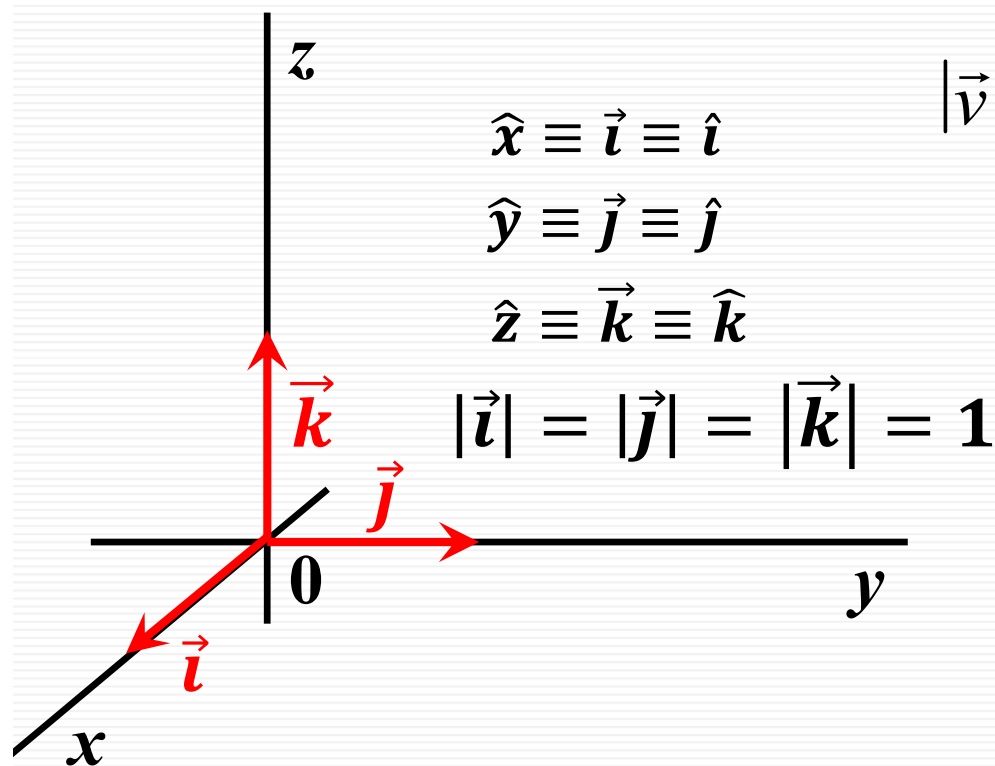
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ - ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – ΜΗΚΟΣ

Έστω διάνυσμα στο επίπεδο: $\vec{v}$ (ή $\mathbf{v}$) $v_x = |\vec{v}| \cos \theta$
με συνιστώσες (v_x, v_y) : $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$ $v_y = |\vec{v}| \sin \theta$
 $\tan \theta = v_y / v_x$



Το φυσικό ή Ευκλείδειο μήκος του διανύσματος (δηλαδή αυτό που θα μετρούσαμε αν απλώναμε μια μεζούρα κατά μήκος του με μονάδες μέτρησης ίδιες με αυτές των αξόνων) είναι:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \geq 0$$



$$\hat{x} \equiv \vec{i} \equiv \hat{i}$$

$$\hat{y} \equiv \vec{j} \equiv \hat{j}$$

$$\hat{z} \equiv \vec{k} \equiv \hat{k}$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

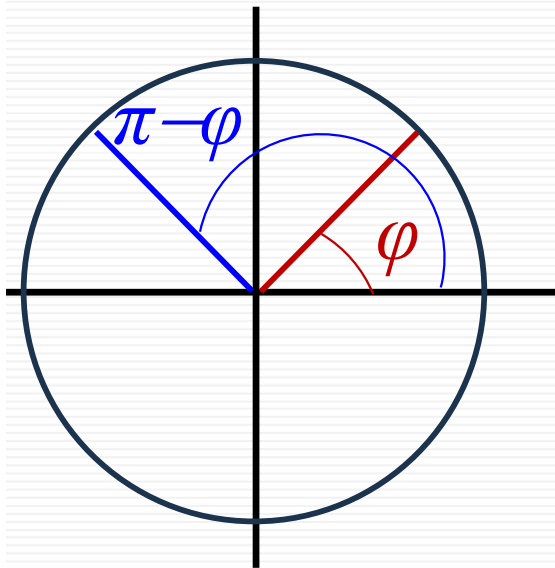
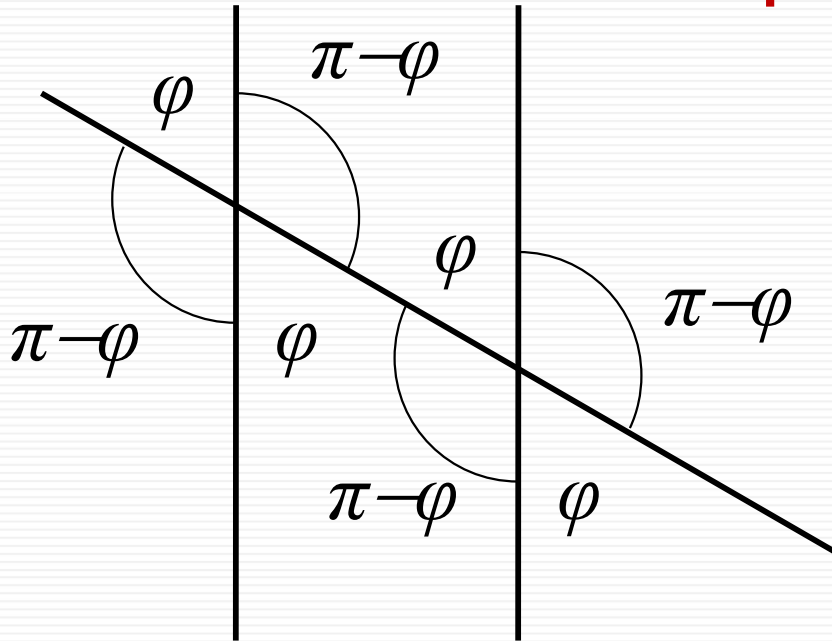
Μηχανικοί χρησιμοποιούμε σχεδόν πάντα την εξαιρετικά βολική κατηγορία συστημάτων αναφοράς **ορθοκανονικά** (*orthonormal, ON*), και απαρτίζονται από διανύσματα με μήκος 1 (**κανονικά**) και μεταξύ τους **ορθογώνια**

Υπονοούμενες Γνώσεις

Γεωμετρία – Τριγωνομετρία

Οι γωνίες είναι ίσες όταν είναι:

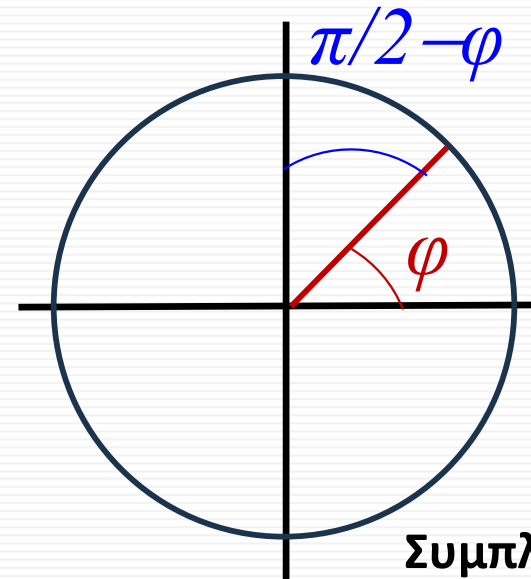
- κατά κορυφήν
- εντός (ή εκτός) εναλλάξ
- εντός-εκτός και επί τα αυτά μέρη



$$\sin(\pi - \varphi) \equiv \sin \varphi$$

$$\cos(\pi - \varphi) \equiv -\cos \varphi$$

Παραπληρωματικές
γωνίες (άθροισμα 180°)

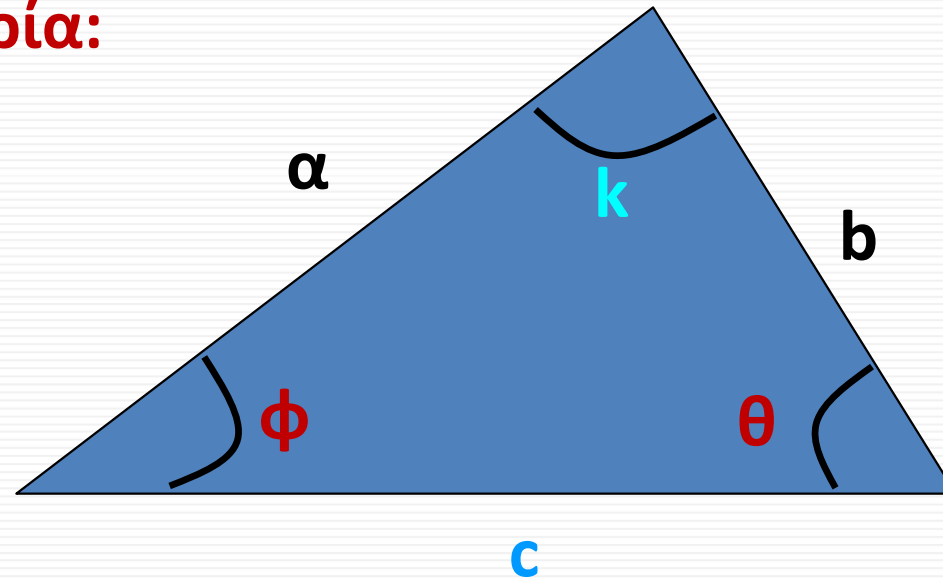


$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \equiv \cos \varphi$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \equiv \sin \varphi$$

Συμπληρωματικές γωνίες
(άθροισμα 90°)

Από τριγωνομετρία:

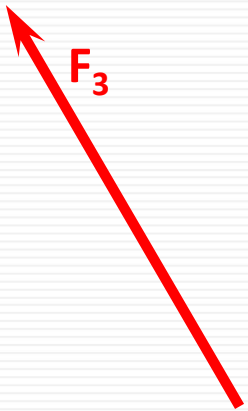


Νόμος των συνημίτονων: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos k$

Νόμος των ημιτόνων: $\frac{\sin \varphi}{b} = \frac{\sin k}{c} = \frac{\sin \theta}{a}$

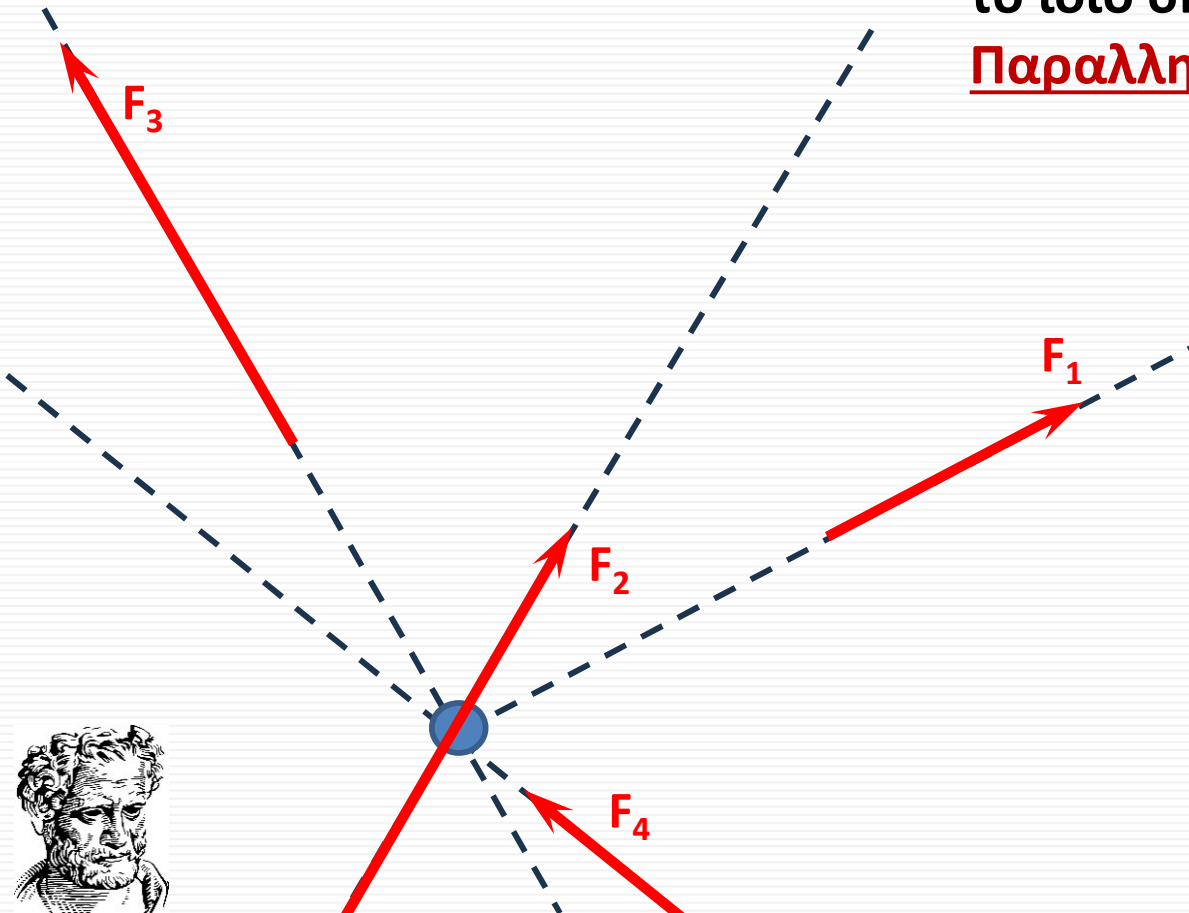
Ιδιότητες διανυσμάτων: Σύνθεση (γεωμετρία/τριγωνομετρία)

Έστω τέσσερα διανύσματα F_i , $i=1, 2, 3, 4$ οι άξονες των οποίων συντρέχουν σε μία θέση (π.χ. «υλικό σημείο» ενός σώματος). Η σύνθεση, δηλαδή η εύρεση του συνισταμένου F_{tot} (του μέτρου και της διεύθυνσής του) που προφανώς άγεται από το ίδιο σημείο μπορεί να γίνει με την Αρχή Παραλληλογράμμου (γραφική μέθοδος)

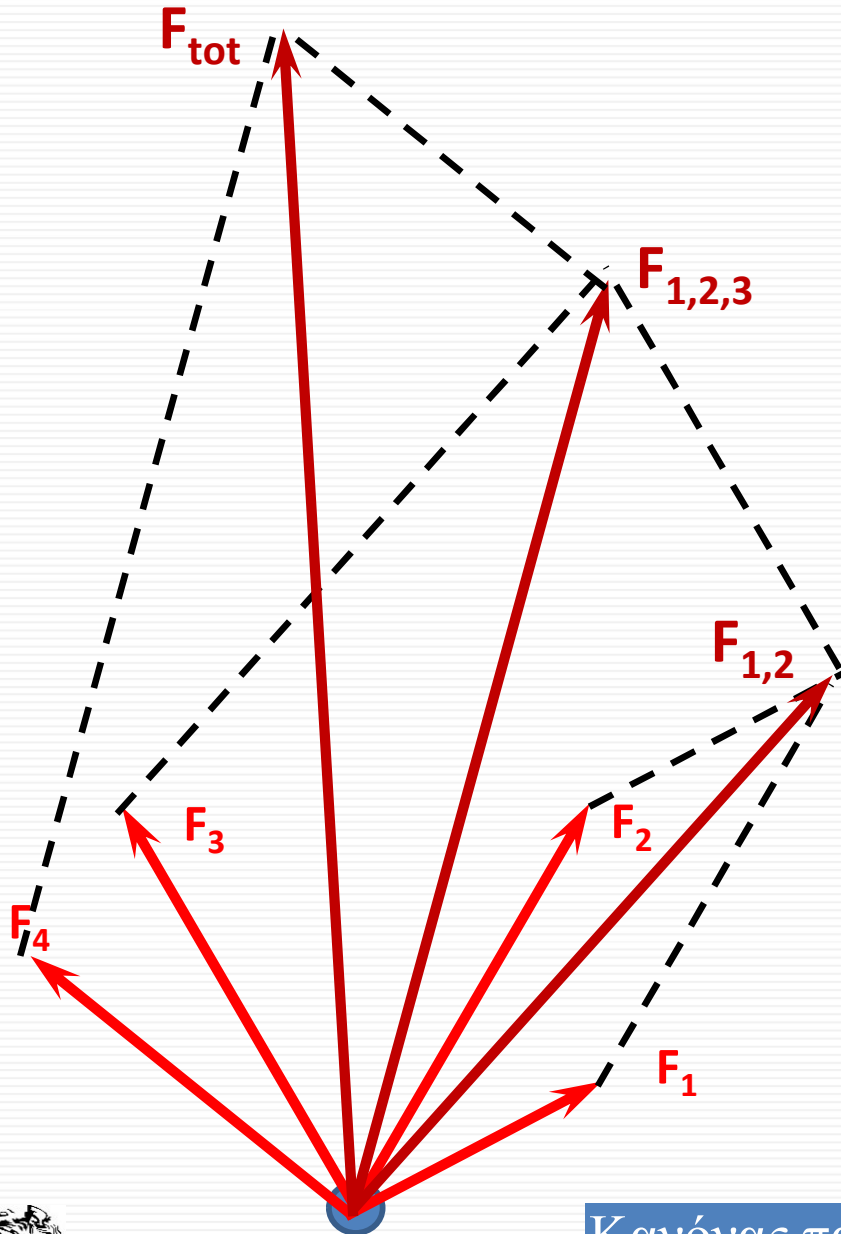


Ιδιότητες διανυσμάτων: Σύνθεση (γεωμετρία/τριγωνομετρία)

Έστω τέσσερα διανύσματα F_i , $i=1, 2, 3, 4$ οι άξονες των οποίων συντρέχουν σε μία θέση (π.χ. «υλικό σημείο» ενός σώματος). Η σύνθεση, δηλαδή η εύρεση του συνισταμένου F_{tot} (του μέτρου και της διεύθυνσής του) που προφανώς άγεται από το ίδιο σημείο μπορεί να γίνει με την Αρχή Παραλληλογράμμου (γραφική μέθοδος)



Ιδιότητες διανυσμάτων: Σύνθεση (γεωμετρία/τριγωνομετρία)



Έστω τέσσερα διανύσματα F_i , $i=1, 2, 3, 4$ οι άξονες των οποίων συντρέχουν σε μία θέση (π.χ. «υλικό σημείο» ενός σώματος). Η σύνθεση, δηλαδή η εύρεση του συνισταμένου F_{tot} (του μέτρου και της διεύθυνσής του) που προφανώς άγεται από το ίδιο σημείο μπορεί να γίνει με την Αρχή Παραλληλογράμμου (γραφική μέθοδος)

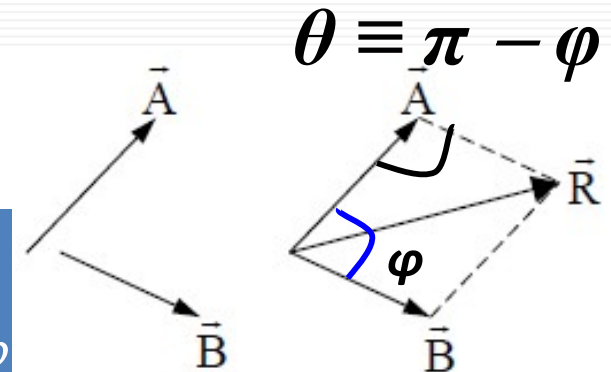
Συντίθενται αρχικά οι F_1 & $F_2 \rightarrow F_{1,2}$

Ακολουθώς οι $F_{1,2}$ & $F_3 \rightarrow F_{1,2,3}$

Τελικώς οι $F_{1,2,3}$ & $F_4 \rightarrow F_{\text{tot}}$

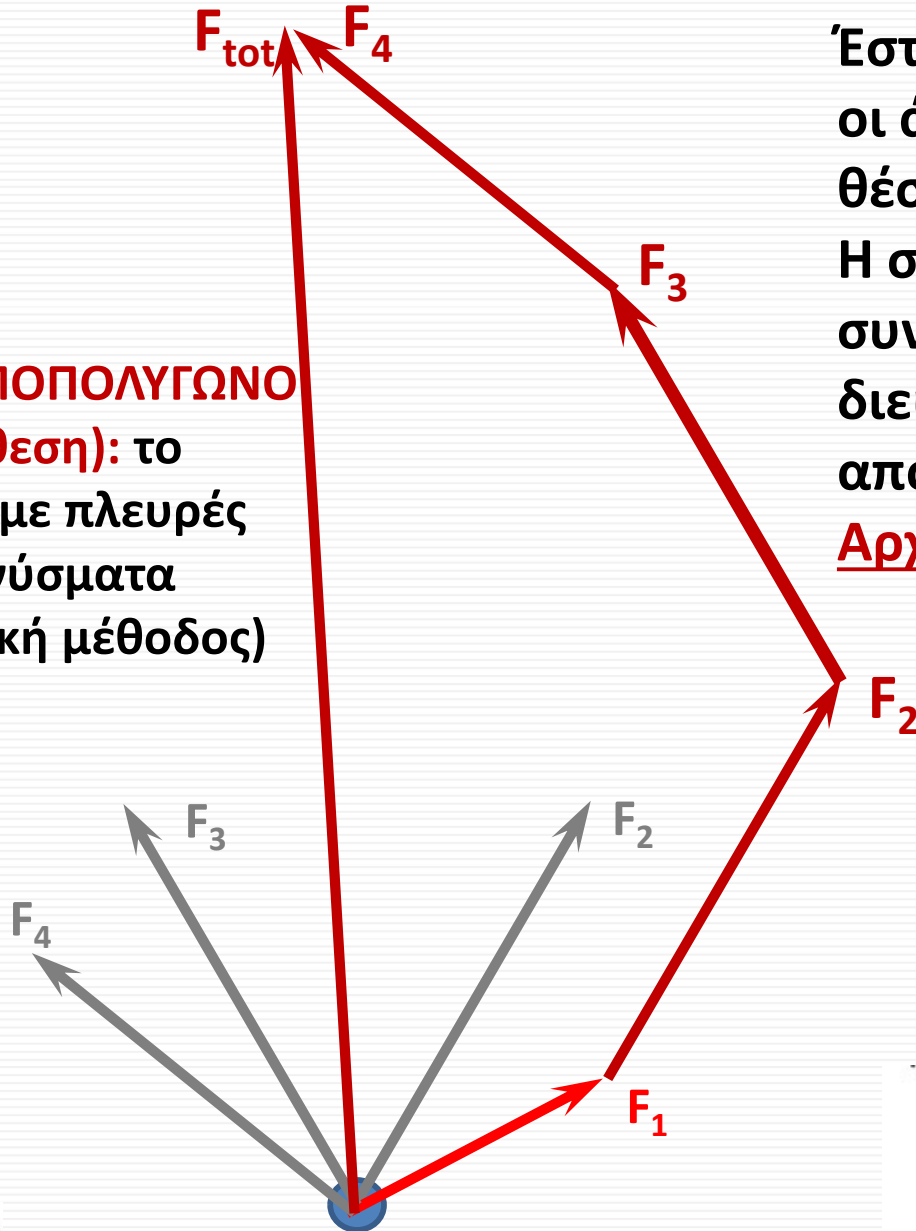
Κανόνας παραλληλογράμμου

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\varphi$$



Ιδιότητες διανυσμάτων: Σύνθεση (γεωμετρία/τριγωνομετρία)

ΔΥΝΑΜΟΠΟΛΥΓΩΝΟ
(παράθεση): το
σχήμα με πλευρές
τα διανύσματα
(γραφική μέθοδος)



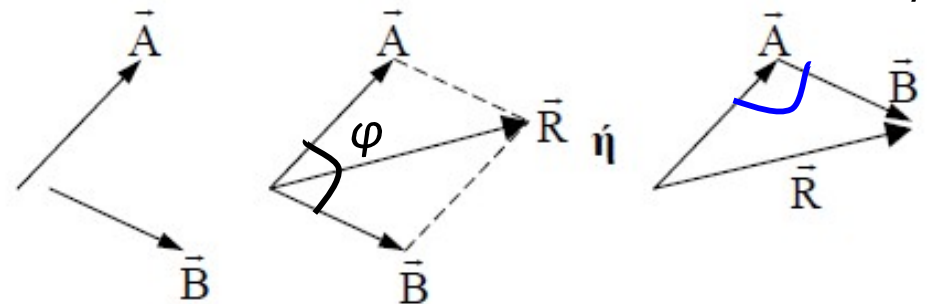
Έστω τέσσερα διανύσματα F_i , $i=1, 2, 3, 4$ οι άξονες των οποίων συντρέχουν σε μία θέση (π.χ. «υλικό σημείο» ενός σώματος). Η σύνθεση, δηλαδή η εύρεση του συνισταμένου F_{tot} (του μέτρου και της διεύθυνσής του) που προφανώς άγεται από το ίδιο σημείο μπορεί να γίνει με την Αρχή παράθεσης (γραφική μέθοδος)

Νόμος των συνημίτονων

Κανόνας παράθεσης

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta$$

$$\theta \equiv \pi - \varphi$$



Ιδιότητες διανυσμάτων: Σύνθεση

Εάν τα διανύσματα δίδονται σε ΟΝ σύστημα συντεταγμένων τότε:

$$\vec{F}_1 = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j}$$

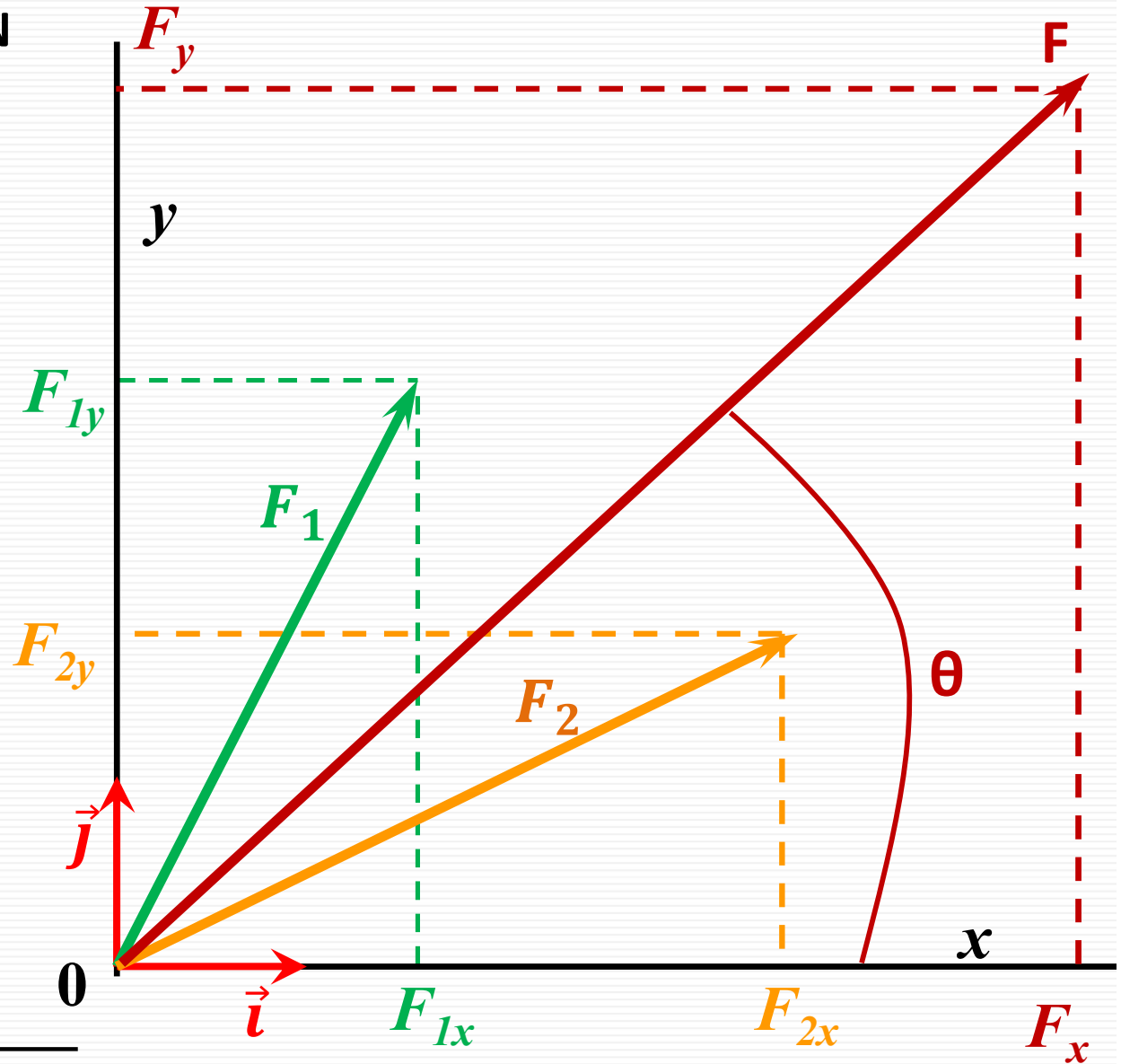
Το μέτρο/μήκος των διανυσμάτων κατά x, y : αλγεβρικό άθροισμα

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$$

$$F_x = F_{1x} + F_{2x}$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y}$$

Το μέτρο/μήκος τότε: $|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$
Η διεύθυνση: $\tan\theta = F_y/F_x = (F_{1y} + F_{2y})/(F_{1x} + F_{2x})$



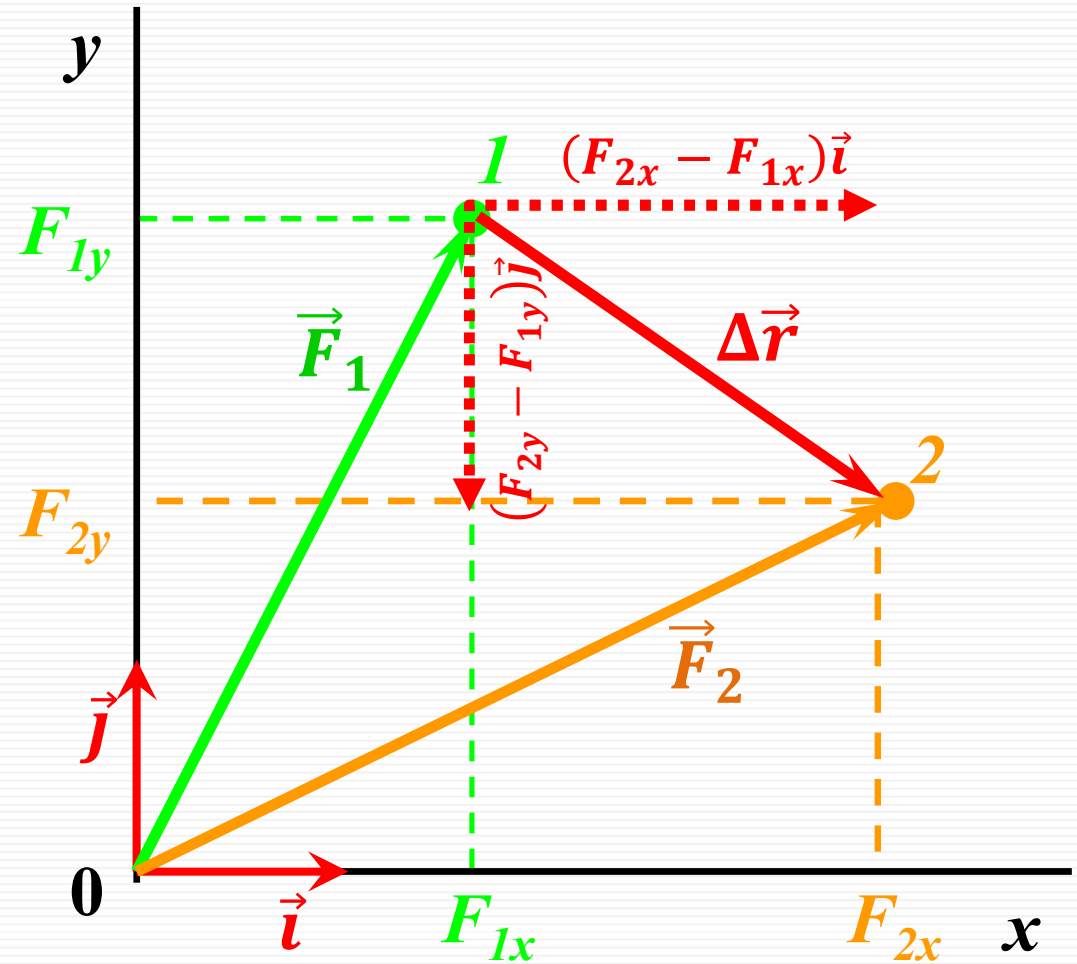
$$\vec{F}_1 = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j}$$

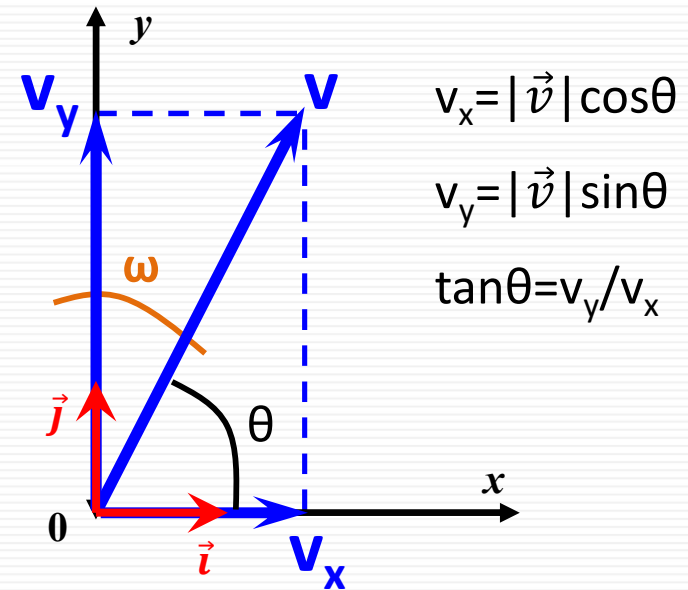
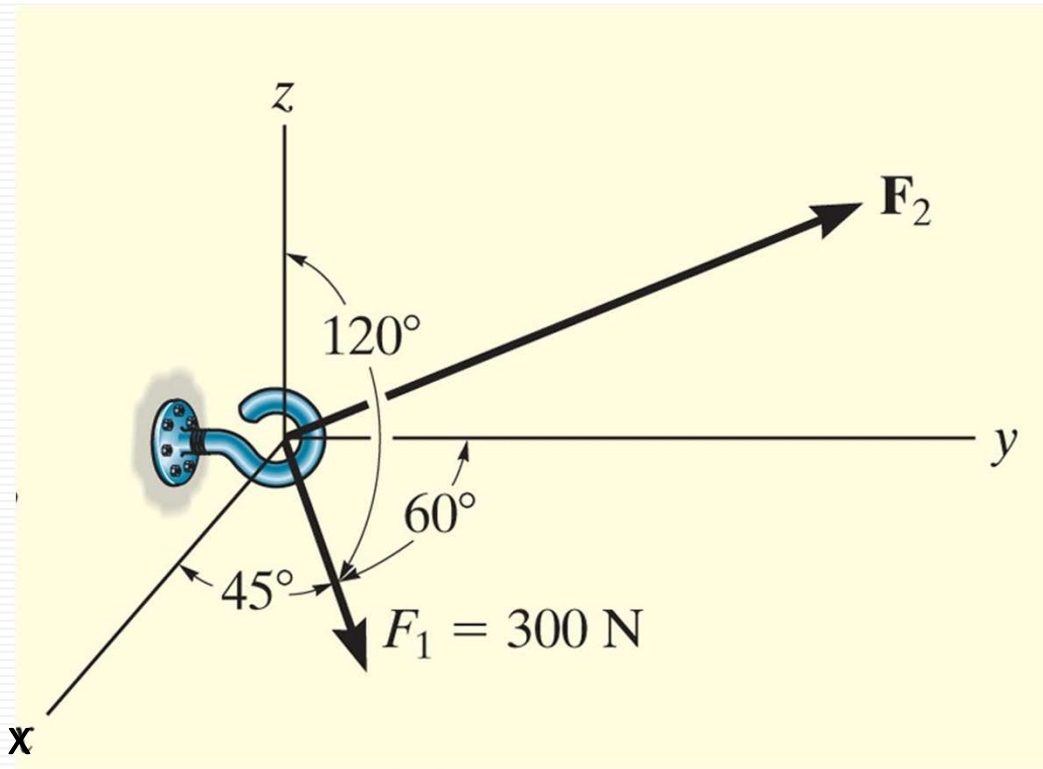
Αφαίρεση διανυσμάτων

$$\vec{\Delta F} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{\Delta F} = \vec{F}_2$$

$$\vec{\Delta F} = (F_{2x} - F_{1x})\vec{i} + (F_{2y} - F_{1y})\vec{j}$$



Συνημίτονα κατεύθυνσης διανύσματος ως προς άξονα



$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

$$\vec{v} = |\vec{v}| \cos \theta \vec{i} + |\vec{v}| \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{v} = |\vec{v}| \cos \theta \vec{i} + |\vec{v}| \cos \omega \vec{j}$$

$$\cos \theta = v_x / |\vec{v}|$$

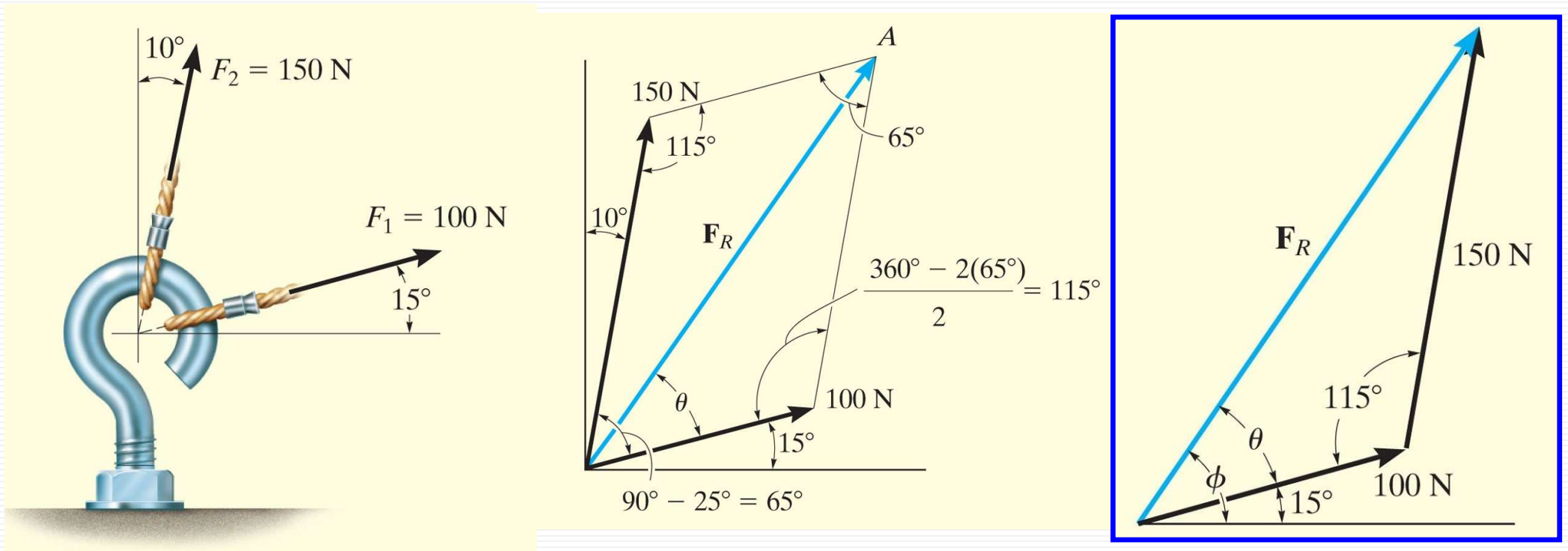
$$\cos \omega = v_y / |\vec{v}|$$

$$\vec{F_1} = ;$$

$$\vec{F_1} = 300(\text{N}) \cos 45^\circ \vec{i} + 300(\text{N}) \cos 60^\circ \vec{j} + 300(\text{N}) \cos 120^\circ \vec{k}$$

Σύνθεση Δυνάμεων στο Επίπεδο

Ζητούμενο το μέτρο και η διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης $\mathbf{F}_R$ ως προς τον άξονα της $\mathbf{F}_1$ και ως προς τον οριζόντιο άξονα



Κανόνας παραλληλογράμμου:
αναγκαία η μεταξύ των $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ γωνία

Κανόνας παραλληλογράμμου

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\varphi$$

Π.χ. 65°

Κανόνας παράθεσης: αναγκαία η
παραπληρωματική της μεταξύ
των $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ γωνία

Κανόνας παράθεσης

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta$$

Π.χ. 115°

Σύνθεση Δυνάμεων στο Επίπεδο

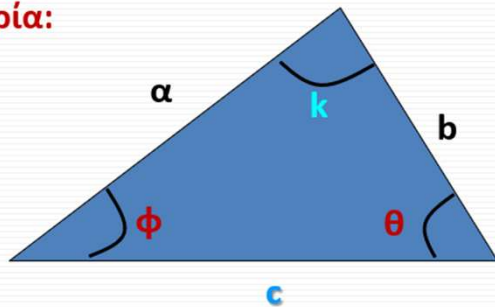
Ζητούμενο το μέτρο και η διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης F_R ως προς τον άξονα της F_1 και ως προς τον οριζόντιο άξονα

$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{(100 \text{ N})^2 + (150 \text{ N})^2 - 2(100 \text{ N})(150 \text{ N}) \cos 115^\circ} \\ &= \sqrt{10\,000 + 22\,500 - 30\,000(-0.4226)} = 212.6 \text{ N} \\ &= 213 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\frac{150 \text{ N}}{\sin \theta} = \frac{212.6 \text{ N}}{\sin 115^\circ}$$

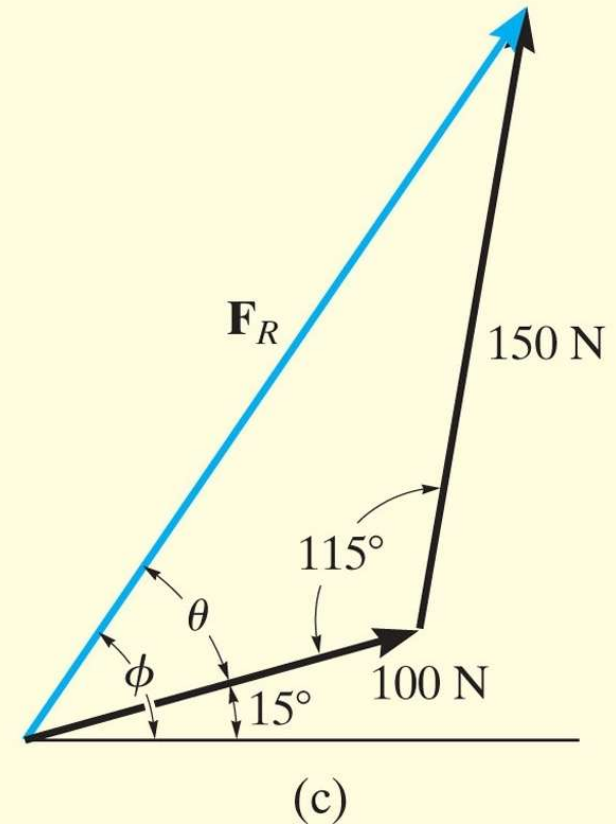
$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{150 \text{ N}}{212.6 \text{ N}} (\sin 115^\circ) \\ \theta &= 39.8^\circ \end{aligned}$$

Από τριγωνομετρία:

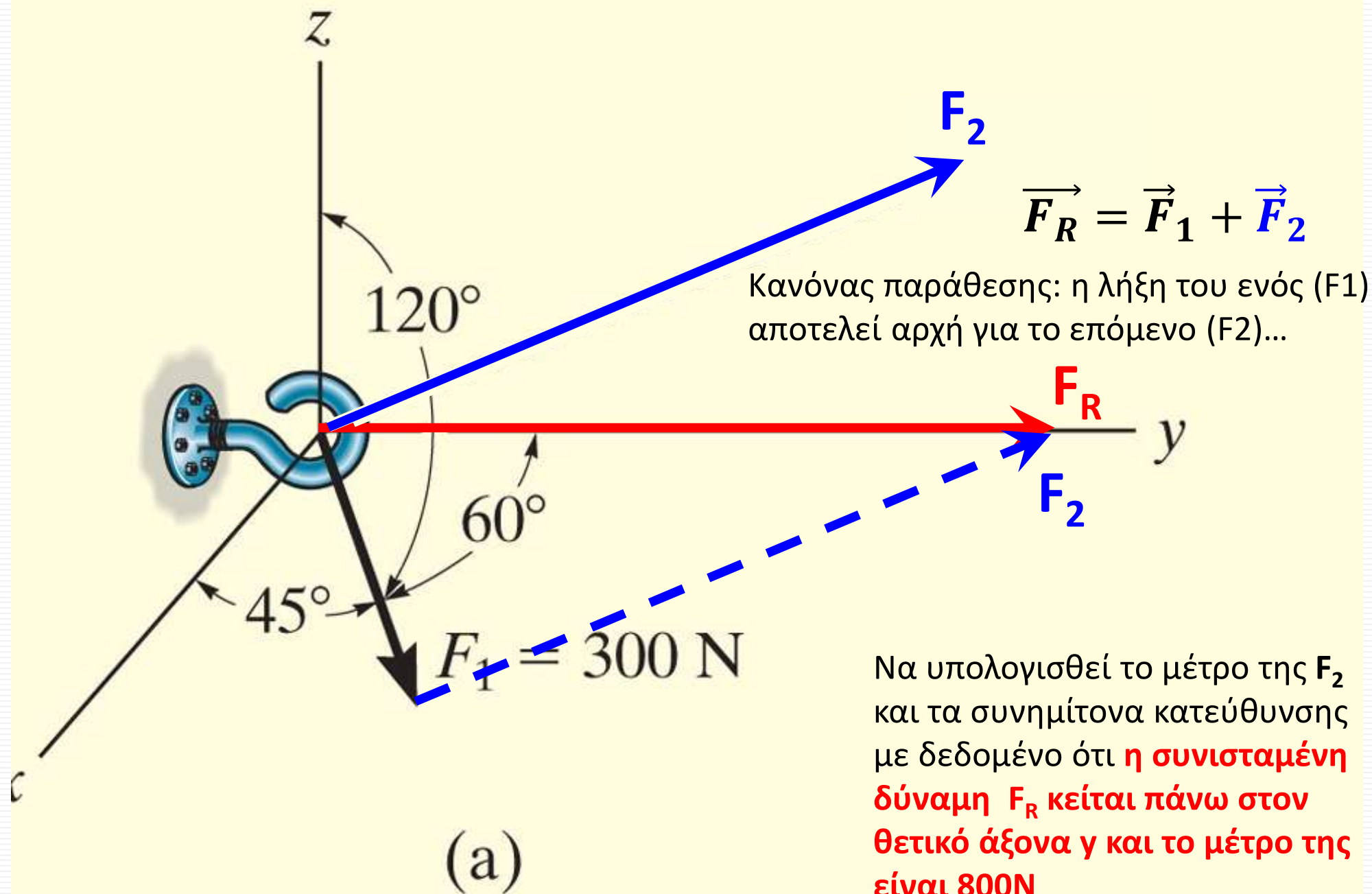


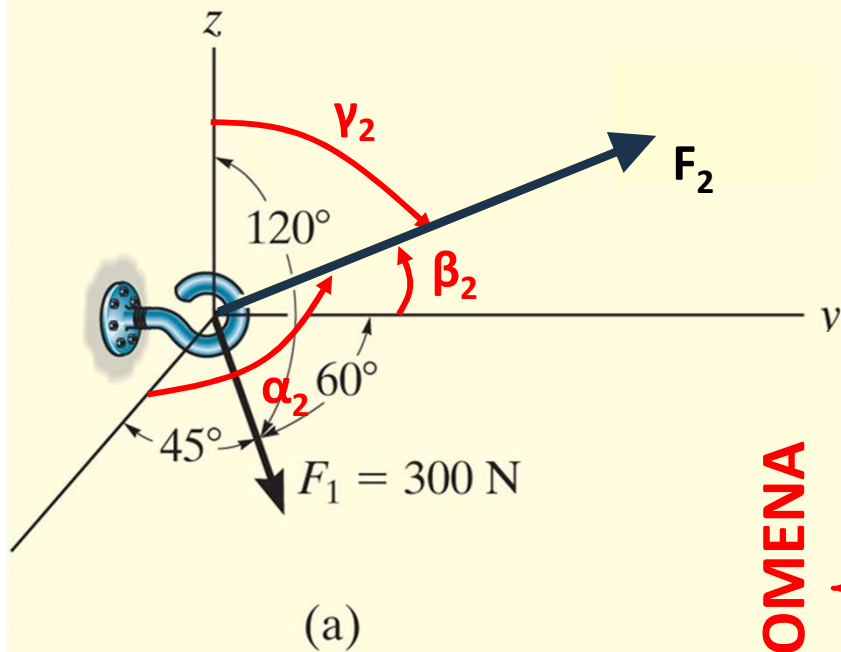
Νόμος των συνημίτων: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos k$

Νόμος των ημιτόνων: $\frac{\sin \phi}{b} = \frac{\sin k}{c} = \frac{\sin \theta}{a}$



$$\phi = 39.8^\circ + 15.0^\circ = 54.8^\circ$$





Να υπολογισθεί το μέτρο της $\mathbf{F}_2$ και τα συνημίτονα κατεύθυνσης με δεδομένο ότι η συνισταμένη δύναμη $\mathbf{F}_R$ κείται πάνω στον θετικό άξονα y και το μέτρο της είναι 800N

ΔΕΔΟΜΕΝΑ

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= F_1 \cos \alpha_1 \mathbf{i} + F_1 \cos \beta_1 \mathbf{j} + F_1 \cos \gamma_1 \mathbf{k} \\ &= 300 \cos 45^\circ \mathbf{i} + 300 \cos 60^\circ \mathbf{j} + 300 \cos 120^\circ \mathbf{k} \\ &= \{212.1\mathbf{i} + 150\mathbf{j} - 150\mathbf{k}\} \text{ N}\end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_2 = F_{2x} \mathbf{i} + F_{2y} \mathbf{j} + F_{2z} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_R = (800 \text{ N})(+\mathbf{j}) = \{800\mathbf{j}\} \text{ N}$$

ΕΞΑΓΩΜΕΝΑ - ΛΥΣΗ

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$(0\mathbf{i} + 800\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \rightarrow 800\mathbf{j} = (212.1 + F_{2x})\mathbf{i} + (150 + F_{2y})\mathbf{j} + (-150 + F_{2z})\mathbf{k}$$

$$0 = 212.1 + F_{2x} \quad F_{2x} = -212.1 \text{ N}$$

$$800 = 150 + F_{2y} \quad F_{2y} = 650 \text{ N}$$

$$0 = -150 + F_{2z} \quad F_{2z} = 150 \text{ N}$$

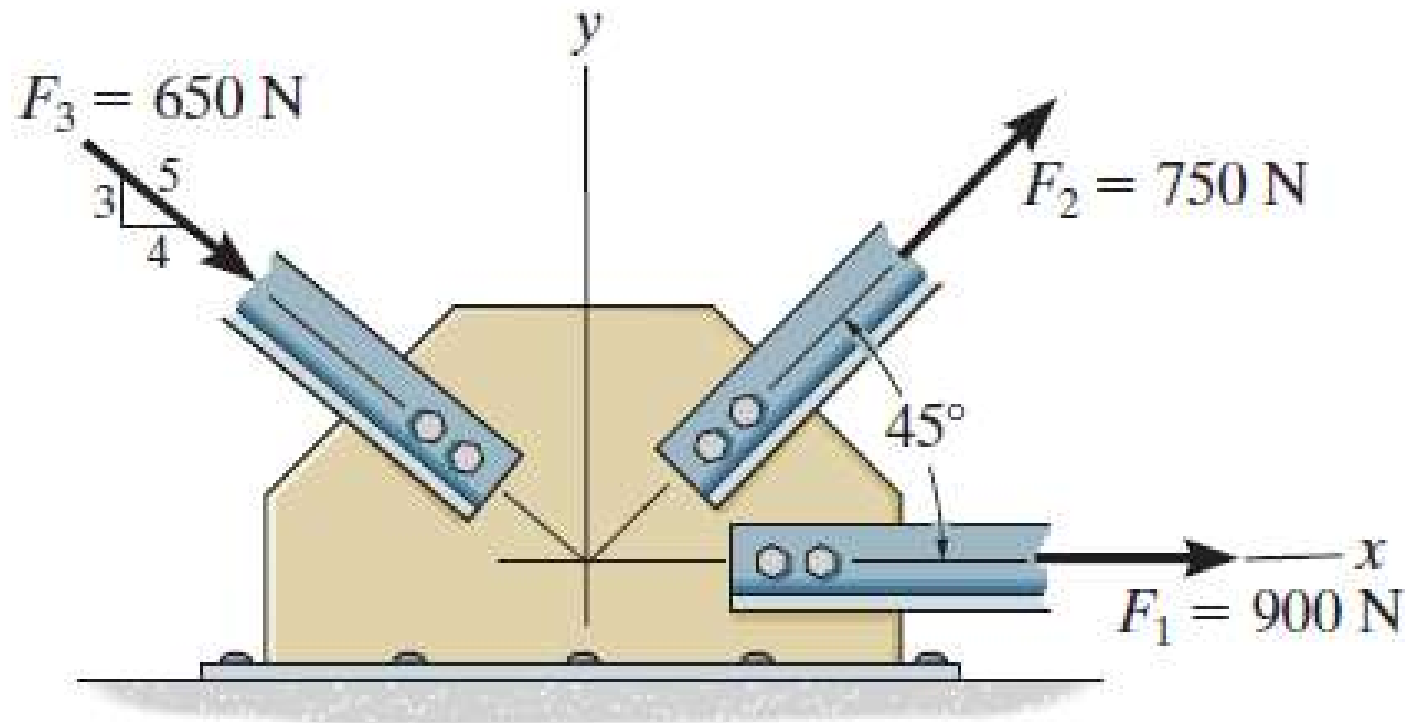
$$\begin{aligned}F_2 &= \sqrt{(-212.1 \text{ N})^2 + (650 \text{ N})^2 + (150 \text{ N})^2} \\ &= 700 \text{ N}\end{aligned}$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{-212.1}{700}; \quad \alpha_2 = 108^\circ$$

$$\cos \beta_2 = \frac{650}{700}; \quad \beta_2 = 21.8^\circ$$

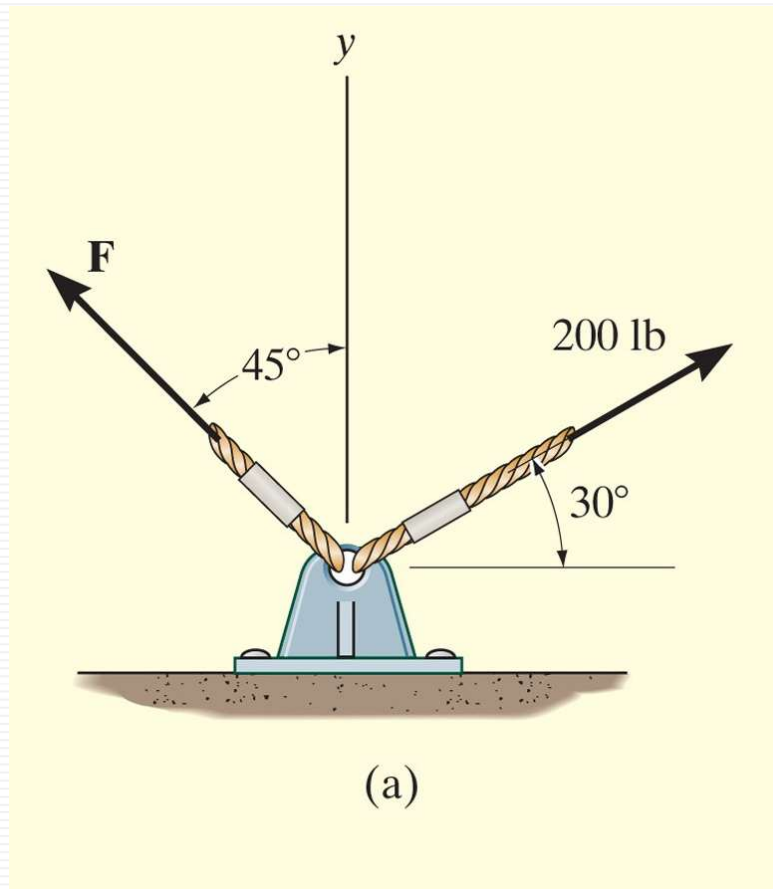
$$\cos \gamma_2 = \frac{150}{700}; \quad \gamma_2 = 77.6^\circ$$

Ασκήσεις για την τάξη



Να βρεθούν οι διανυσματικές εκφράσεις των δυνάμεων του σχήματος.
Ακολούθως να υπολογισθεί το μέτρο της συνισταμένης και η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα των x

Ασκήσεις για το σπίτι



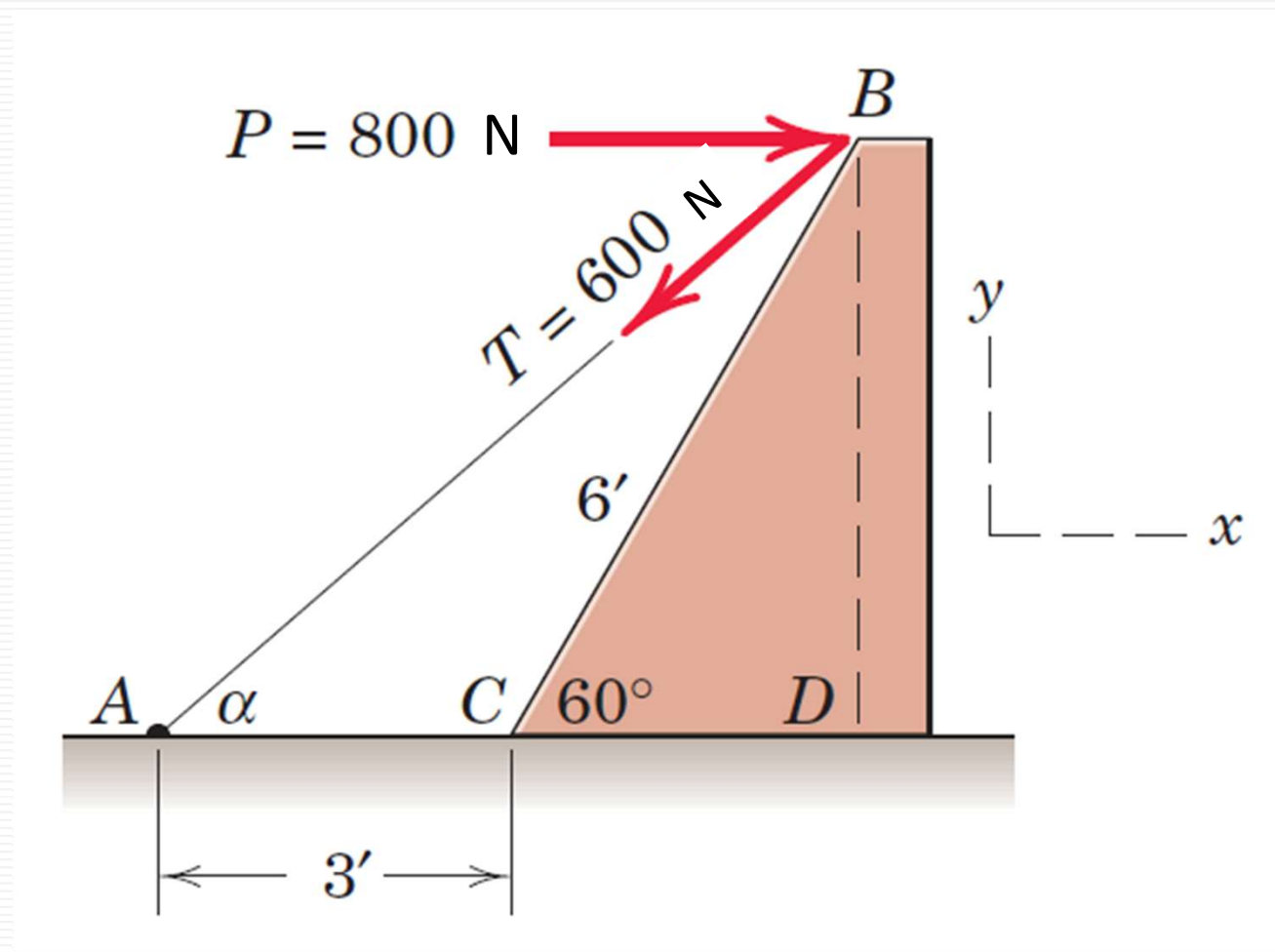
Να υπολογισθεί η F και η F_R
Η F_R κείται επί του άξονα y
Εφαρμόστε αλγεβρική και
γραφική λύση

Άσκηση Τρίτης

να βρεθεί η συνισταμένη δύναμη

A) γραφικά (με μέθοδο παραλληλογράμμου και μέθοδο παράθεσης)

B) αλγεβρικά



Άσκηση από:
(ελεύθερο βιβλίο στο διαδίκτυο)