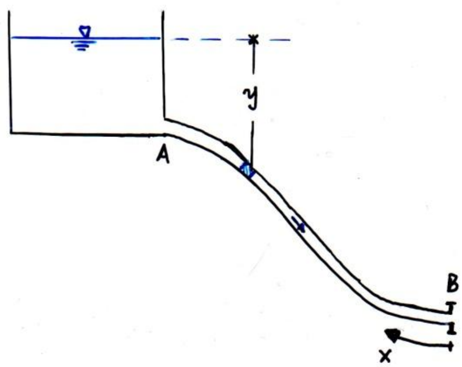
ΑΣΤΑΘΗΣ (ΜΗ ΜΟΝΙΜΗ) ΡΟΗ ΕΝΤΟΣ ΚΛΕΙΣΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ



Παραδοχές

(α) Αγωγός σταθεράς διατομής και πάχος τοιχωμάτων σταθερό

(β) Τέλειο ρευστό

(γ) Ομοιόμορφη κατανομή ταχυτήτων σε κάθε διατομή

(δ) Ομοιόμορφη κατανομή πιέσεων σε κάθε διατομή

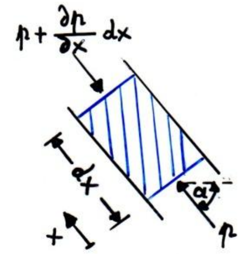
$$v = v(x,t) = -\frac{dx}{dt} \qquad p = p(x,t)$$

Αρχικές συνθήκες

για $t=0$ $\quad v = v_0 \quad p = p_0 = \rho g y$

Μελέτη φαινομένου

(1) Εφαρμογή της $F=m\gamma$



Διαφορά πιέσεων: $-\frac{\partial p}{\partial x}dx\,\pi r^2 = -\rho g \pi r^2 dx \frac{\partial y}{\partial x}$

Συνιστώσα του βάρους κατά τον άξονα x:

$$-\rho g \pi r^2 dx \sin a$$

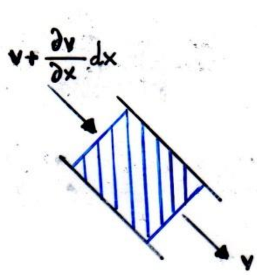
$$m\gamma = \rho \pi r^2 dx \left(-\frac{dv}{dt}\right)$$

$$-\rho g \pi r^2 dx \frac{\partial y}{\partial x} - \rho g \pi r^2 dx \sin a = \rho \pi r^2 dx \left(-\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} - v\frac{\partial v}{\partial x} \simeq \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x} + \sin a} \qquad (1)$$

(2) Συνθήκη συνέχειας



Συσσώρευση μάζας:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)\pi r^2 dt$$

Δύο τρόποι εκτόνωσης:

(α) συμπίεση ρευστού

(β) διαστολή αγωγού

(α) $$\frac{dV}{V} = \frac{dp}{p} = \frac{dp}{\varepsilon} \qquad \text{(Hooke)}$$

V: όγκος ρευστού

ε: μέτρο ελαστικότητας του ρευστού

$$dV_1 = \pi r^2 dx \frac{\partial p}{\partial t} dt \frac{1}{\varepsilon}$$ ⇒ συμπιεζόμενος όγκος λόγω συστολής του ρευστού

(β) Για γραμμική διαστολή του αγωγού

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{dr}{r} = \frac{1}{E} N \qquad \text{(νόμος του Hooke)}$$

N: τάση εφελκυσμού

E: μέτρο ελαστικότητας τοιχωμάτων αγωγού

$$N = \frac{D}{2e} dp \qquad \text{(για δακτύλιο που διαστέλλεται)}$$

D: διάμετρος

e: πάχος δακτυλίου

$$\frac{dr}{r} = \frac{1}{E} \frac{D}{2e} dp = \frac{1}{E} \frac{D}{2e} \frac{\partial p}{\partial t} dt \Rightarrow$$

$$dr = \frac{rD}{2eE} \frac{\partial p}{\partial t} dt$$

$$dV_2 = 2\pi r\, dx\, dr = 2\pi r\, dx \frac{rD}{2eE} \frac{\partial p}{\partial t} dt$$ ⇒ όγκος διαστολής

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)\pi r^2 dt = \pi r^2 dx \frac{\partial p}{\partial t} dt \frac{1}{\varepsilon} + 2\pi r dx \frac{rD}{2eE}\frac{\partial p}{\partial t} dt$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{a^2}\frac{\partial y}{\partial t}} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{a^2} = \rho\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{eE}\right)$$ α: διαστάσεις ταχύτητας

Εξισώσεις (1) και (2): εξισώσεις παλλομένων χορδών

Παραγωγίζοντας τις εξισώσεις (1) και (2) ως προς x και t και αντιστρόφως, καταλήγουμε στο σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned}\right\}$$ μερική περίπτωση των εξισώσεων κινήσεως των κυματισμών στον επίπεδο χώρο

Γενική περίπτωση: $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ $\qquad \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

Θέτουμε $z = t - \dfrac{x}{a}$, $u = t + \dfrac{x}{a}$. Η εξίσωση $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ γίνεται

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \int \varphi(u)\,du + \psi(z)$$

$$y = f\left(t + \frac{x}{a}\right) + F\left(t - \frac{x}{a}\right) + k$$

k: σταθερά ολοκλήρωσης

$$y = y_{ox} + F\left(t-\frac{x}{a}\right) + f\left(t+\frac{x}{a}\right)$$

$$v = v_0 - \frac{g}{a}\left[F\left(t-\frac{x}{a}\right) - f\left(t+\frac{x}{a}\right)\right]$$

Εξισώσεις Allievi

Η πίεση y είναι το άθροισμα της στατικής πίεσης y_{ox}, ενός κύματος πιέσεως κινουμένου με ταχύτητα a προς τα άνω και ενός κύματος πιέσεως κινουμένου με ταχύτητα $-a$ προς τα κάτω.

Το v_0 εκφράζει την ταχύτητα εντός του αγωγού προ του χειρισμού της δικλείδας.

Η συνάρτηση F αποτελεί κύμα πιέσεως διαδιδόμενο εντός του αγωγού με ταχύτητα a αντιθέτως προς τη ροή.
Η συνάρτηση f αποτελεί κύμα πιέσεως διαδιδόμενο εντός του αγωγού με ταχύτητα $-a$, δηλ. κατά τη διεύθυνση της ροής.

Ταχύτητα διάδοσης κύματος υπερπίεσης και υποπίεσης (α)

$$\boxed{\alpha = \frac{9900}{\sqrt{48.3 + k\frac{D}{e}}}}$$

α: [m/s]   Τύπος Allievi

k = 0.5 για χάλυβα

k = 0.1 για χυτοσίδηρο

k = 5 για μόλυβδο και σκυρόδεμα

k = 10 για ξύλο

Ο όρος $k\frac{D}{e}$ χαρακτηρίζει το παραμορφώσιμο του αγωγού και συμβάλλει στην ελάττωση του α.

Όταν το υλικό είναι τελείως απαραμόρφωτο, τότε k = 0 και α = 1425 m/s (ταχύτητα ήχου μέσα στο νερό).

Για αγωγό από καουτσούκ το k παίρνει μεγάλες τιμές και το α = 20-30 m/s (κίνηση αίματος μέσα στις αρτηρίες).

Νέα μορφή των εξισώσεων Allievi βάσει των οριακών συνθηκών στο σημείο A

- Στο σημείο A $y = y_{oL}$, όπου L το μήκος του αγωγού.
- Από την πρώτη των εξισώσεων Allievi προκύπτει:

$$F\left(t - \frac{L}{a}\right) = -f\left(t + \frac{L}{a}\right)$$

- Κατά τη στιγμή $t - \frac{L}{a}$ λαμβάνουμε:

$$f(t) = -F\left(t - \frac{2L}{a}\right) = -F(t - \Theta), \quad \text{όπου } \Theta = \frac{2L}{a}, \text{ περίοδος του αγωγού}$$

- Κατά τη στιγμή $t + \frac{x}{a}$ λαμβάνουμε:

$$f\left(t + \frac{x}{a}\right) = -F\left(t - \Theta + \frac{x}{a}\right)$$

- Οι αρχικές εξισώσεις Allievi λαμβάνουν τη μορφή:

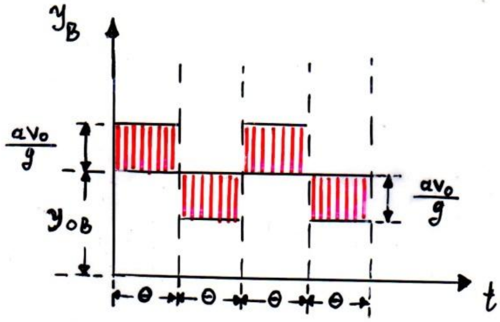
$$\boxed{\begin{aligned} y &= y_{ox} + F\left(t - \frac{x}{a}\right) - F\left(t - \Theta + \frac{x}{a}\right) \\ v &= v_o - \frac{g}{a}\left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) + F\left(t - \Theta + \frac{x}{a}\right)\right] \end{aligned}}$$

- Στο σημείο B $(x=0)$ ισχύει:

$$y - y_{ox} = F(t) - F(t - \Theta), \quad \text{όπου } y - y_{ox} = \xi = \text{υπερπίεση}$$

$$v = v_o - \frac{g}{a}\left[F(t) + F(t - \Theta)\right]$$

Ολική και ακαριαία διακοπή της ροής ($T_s = 0$)



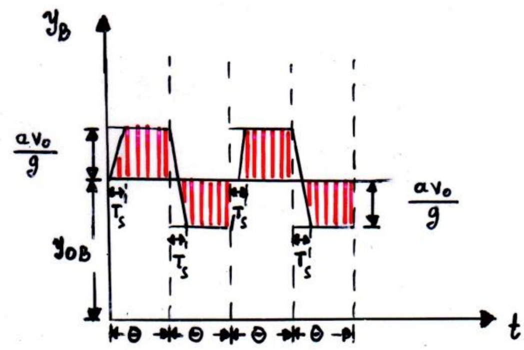
$$\boxed{\Theta = \frac{2L}{a}}$$

Διάγραμμα υπερπιέσεων-υποπιέσεων στο σημείο Β

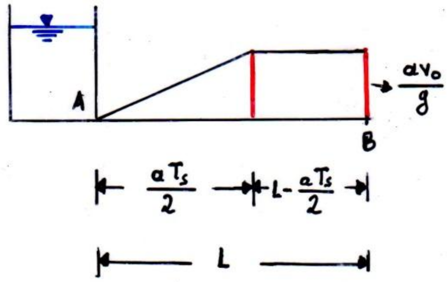
$$\boxed{\xi_m = \frac{a v_0}{g}}$$ (τύπος Joukowski-Allievi)

ξ_m: μέγιστη τιμή υπερπίεσης-υποπίεσης

Ταχεία διακοπή της ροής ($0 < T_s < \Theta$)



Διάγραμμα υπερπιέσεων-υποπιέσεων στο σημείο Β



Διάγραμμα μεγίστων πιέσεων κατά μήκος του αγωγού στον τυχόντα χρόνο