

Μια εισαγωγή στη βελτιστοποίηση

Επιμέλεια: Δρ Μ. Σπηλιώτης
Επίκουρος Καθηγητής Δ.Π.Θ.

Βελτιστοποίηση χωρίς
περιορισμούς

Βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς

- Κλειδί (σε πλειάδα εφαρμογών): Θεώρημα **TAYLOR**
- Χρήση θεωρήματος Taylor σε προβλήματα εξισώσεων
- Στη βελτιστοποίηση, οι εξισώσεις προκύπτουν από την συνθήκη ακροτάτου για μηδενική τιμή της παραγώγου

-
- Έστω ένα πρόβλημα **εξίσωσης** (εύρεσης ρίζας),

$$\mathbf{f(x) = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x_0 + \Delta x) = 0 \text{ (εξίσωση)} \\ f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x = 0$$

$$\Rightarrow \Delta x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow X_{\text{ρεβ}} = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)}$$



Εύρεση X , και σφαλμάτων όταν

$$\frac{f(X_0)}{f'(X_0)} \rightarrow 0.$$

Η παραπάνω μέθοδος χρησιμοποιεί σαν
Εύρεση μη γραμμικών εξισώσεων,
ή για πολλές μεταβλητές στην εύρεση
συναρτήσεων μη γραμμικών εξισώσεων.

Επέκταση της μεθόδου Newton σε προβλήματα βελτιστοποίησης (χωρίς περιορισμούς)

5.2.5 Αναζήτηση με τη μέθοδο Newton

Η θεωρητική βάση των μεθόδων Newton προκύπτει από την ανάπτυξη της συνάρτησης σε σειρά Taylor διατηρώντας τους όρους μέχρι δεύτερης τάξης:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_k} (x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_k} (x_{k+1} - x_k)^2 + \dots$$

στην περιοχή του στάσιμου σημείου (πιθανό ακρότατο) $f(x_{k+1}) \cong f(x_k) \Rightarrow$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_k} (x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_k} (x_{k+1} - x_k)^2 = 0 \Rightarrow \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_k} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_k} (x_{k+1} - x_k) = 0$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k - 2 \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_k} / \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_k} \Rightarrow x_{k+1} = x_k - 2 \left(\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_k} \right)^{-1} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_k}$$

Είναι προφανές ότι για την εφαρμογή της μεθόδου αναζήτησης Newton απαιτούνται οι παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης της συνάρτησης, πράγμα που περιορίζει την χρήση της όταν ο υπολογισμός των παραγώγων αυτών είναι δύσκολος. Ένα άλλο πρόβλημα είναι ότι μπορεί να παρατηρηθεί συνεχής εναλλαγή μεταξύ δύο τιμών με αποτέλεσμα τη μη σύγκλιση ή τη πολύ αργή σύγκλιση. Αυτό μπορεί να θεραπευτεί με την εφαρμογή ενός συντελεστή βήματος.

Η μέθοδος Newton μπορεί να εφαρμοστεί
για την βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς:

$$X_{k+1} = X_k - \frac{f'(X_k)}{f''(X_k)}$$

συντελεστής 2,
αποαριθμω

Κριτήριο αλγκόριθμου: $|X_{k-1} - X_k| \leq \epsilon$.

(Δηλαδή αντί της εξίσωσης $f(x) = 0$ (Μεθοδος μέθόδων Newton-Raphson)
επιδιώκει το πρόβλημα $f'(x) = 0$)

↓ συνάρτηση πολλών μεταβλητών

$$x_{k+1} = x_k - \underbrace{[\nabla^2 f(x_k)]^{-1}}_{\text{"}d_k\text{"}} \cdot \nabla f(x_k)$$

σταθμισμένη διαφορά

~~συντελεστής~~

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \cdot \nabla f(x_k),$$

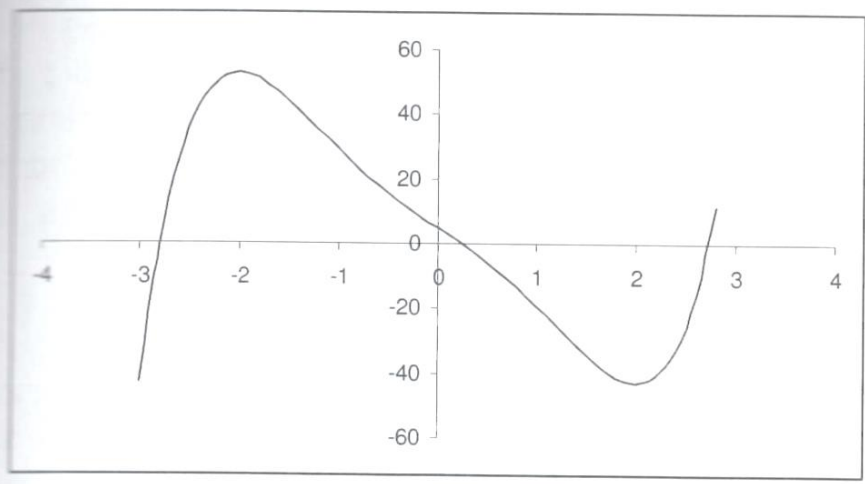
$\gamma_k \geq 0$ να ελαχιστοποιεί τη

$f(x_k + \gamma_k d_k)$ ως προς γ_k , ως ελαχιστοποίηση

Παράδειγμα 5.6

Προσδιορίζονται τα ακρότατα της συνάρτησης του Παραδείγματος 5.6 με τη μέθοδο αναζήτησης Newton.

$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 - 20$ έχει τις πραγματικές λύσεις $x = 2$ και $x = -2$
 για $x = 2$ $f'(x) > 0 \Rightarrow$ τοπικό ελάχιστο $f(2) = -43$
 για $x = -2$ $f'(x) < 0 \Rightarrow$ τοπικό μέγιστο $f(-2) = 53$

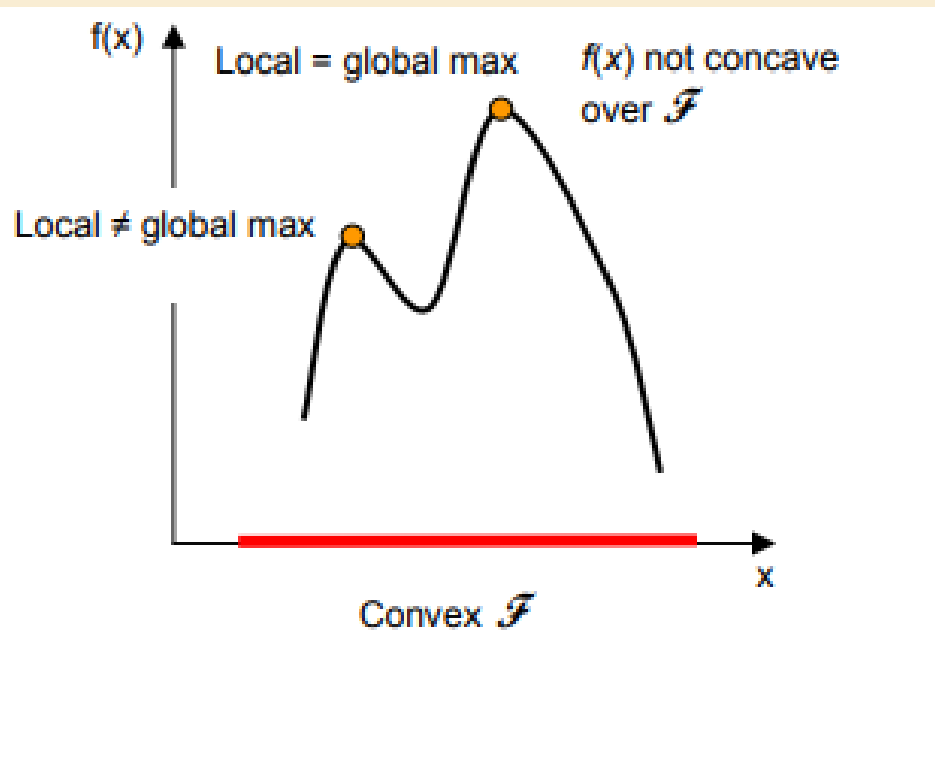


Σχήμα 5.3. Γράφημα της συνάρτησης του Παραδείγματος 5.6

Η μέθοδος Newton γράφεται $x_{k+1} = x_k - 2(5x_k^4 - 15x_k^2 - 20)/(20x_k^3 - 30x_k)$

| | | | | | | | | | | |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--|-------|--|-------|
| x_k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | 100 | | 200 |
| x_{k+1} | -5 | -2.68 | -1.82 | -2.26 | -1.85 | -2.22 | | -1.95 | | -1.96 |
| $f(x_k)$ | -2395 | 17.03 | 51.64 | 48.97 | 51.93 | 50.24 | | 52.88 | | 52.93 |
| $f(x_{k+1})$ | -2.68 | -1.82 | -2.26 | -1.85 | -2.22 | -1.86 | | -2.06 | | -2.04 |

Τοπικά και ολικά ακρότατα



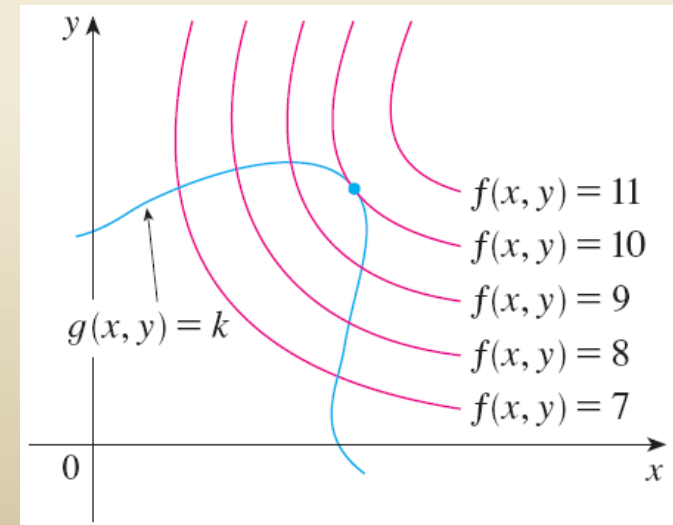
Πρόβλημα παγίδευσης σε τοπικά ακρότατα

Ακρότατα υπό περιορισμούς ισότητας
(στην κόψη του ξυραφιού)

Ακρότατα υπό περιορισμούς ισότητας (στην κόψη του ξυραφιού)

- Μέθοδοι ποινής (αριθμητική επίλυση → βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς)
- Πολλαπλασιαστές Lagrange

Π.χ. Για δύο μεταβλητές,
ζητείται μέγιστη $f(x, y)$ υπό
τους περιορισμούς
 $g(x, y) = k$



Μέθοδοι ποινής :

Πρόβλημα :

$$\left. \begin{array}{l} \min f(x) \\ x \in X, g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m \end{array} \right\}$$

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης ως απροσρίκτο



πρόβλημα βελτιστοποίησης χωρίς (απροσρίκτο) με
χρήση των συναρτήσεων ποινής :

$$\min f(x) + r_k \sum_{i=1}^m [g_i^+(x)]^2$$

$r_k \geq 0$ ↗ ποινή

~~$f(x)$~~

$$r_k g^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \leq 1 \\ x-1 & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

$g(x) = x-1 \leq 0$ ↗

Πολλαπλασιαστές Lagrange

Ακρότατο υπό συνθήκη (ισοτιμία)

$$f(x, y, z) = \text{ακρότατο} \rightarrow$$
$$g(x, y, z) = 0, \text{ με συνεχή κέρμια παραγώγους.}$$

Τότε αρκεί να βρούμε τη τιμή x, y, z, λ που ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g(x, y, z) = 0$$

όπου $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} = \text{κλίση}$

Άρα:

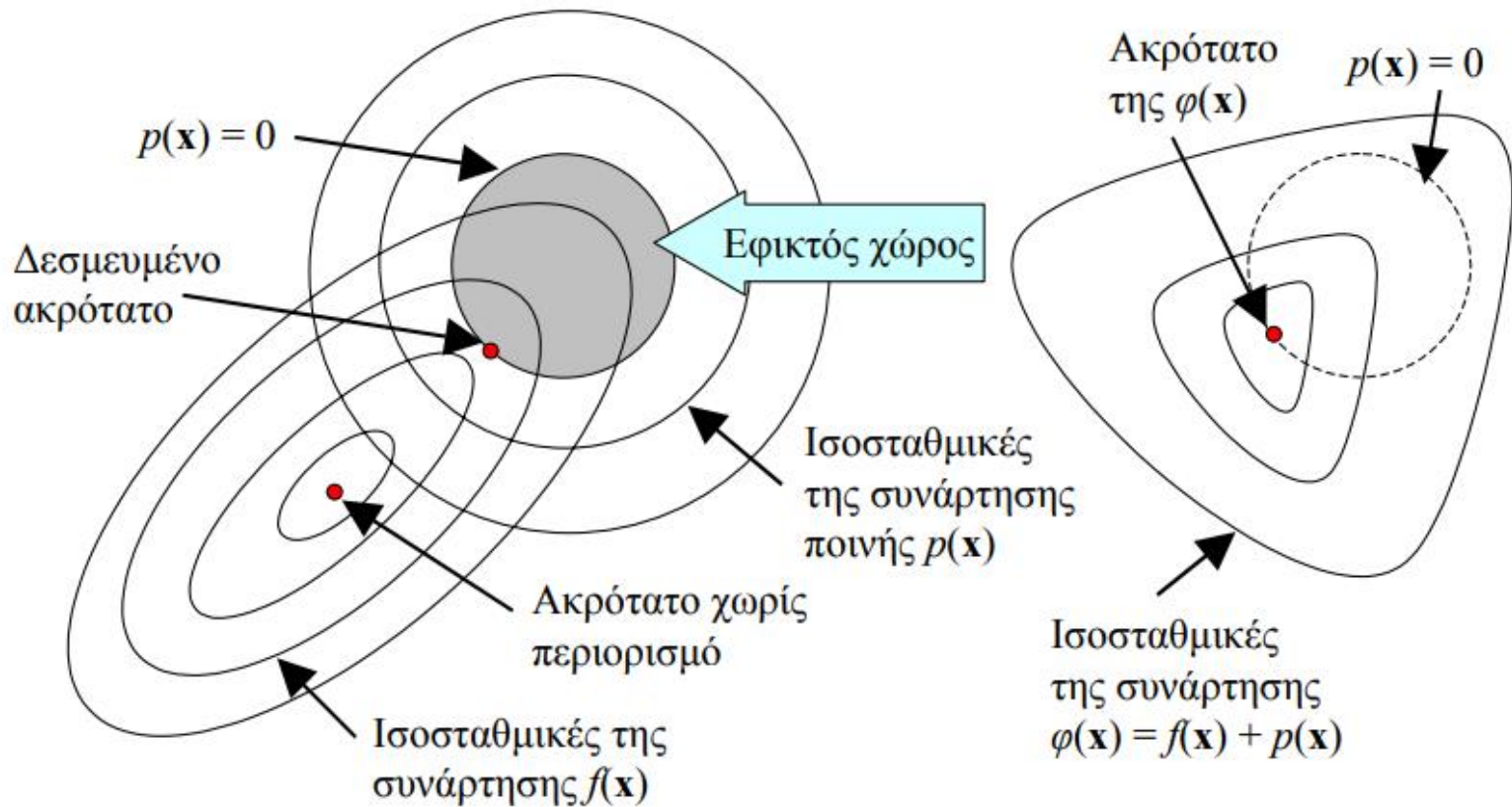
$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial A}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial (\Pi - \lambda A)}{\partial x_i} = 0$$

$\forall i$, ανεξάρτητο σχήματος

Το ακρότατο ανήκει στη f και f και g **μόλις** να εφάπτονται

Μαθηματικώς, η επίλυση τελειώνει με το κριτήριο δευτέρου παραγώγου

Γεωμετρική ερμηνεία συναρτήσεων ποινής



Η προσθήκη όρων ποινής στην προς βελτιστοποίηση συνάρτηση αλλοιώνει την μορφή της επιφάνειας απόκρισης, δημιουργώντας ένα νέο εφικτό χώρο που ταυτίζεται με το R^n .

Προβληματική

- Μέγιστη υδραυλική ακτίνα για δεδομένη επιφάνεια → Ελάχιστη βρεχόμενη περίμετρος για δεδομένη επιφάνεια
- Πρόβλημα ελαχιστοποίησης υπό συνθήκη ισότητας → πολλαπλασιαστής Lagrange
- Έτοιμοι πίνακες
- Ανάλυση ομοιόμορφης ροής
- Είναι η οικονομικά βέλτιστη (στην πραγματικότητα) η υδραυλική βέλτιστη διατομή τι κάνουμε στην πράξη?

Υδραυλικά βέλτιστη διατομή

Ακρότατα υπό συνθήκη

Ανα βέλτιστη υφαιδια διαταξη της διαταξης.

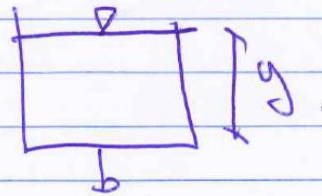
$$\left. \begin{array}{l} P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \min \\ A(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1, \dots, x_n \\ \text{περιμετρος} \\ \text{ακροτητες} \end{array}$$

\Rightarrow Q. Lagrange, βελτιστοποίηση με
περιμετρους ισότητας

Ορθογωνική διατομή

160 Χρησμός λ

Ορθογωνικό σχήμα:



Παράμετροι σχήματος: b, y .

$$\frac{\partial(\Pi - \lambda A)}{\partial b} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(b + 2y - \lambda by)}{\partial b} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \lambda y = 0 \Rightarrow \left(\lambda = \frac{1}{y} \right) ?$$

Ορθογωνική διατομή (2)

Όμοια:

$$\frac{\partial(\Pi - \lambda A)}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2 - \lambda b = 0 \Rightarrow \left(\lambda = \frac{2}{b} \right) \quad = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 2y}$$

$$\text{Τότε: } A = 2y^2, \quad \Pi = 4y, \quad Fr = \left(\frac{Q^2}{4gy^5} \right)^{1/2}$$

Ορθογωνική διατομή + Manning

τότε έχουμε για την ορθογωνική
ομοιόμορφη ροή προσδιορίσω το βάθος
ροής χωρίς δοκιμές !!

$$Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{n} 2y^2 \left(\frac{2y^2}{4y} \right)^{2/3} S_0^{1/2}$$

$$\Rightarrow y = \left[\left(\frac{1}{2^{1/3}} \right) \left(\frac{nQ}{S_0^{1/2}} \right) \right]^{3/8}$$

Βάθος ομοιόμορφη ροή

υδραυλική βέλτιστη διατομή (κόη)

ορθ/κη διατομή

Πίνακας 4-1: Γεωμετρικά στοιχεία βέλτιστων διατομών

| Διατομή | b/y_0 | z | E_0 | Π_0 | R_0 | B_0 | y_μ | Fr_0 |
|--------------|----------------------|----------------------|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------|-----------------------------------|
| Τραπεζοειδής | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}y_0^2$ | $2\sqrt{3}y_0$ | $\frac{1}{2}y_0$ | $\frac{4}{\sqrt{3}}y_0$ | $\frac{3}{4}y_0$ | $\sqrt{\frac{12Q^2}{27gy_0^5}}$ |
| Ορθογωνική | 2 | 0 | $2y_0^2$ | $4y_0$ | $\frac{1}{2}y_0$ | $2y_0$ | y_0 | $\sqrt{\frac{Q^2}{4gy_0^5}}$ |
| Τριγωνική | -- | 1 | y_0^2 | $2\sqrt{2}y_0$ | $\frac{\sqrt{2}}{4}y_0$ | $2y_0$ | $\frac{1}{2}y_0$ | $\sqrt{\frac{2Q^2}{gy_0^5}}$ |
| Ημικυκλική | -- | -- | $\frac{\pi}{2}y_0^2$ | πy_0 | $\frac{1}{2}y_0$ | $2y_0$ | $\frac{\pi}{4}y_0$ | $\sqrt{\frac{512Q^2}{\pi^3gd^5}}$ |
| Παραβολική | -- | -- | $\frac{4\sqrt{2}}{3}y_0^2$ | $\frac{8\sqrt{2}}{3}y_0$ | $\frac{1}{2}y_0$ | $2\sqrt{2}y_0$ | $\frac{2}{3}y_0$ | |

Υδραυλικά βέλτιστη διατομή+ Manning

(α) για συμμετρική βέλτιστη τραπεζοειδή διατομή:

$$y_0 = \left(\left(\frac{2^{2/3}}{3^{1/2}} \right) \left(\frac{nQ}{S_0^{1/2}} \right) \right)^{3/8}$$

(β) για βέλτιστη ορθογωνική διατομή:

$$y_0 = \left(\left(\frac{1}{2^{1/3}} \right) \left(\frac{nQ}{S_0^{1/2}} \right) \right)^{3/8}$$

(γ) για συμμετρική βέλτιστη τριγωνική διατομή:

$$y_0 = \left(2 \left(\frac{nQ}{S_0^{1/2}} \right) \right)^{3/8}$$

(δ) για βέλτιστη ημικυκλική διατομή:

$$y_0 = \left(\left(\frac{2^{5/3}}{\pi} \right) \left(\frac{nQ}{S_0^{1/2}} \right) \right)^{3/8}$$

(ε) για βέλτιστη παραβολική διατομή:

$$y_0 = \left(\left(\frac{3}{2^{11/6}} \right) \left(\frac{nQ}{S_0^{1/2}} \right) \right)^{3/8}$$

Οι εξισώσεις αυτές ισχύουν
μόνο για ομοιόμορφη ροή ΣΕ
ΥΔΡΑΥΛΙΚΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΔΙΑΤΟΜΗ
(MONO)

MONO σε αυτή την περίπτωση
δεν απαιτούνται δοκιμές για
την εύρεση του βάθους ροής
για δεδομένη παροχή

Τσακίρης και Παπαθανασιάδης,
2010

Είναι η οικονομικά βέλτιστη (στην πραγματικότητα) η υδραυλική βέλτιστη διατομή τι κάνουμε στην πράξη?

Είναι η οικονομικά βέλτιστη (στην πραγματικότητα) η υδραυλική βέλτιστη διατομή τι κάνουμε στην πράξη?

- Η υδραυλική βέλτιστη διατομή αναφέρεται σε σταθερό κόστος και εξασφαλίζει τη μέγιστη διοχετευτικότητα. Επίσης το ελάχιστο υλικό επένδυσης της διώρυγας.
- Δεν εξασφαλίζει όμως και την πιο οικονομική διατομή γιατί δεν λαμβάνονται υπόψη οι εκσκαφές (που εξαρτάται από το πλάτος επιφάνειας της διώρυγας στο έδαφος) ενώ προκύπτουν κλίσεις πρανών που οδηγούν σε πιο δαπανηρά υλικά (Δημητρίου, 1995)

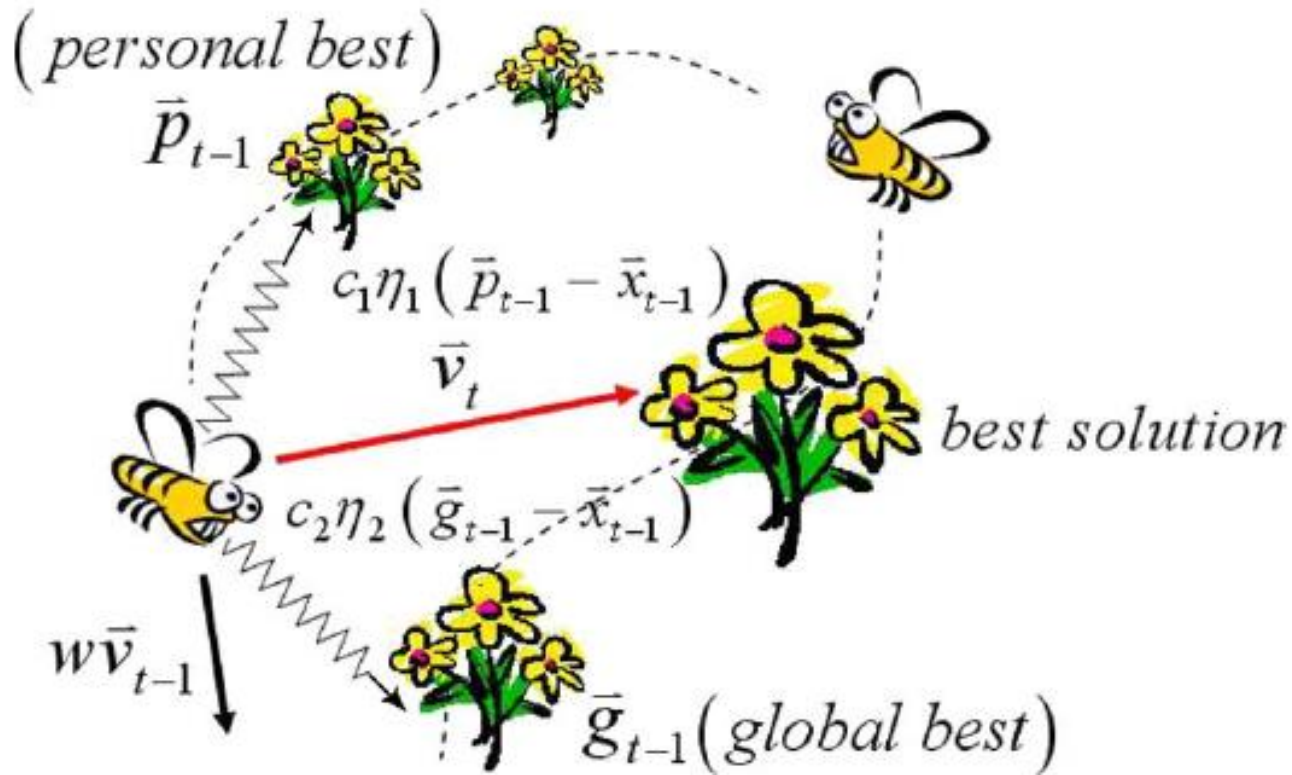
Ευρετικοί μέθοδοι
βελτιστοποίησης: SWARM

Βελτιστοποίηση με ευρετικούς αλγορίθμους

- Πλήθος σημείων (υποψήφια λύσεων)= μέλη σμήνους
- Ολικό μέγιστο (σμήνους)
- Τοπικό μέγιστο (σωματιδίου- μέλους του σμήνους)
- Εκμάθηση με βάση τα δύο ακρότατα και χρήση τυχαίων αριθμών για κάθε μέλος του σμήνους

Particle Swarm Optimization (PSO)





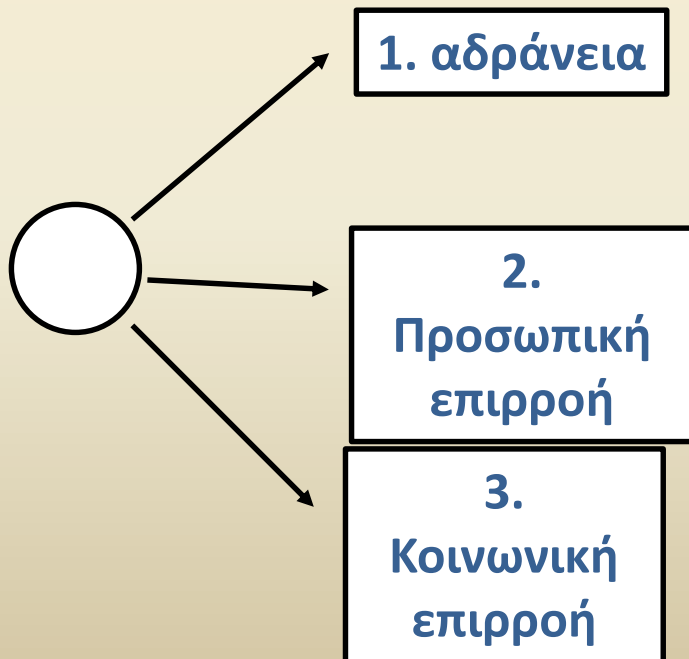
PSO

- Πληθυσμός πιθανών λύσεων (σμήνος)
- Χρήση τυχαίων αριθμών
- Εκμάθηση με βάση την απόκλιση από το ολικό βέλτιστο (σμήνους) και το βέλτιστο του σωματιδίου
- Χρήση της μεθόδου των Salehizadeh et al., 2009 για αποφυγή πρόωρης σύγκλισης

PSO: Algorithm

Ταχύτητα:

$$\mathbf{v}_i^{t+1} = \underbrace{\mathbf{v}_i^t}_{\text{inertia}} + \underbrace{c_1 \mathbf{U}_1^t (\mathbf{pb}_i^t - \mathbf{p}_i^t)}_{\text{personal influence}} + \underbrace{c_2 \mathbf{U}_2^t (\mathbf{gb}^t - \mathbf{p}_i^t)}_{\text{social influence}}$$



- Ίδια διεύθυνση με πριν
- Κινείται σε προηγούμενη κατεύθυνση αν είχε επιτευχτεί καλύτερη τιμή των βελτιώνει τη θέση του σμήνους
- Κάνει την κίνηση του σμήνους σταδιακά να συγκλίνει καλύτερη τ

Νέα θέση σμήνους

$$x_i^{t+1} = x_i^t + v_i^{t+1}$$

- Σταδιακή σύγκλιση
- Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων
- Κίνδυνος παγίδευσης σε τοπικό ακρότταο

Optimization of Hedging Rules for Reservoir Operation During Droughts Based on Particle Swarm Optimization

Mike Spiliotis¹ · Luis Mediero² · Luis Garrote²

Received: 4 November 2015 / Accepted: 7 March 2016
© Springer Science+Business Media Dordrecht 2016

Abstract This paper presents a methodology to achieve the identification of optimal hedging rules for operating reservoir systems, seeking to mitigate the drought impacts. The heuristic Particle Swarm Optimization (PSO) method is adopted as the optimization solver. This procedure establishes a two-phase method that combines PSO with the simulation of the water system, representing a system of reservoirs that are jointly operated to satisfy a set of demands with different priorities. The hedging rules are based on monthly storage levels that trigger restrictions on the demands. As model parameters, monthly rule activation thresholds and rationing factors were used for each type of demand. The optimization procedure minimizes an objective function that penalizes large deficits and assigns different weights to different demand types. Since the whole problem is quite complex, its dimensionality is reduced through: i) a set of candidate monthly activation thresholds are selected a priori associated to given risk conditions; and ii) the rationing factors are defined for every demand of each threshold throughout all months. In addition, an effort is made to avoid the trap in local optimums, whilst several other comments considering the application of the PSO method in the examined applications are provided. The procedure has been successfully applied to four water resource systems in Spain. From the application it can be seen that the deficits of

✉ Mike Spiliotis
m.spiliotis@gmail.com; mspiliot@ciqa.upm.es

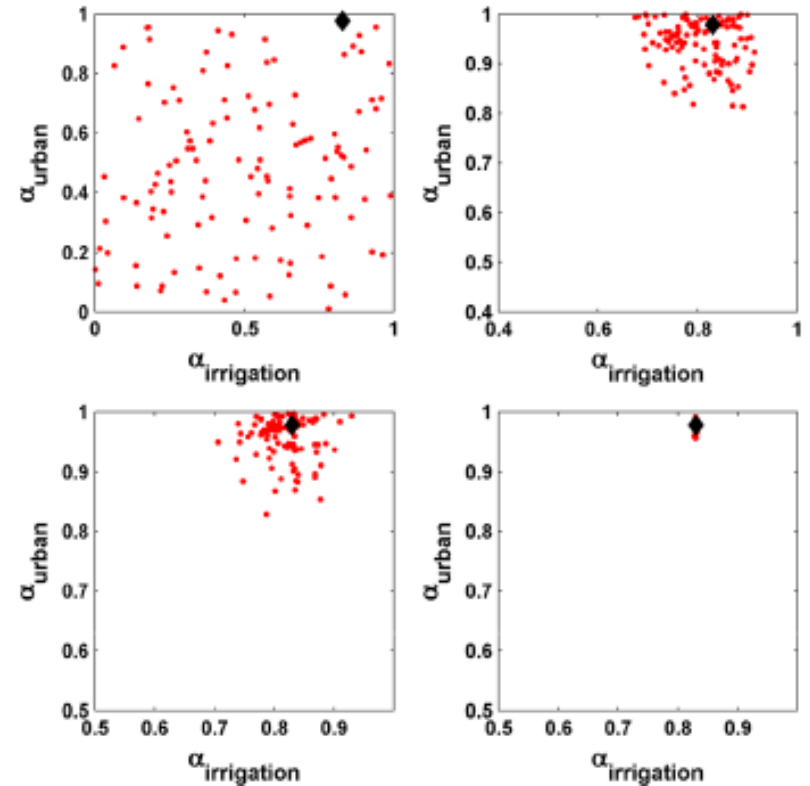
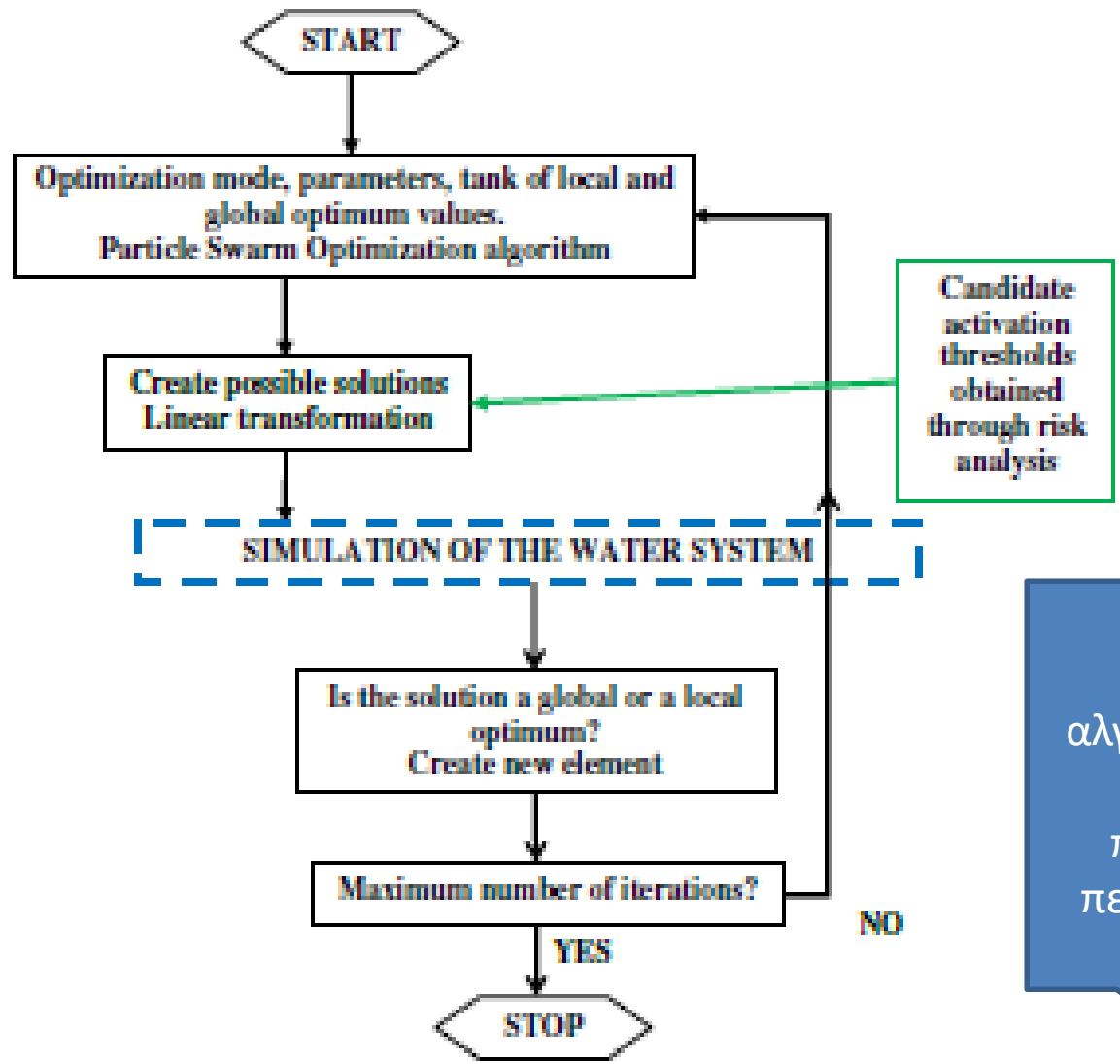


Fig. 6 Evolution of the partial optima (red points) and the global optimum (black diamond) for the modified PSO method in terms of the rationing factors of the irrigation ($\alpha_{irrigation}$) and urban supply (α_{urban}) demands in the case of the Tormes water system for the first operating rule. a Initial partial optima; b 100th partial optima; c 1000th partial optima; and d 1500th partial optima



Ευρετικοί αλγόριθμοι Δυνατότητα ενσωμάτωσης της προσομοίωσης όσο περίπλοκη και ας είναι

Fig. 2 Simplified scheme of the link among the water system simulation, the data of the risk analysis and the modified PSO optimization procedure