ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: *Καθηγητής Χρ. Ι. Σχοινάς - Ομότιμος Καθηγητής Γ. Παπασχοινόπουλος*
ΟΝΟΜ/ΜΟ ΦΟΙΤ.: Α.Μ.:

Εξέταση ακαδημαϊκού έτους 2025-26 στο μάθημα:
"**ΕΙΔΙΚΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ**"

ΘΕΜΑ 1ο (2,5 μονάδες)
Να λυθεί η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$u_{xy} + u_{xx} + u_{yy} = 0$$

με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών.

ΘΕΜΑ 2ο (2,5 μονάδες)
Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών–συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xx} = 0, && 0 < x < 1, \ \ t > 0, \\ &u(x,0) = x - x^2, && 0 < x < 1, \\ &u(0,t) = 0, && t > 0, \\ &u(1,t) = 0, && t > 0. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3ο (2,5 μονάδες)
α) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 4n + 3. \ \ (1.5 \ \mu\text{ον.})$$

β) Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας της εξίσωσης

$$x_{n+1} = \frac{3x_n + 1}{1 + 8x_n}, \ n = 0,1,... \ (1 \, \mu ον.)$$

και να εξετάσετε την ευστάθεια τους

ΘΕΜΑ 4ο (2,5 μονάδες)
Να δείξετε οτι κάθε θετική λύση της εξίσωσης

$$x_{n+1} = \frac{5}{3x_n + 2}, \ x_0 > 0, \quad n = 0,1,... \qquad (2.5 \, \mu ον.)$$

είναι φραγμένη από πάνω και από κάτω από θετικούς αριθμούς και χρησιμοποιώντας τον ανώτερο οριακό αριθμό $\limsup x_n$ και τον κατώτερο οριακό αριθμό $\liminf x_n$ να δείξετε ότι συγκλίνει στο μοναδικό θετικό σημείο ισορροπίας.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο (2,5 μονάδες)
Θέτουμε $u = X(x) + Y(y)$. Οπότε αντικαθιστώντας στη ΔΕΜΠ έχουμε,

$$X'' + Y'' = 0$$

ή

$$X'' = -Y'' = \lambda$$

Συνεπώς

$$X'' = \lambda \Rightarrow X(x) = \frac{\lambda}{2}x^2 + c_1 x + c_3 ,$$

$$Y'' = -\lambda \Rightarrow Y(y) = -\frac{\lambda}{2}y^2 + c_2 y + c_4 .$$

Άρα

$$u = \frac{\lambda}{2}x^2 - \frac{\lambda}{2}y^2 + c_1 x + c_2 y + c .$$

ΘΕΜΑ 2ο (2,5 μονάδες)
Είναι

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\sin n\pi x dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 (x - x^2)(\cos n\pi x)' dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\Big[(x - x^2)\cos n\pi x\Big]_{x=0}^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (1 - 2x)\cos n\pi x dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 (1 - 2x)(\sin n\pi x)' dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\Big[(1 - 2x)\sin n\pi x\Big]_{x=0}^1 - \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 (-2)\sin n\pi x dx$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin n\pi x dx = -\frac{4}{n^3\pi^3}\Big[\cos n\pi x\Big]_{x=0}^1 = -\frac{4}{n^3\pi^3}\Big[(-1)^n - 1\Big]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{8}{n^3\pi^3}, & n \ \ περιττος \\ 0, & n \ \ αρτιος \end{cases}$$

Συνεπώς

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 c}{l^2}t}\sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)^3\pi^3}e^{-(2n-1)^2\pi^2 t}\sin(2n-1)\pi x .$$