

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Καθηγητής Γ. Παπασχοινόπουλος - Καθηγητής Χρ. Ι. Σχοινιάς
ΟΝΟΜ/ΜΟ ΦΟΙΤ.: Α.Μ.:

Εξέταση ακαδημαϊκού έτους 2023-24 στο μάθημα:
“ΕΙΔΙΚΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ”

ΘΕΜΑ 1^ο (2,5 μονάδες)

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$11u_{xx} - 4u_{yy} + u_{zz} + u = 0.$$

Αφού τεθεί $u = X(x)Y(y)Z(z)$, να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τις συναρτήσεις $X(x)$, $Y(y)$ και $Z(z)$.

ΘΕΜΑ 2^ο (2,5 μονάδες)

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών–συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} u_t - 4u_{xx} &= 0, & 0 < x < \pi, & t > 0, \\ u(x, 0) &= x, & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) &= 1, & t > 0, \\ u(\pi, t) &= 0, & t > 0. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3^ο (2,5 μονάδες)

Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$y_{n+2} - 14y_{n+1} + 49y_n = 5 \cdot 7^n. \quad (2.5 \text{ μον.})$$

ΘΕΜΑ 4^ο (2,5 μονάδες)

α) Να δείξετε ότι κάθε θετική λύση της εξίσωσης

$$x_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{2}{3x_n + 4}, \quad x_0 > 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.5 \text{ μον.})$$

είναι φραγμένη από πάνω και από κάτω από θετικούς αριθμούς.

β) Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας της εξίσωσης

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 2}{9 - 3x_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1 \text{ μον.})$$

και να εξετάσετε την ευστάθειά τους

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο (2,5 μονάδες)

Μετά από την αντικατάσταση, η ΔΕΜΠ γίνεται

$$11 \frac{X''(x)}{X(x)} + 1 = 4 \frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda,$$

απ' όπου προκύπτουν οι διαφορικές εξισώσεις

$$11 \frac{X''(x)}{X(x)} + 1 = \lambda \quad (1)$$

και

$$4 \frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda \quad (2)$$

Η (1) δίνει τη διαφορική εξίσωση

$$11X'' + (1 - \lambda)X = 0$$

και από τη (2)

$$4 \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)} + \lambda = \mu$$

προκύπτουν οι διαφορικές εξισώσεις

$$4Y' - \mu Y = 0$$

και

$$Z'' + (\lambda - \mu)Z = 0.$$

ΘΕΜΑ 2^ο (2,5 μονάδες)

Αρχικά υπολογίζουμε τη λύση $v(x, t)$. Υπολογίζουμε πρώτα το συντελεστή c_n ,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \left[g(x) + \frac{x-l}{l} A - \frac{x}{l} B \right] \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(x + \frac{x-\pi}{\pi} \right) \sin nx dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \left[\frac{(\pi+1)x - \pi}{\pi} \cos nx \right]_{x=0}^\pi + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\pi+1}{\pi} \cos nx dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \left[\frac{\pi^2 + \pi - \pi}{\pi} \cos n\pi + \frac{\pi}{\pi} \cos 0 \right] + \frac{2(\pi+1)}{n^2 \pi^2} [\sin nx]_{x=0}^\pi \\ &= -\frac{2}{n\pi} [\pi(-1)^n + 1] = \frac{2}{n\pi} [\pi(-1)^{n+1} - 1]. \end{aligned}$$

Οπότε

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 c}{l^2} t} \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} [\pi(-1)^{n+1} - 1] e^{-4n^2 t} \sin nx$$

και επομένως

$$u(x, t) = v(x, t) - \frac{x-l}{l} A + \frac{x}{l} B = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [(-1)^{n+1} \pi - 1] e^{-4n^2 t} \sin nx + \frac{\pi - x}{\pi}.$$