

ΤΕΧΝΗΤΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ – ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΤΜΗΜΑ Π.Μ.
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ Σ.Ε.Π.Μ.

Λάζαρος Ηλιάδης Καθηγητής ΔΠΘ

Email: liliadis@civil.duth.gr



ΑΣΑΦΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕΛΟΥΣ
ΑΣΑΦΕΙΣ ΣΥΖΕΥΞΕΙΣ T-NORMS

Fuzzy

Logic



ΛΕΚΤΙΚΑ LINGUISTICS ΑΣΑΦΗΣ ΛΟΓΙΚΗ

Η Ασαφής Λογική (Fuzzy Logic) στοχεύει στην μοντελοποίηση της φυσικής-καθομιλουμένης γλώσσας και της κοινής λογικής για την παράσταση γνώσεων και πληροφοριών.

Παριστάνει:

- ✓ ΕΝΝΟΙΕΣ του ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΟΣΜΟΥ!!
- ✓ Γνώσεις και πληροφορίες, σε περιβάλλον ασάφειας και αβεβαιότητας.
- ✓ Αποτελεί τη γενίκευση της κλασσικής λογικής, κατά την οποία μία έννοια μπορεί να κατέχει ένα βαθμό αλήθειας οπουδήποτε ανάμεσα στο 0 και το 1.
- ✓ Η αναπαράσταση λεκτικών όρων από ασαφή σύνολα, αποτελεί την γέφυρα επικοινωνίας ανάμεσα στον άνθρωπο και την μηχανή.

◆ Fuzzy Logic

- Θεωρία Συνόλων

✓ Κλασικά Σύνολα (Crisp Sets)

- ❖ Ένα κλασικό σύνολο αποτελείται από ένα πεπερασμένο ή άπειρο αριθμό στοιχείων και μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:
- ❖ Αν τα στοιχεία a_i ($i=1, \dots, n$) του A είναι ένα υποσύνολο του υπερσυνόλου αναφοράς X , το σύνολο A μπορεί να αναπαρασταθεί από όλα τα στοιχεία $x \in X$ από τη χαρακτηριστική συνάρτηση:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in X \\ 0 & \text{αλλιως} \end{cases}$$

- ❖ Στην κλασική θεωρία των συνόλων το $\mu_A(x)$ έχει μόνο τις τιμές 0 ("false") και 1 ("true") που είναι οι τιμές της αλήθειας.

✓ Ασαφή Σύνολα (Fuzzy Sets)

- ❖ Ο Zadeh το 1965, παρουσίασε τη θεωρία των ασαφών συνόλων (fuzzy set theory), σύμφωνα με την οποία μια τιμή μπορεί να ανήκει ταυτόχρονα σε πολλά υποσύνολα, στο κάθε ένα με ένα βαθμό μέλους.
- ❖ Είναι οποιοδήποτε σύνολο το οποίο επιτρέπει τα μέλη του να έχουν διαφορετικούς βαθμούς μέλους στο διάστημα $[0,1]$.
- ❖ Κάθε στοιχείο x του πραγματικού κόσμου X ανήκει σε ένα ασαφές σύνολο S ως προς κάποιο πραγματικό αριθμό $\mu_S(x)$ που λέγεται βαθμός μέλους: $S = \{(x, \mu_S(x)) \mid \mu_S: X \rightarrow [0,1]: x \in X\}$

◆ Fuzzy Logic

- **Συναρτήσεις Βαθμού Μέλους** (Membership Functions)

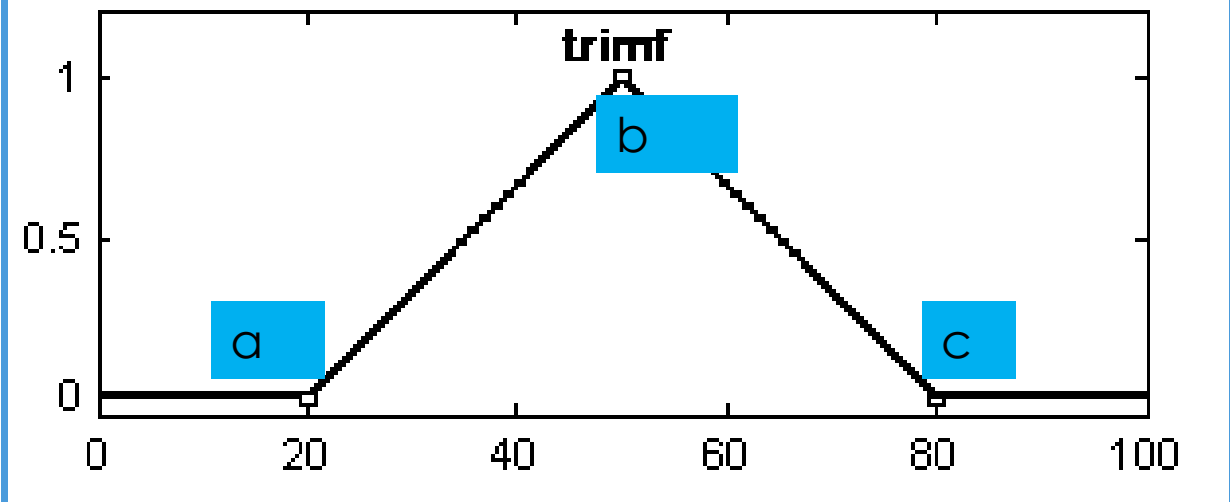
✓ Ορισμός

- ❖ Ορίζονται οι συναρτήσεις που υποδεικνύουν το βαθμό κατά τον οποίο το σύνολο x ανήκει στο σύνολο A .

✓ Τύποι

- ❖ Τριγωνική συνάρτηση μέλους (triangular mf)

$$f(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & c \leq x \end{cases}$$



Fuzzy Logic

- **Συναρτήσεις Βαθμού Μέλους** (Membership Functions)

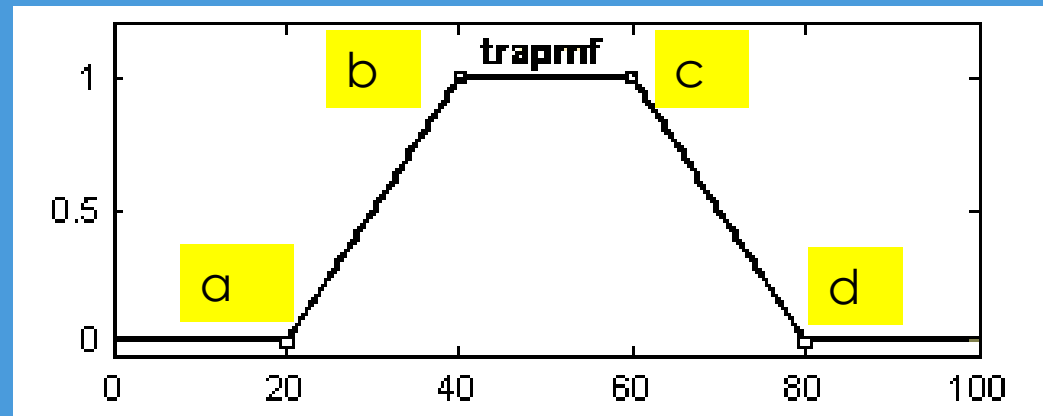
✓ Ορισμός

- ❖ Ορίζονται οι συναρτήσεις που υποδεικνύουν το βαθμό κατά τον οποίο το σύνολο x ανήκει στο σύνολο A .

✓ Τύποι

- ❖ Τραπεζοειδής συνάρτηση μέλους (trapezoidal mf)

$$f(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & d \leq x \end{cases}$$



Fuzzy Logic

- **Συναρτήσεις Βαθμού Μέλους** (Membership Functions)

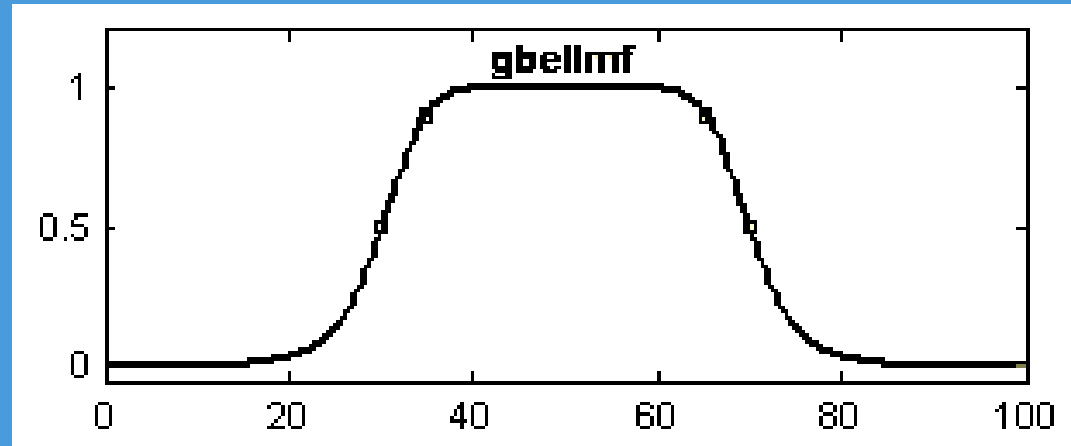
✓ Ορισμός

- ❖ Ορίζονται οι συναρτήσεις που υποδεικνύουν το βαθμό κατά τον οποίο το σύνολο x ανήκει στο σύνολο A .

✓ Τύποι

- ❖ Καμπανοειδής συνάρτηση μέλους (Bell Shaped mf)

$$bell(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x - c}{a} \right|^{2b}}$$



Fuzzy Logic

- **Συναρτήσεις Βαθμού Μέλους** (Membership Functions)

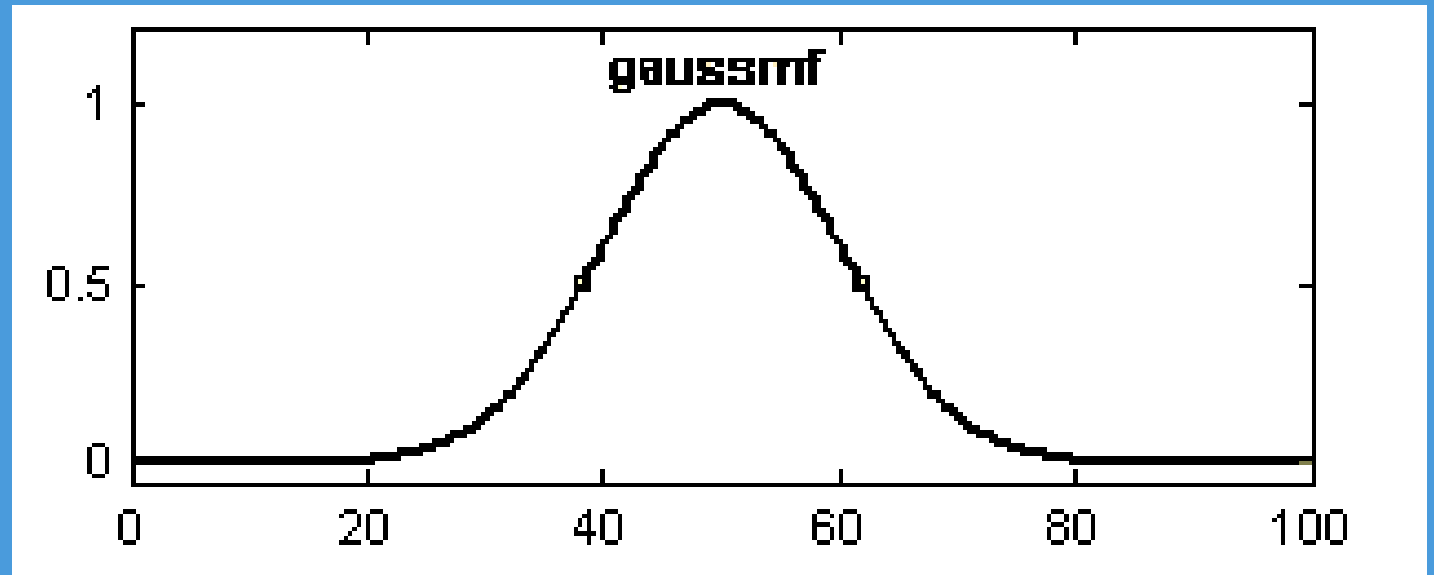
✓ Ορισμός

- ❖ Ορίζονται οι συναρτήσεις που υποδεικνύουν το βαθμό κατά τον οποίο το σύνολο x ανήκει στο σύνολο A .

✓ Τύποι

- ❖ Gaussian συνάρτηση μέλους (mf)

$$gaussian(x; \sigma, c) = e^{-\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$



Fuzzy Logic

- Συναρτήσεις Βαθμού Μέλους (Membership Functions)

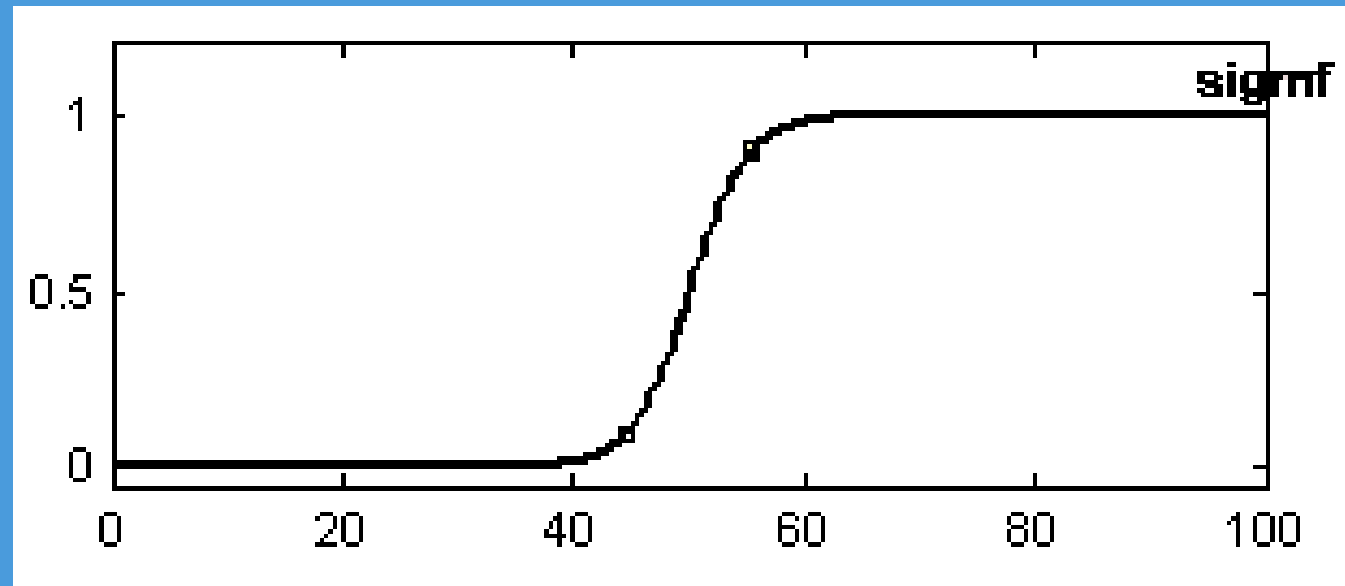
✓ Ορισμός

- ❖ Ορίζονται οι συναρτήσεις που υποδεικνύουν το βαθμό κατά τον οποίο το σύνολο x ανήκει στο σύνολο A .

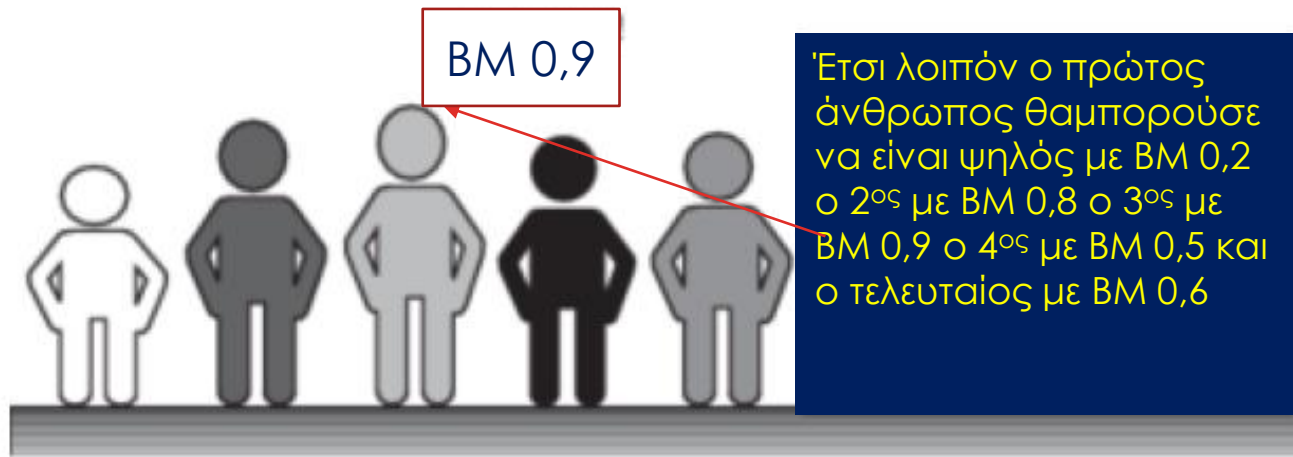
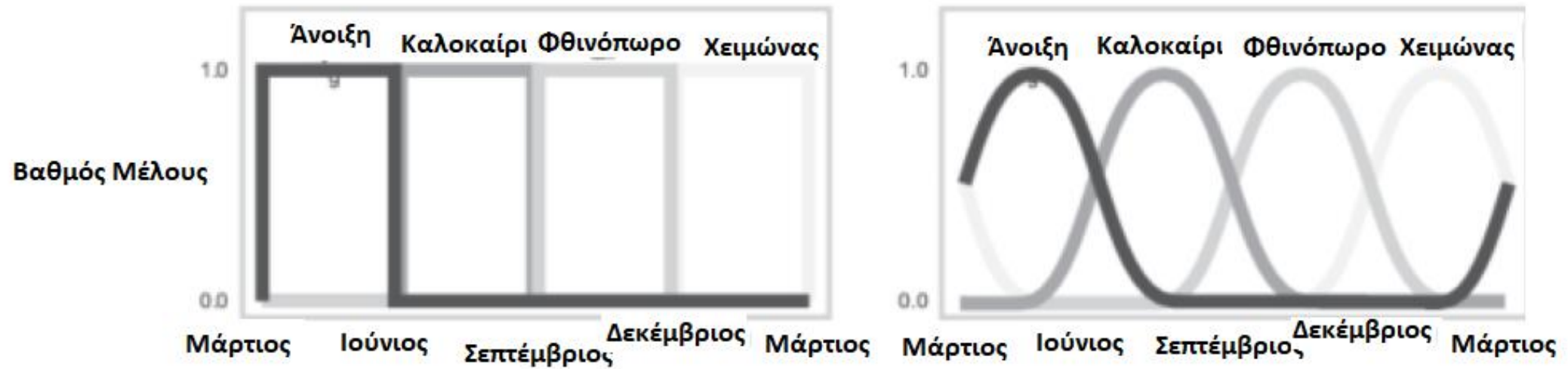
✓ Τύποι

- ❖ Sigmoid Συγμοειδής συνάρτηση μέλους (mf)

$$\text{sigmoid}(x; a, c) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΝΝΟΙΩΝ ΤΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΟΣΜΟΥ



FUZZY T-NORMS

Τα T-Norms είναι οι πράξεις Ασαφούς Σύζευξης 2 Ασαφών Συνόλων A και B
Αν λοιπόν α είναι ο βαθμός μέλους στο Ασαφές Σύνοιο A και b ο βαθμός μέλους στο Ασαφές Σύνοιο B τότε η Tmin T-Norm υπολογίζει τον Βαθμό Μέλους στο Ασαφές Σύνοιο A ΚΑΙ B.

Minimum t-norm $T_{\min}(a, b) = \min\{a, b\}$, γνωστό σαν Gödel t-norm,

Ετσι αν έχω το ασαφές σύνοιο A που αντιστοιχεί στο Λεκτικό Νέος άνθρωπος και ο Φίλιππος ανήκει στο Ασαφές σύνοιο A με βαθμό μέλους $a=0,7$ και στο Ασαφές Σύνοιο B έξυπνος άνθρωπος με βαθμό μέλους $b=0,5$, τότε ο Φίλιππος ανήκει στην ένωση των 2 συνόλων δηλαδή στο Ασαφές Σύνοιο ΝΕΟΣ ΚΑΙ ΕΞΥΠΝΟΣ άνθρωπος με βαθμό Μέλους 0,5 που είναι η ελάχιστη τιμή

FUZZY T-NORMS

- **Product t-norm** $\top_{\text{prod}}(a, b) = a \cdot b$
- **Lukasiewicz t-norm** $\top_{\text{Luk}}(a, b) = \max\{0, a + b - 1\}$.

- **Drastic t-norm**

$$\top_{\text{D}}(a, b) = \begin{cases} b & \text{if } a = 1 \\ a & \text{if } b = 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Πολύ} \\ \text{σημαντικό!} \end{array}$$

- **Nilpotent minimum**

$$\top_{\text{nM}}(a, b) = \begin{cases} \min(a, b) & \text{if } a + b > 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- **Hamacher product**

$$\top_{\text{H}_0}(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{if } a = b = 0 \\ \frac{ab}{a+b-ab} & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

FUZZY T-NORMS

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(x)}{2 - [\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(x)]}$$

Γινόμενο *Einstein*

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = e^{-\left[\left(-\ln \mu_{\tilde{A}} \right)^r + \left(-\ln \mu_{\tilde{B}} \right)^r \right]^{\frac{1}{r}}} \text{ όπου } r > 0$$

Προσέγγιση του *Aczel-Alsina*

Υπάρχουν και πολλές
ακόμα πράξεις T-Norms
και S-Norms στο βιβλίο
μου αν σας ενδιαφέρει

Υπάρχουν και οι πράξεις Ασαφούς Διάζευξης S-Norms που εκτελούν την λογική πράξη Η
Πχ Κόκκινη Ντομάτα Ή Σάπια Ντομάτα ... Περισσότερα στο βιβλίο μου