

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Καθηγητής Γ. Παπασχοινόπουλος - Καθηγητής Χρ. Ι. Σχοινιάς
ΟΝΟΜ/ΜΟ ΦΟΙΤ.: Α.Μ.:

Γραπτή εξέταση ακαδημαϊκού έτους 2022-23 στο μάθημα:
“ΕΙΔΙΚΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ”

ΘΕΜΑ 1^ο (2,5 μονάδες)

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$4u_{xx} - 7u_{yy} + u_x - 2u_y + u = 0.$$

Αφού τεθεί $u = X(x)Y(y)$, να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τις συναρτήσεις $X(x)$ και $Y(y)$.

ΘΕΜΑ 2^ο (2,5 μονάδες)

Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών του Dirichlet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, 0) = x, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(x, 1) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0, y) = 0, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(1, y) = 0, \quad 0 < y < 1.$$

ΘΕΜΑ 3^ο (2,5 μονάδες)

α) Έστω η εξίσωση διαφορών

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (A)$$

όπου f συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η παραπάνω εξίσωση (A) έχει ένα σημείο ισορροπίας το $\bar{x}$. Υποθέτουμε επίσης ότι ορίζεται η σύνθεση $f \circ f = g$.

Θεωρούμε την εξίσωση

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (B)$$

Να δείξετε ότι το $\bar{x}$ είναι σημείο ισορροπίας για την εξίσωση (B). Επίσης εάν το $\bar{x}$ είναι ευσταθές για την (B), τότε είναι ευσταθές και για την (A). **(1.5 μον.)**

β) Να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης διαφορών

$$y_{n+2} - 11y_{n+1} + 18y_n = 4 \cdot 9^n \quad (1 \text{ μον.})$$

ΘΕΜΑ 4^ο (2,5 μονάδες)

α) Να δείξετε ότι κάθε θετική λύση της εξίσωσης

$$x_{n+1} = \frac{x_n^5 + 4}{5x_n^4 + 2}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_0 > 0$$

είναι φραγμένη από πάνω και από κάτω από θετικούς αριθμούς. **(1.5 μον.)**

β) Έστω η εξίσωση

$$y_{n+1} = \frac{3y_n^2 + 6}{2y_n + 5}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Να εξετάσετε την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας. **(1 μον.)**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο

Θέτουμε $u = X(x)Y(y)$. Οπότε αντικαθιστώντας στη ΔΕΜΠ έχουμε,

$$4 \frac{X''(x)}{X(x)} - 7 \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{X'(x)}{X(x)} - 2 \frac{Y'(y)}{Y(y)} + 1 = 0$$

ή

$$4 \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{X'(x)}{X(x)} + 1 = 4 \frac{Y''(y)}{Y(y)} + 2 \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

απ' όπου προκύπτουν οι

$$4X'' + X' + (1 - \lambda)X = 0$$

και

$$7Y'' + 2Y' - \lambda Y = 0.$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Υπολογίζουμε τους συντελεστές a_n και b_n ,

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l g_1(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 2 \int_0^1 x (\sin n\pi x) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi},$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\sinh \frac{n\pi m}{l}} \left[\frac{2}{l} \int_0^l g_2(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx - \left(\cosh \frac{n\pi m}{l} \right) \frac{2}{l} \int_0^l g_1(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right] \\ &= \frac{1}{\sinh n\pi} \left[(-\cosh n\pi) 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx \right] \\ &= -(\coth n\pi) \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} = \frac{2(-1)^n}{n\pi} \coth n\pi. \end{aligned}$$

Επομένως η ζητούμενη λύση προκύπτει από τη σχέση

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cosh \frac{n\pi y}{l} + b_n \sinh \frac{n\pi y}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \cosh(n\pi y) + \frac{2(-1)^n}{n\pi} \coth(n\pi) \sinh(n\pi y) \right) \sin(n\pi x). \end{aligned}$$