# Εξισώσεις Διαφορών



Στις διαφορικές εξισώσεις θεωρούμε μια σχέση:

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y) = 0 \qquad (1)$$

θέλουμε να βρούμε μια συνάρτηση $y = y(x)$ τέτοια ώστε η $y$ να ικανοποιεί την (1). Η (1) είναι η τάξεως

Παράδειγμα: Η δ.ε. $y^{(5)} - \frac{1}{y+1} y^{(3)} + y = \cos x$ είναι πέμπτης τάξης

Ζητούμε μια συνάρτηση $y = y(x)$: $y^{(5)}(x) - \frac{1}{y(x)+1} y^{(3)}(x) + y(x) = \cos x$

Στις εξισώσεις διαφορών θεωρούμε μια σχέση της μορφής:

$$f(y_{n+r}, y_{n+r-1}, \dots, y_n) = 0 \qquad (2)$$

όπου $r \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, \dots$ Ζητούμε να βρούμε μια ακολουθία $y_n$ τέτοια να ικανοποιεί την (2). Η (2) είναι εξίσωση διαφορών $r$ τάξης.

Παράδειγμα. Έστω η εξίσωση

$$y_{n+5}^2 - 3y_{n+4}\cdot y_{n+2} + y_n = 0 \quad , \quad n=0,1,\dots$$

Ζητούμε να βρούμε μια ακολουθία $y_n$ που ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση. Η εξίσωση είναι πέμπτης τάξης.

## Συμβολισμοί.

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} a_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_{n-1}, \quad n \geq n_0, \qquad \sum_{k=n_0}^{n_0-1} a_k = 0$$

$$\prod_{k=n_0}^{n-1} a_k = a_{n_0}\cdot a_{n_0+1}\cdot\dots\cdot a_{n-1}, \qquad \prod_{k=n_0}^{n_0-1} a_k = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(1+n)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\prod_{k=n_0}^{n-1} C = \underbrace{C \cdot C \cdots C}_{n-n_0} = C^{n-n_0}.$$

Θεωρούμε τη δ.Ε. $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

Έχουμε $\lim_{h \to 0} \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h} = f(x_0, y_0) \Rightarrow$

$y(x+h) - y(x) \cong h f(x,y)$. Θεωρούμε τη σχέση:

$$y(x+h) - y(x) = h f(x,y) \Rightarrow y(x+h) = y(x) + h f(x,y).$$

Για $x = x_0$: $y(x_0+h) = y(x_0) + h f(x_0, y_0) \Rightarrow y(x_0+h) = y_0 + h f(x_0, y_0)$.

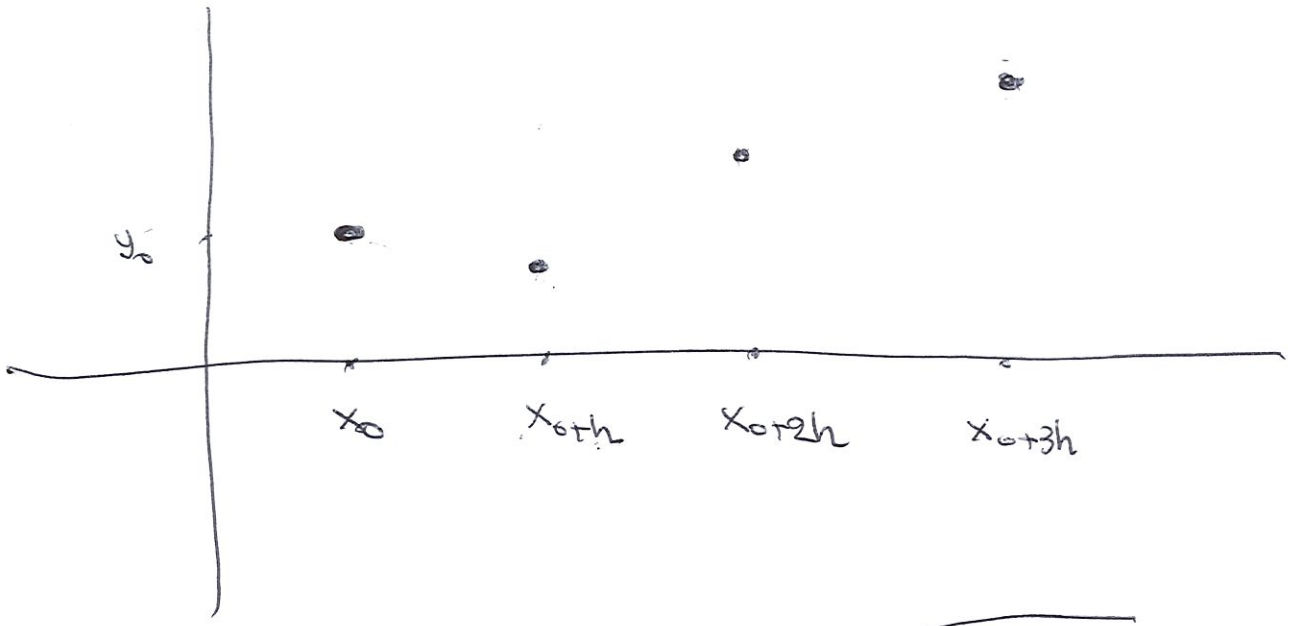
Για $x = x_0 + h \Rightarrow y(x_0+2h) = y(x_0+h) + h f(x_0+h, y(x_0+h))$

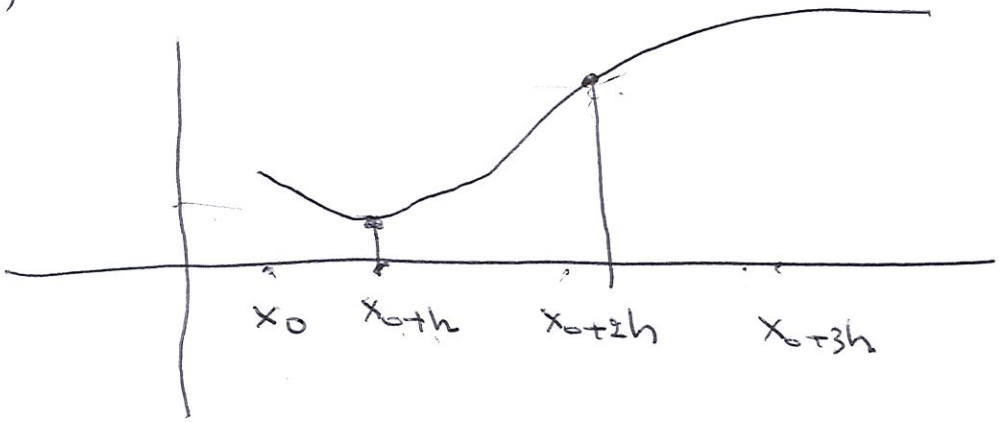
Για $x = x_0 + (n-1)h \Rightarrow y(x_0+nh) = y(x_0+(n-1)h) + h f(x_0+(n-1)h, y(x_0+(n-1)h))$

Θέτουμε $z_n = y(x_0+(n-1)h) \Rightarrow z_{n+1} = y(x_0+nh)$. Άρα παίρνουμε:

$z_{n+1} = z_n + h f(x_0+(n-1)h, z_n)$, $n = 0, 1, \ldots$ ∴ Εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης.

$$y' = \frac{x^2}{y+1} \qquad y = y(x): \; y'(x) = \frac{x^2}{y(x)+1}$$



Παράδειγμα: Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1$$

Προσέγγιση της λύσης: Θεωρούμε τη σχέση:

$$y(x+h) = y(x) + h f(x,y).$$ Παίρνουμε $h = 0.01$

Τότε $y(x_0+0.01) = y(x_0) + 0.01\, f(x_0, y_0)$. Έχουμε $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

Άρα $y(0.01) = 1 + 0.01\, f(0,1)$, $f(x,y) = x^2+y^2 \Rightarrow f(0,1) = 0^2+1^2 = 1$

Επομένως $y(0.01) = 1 + 0.01 = 1.01$

$$y(x_0 + 2\cdot 0.01) = y(x_0+0.01) + h f(x_0+0.01,\ y_0(x_0+0.01)) \Rightarrow$$

$$y(0.02) = y(0.01) + 0.01 f(0.01, y(0.01)) = 1.01 + 0.01\cdot((0.01)^2 + (1.01)^2)$$

⋮

# Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών.

Η γενική μορφή μιας εξίσωσης διαφορών $r$ τάξης είναι η

$$a_r(n)\, y_{n+r} + a_{r-1}(n)\, y_{n+r-1} + \cdots + a_1(n)\, y_{n+1} + a_0(n)\, y_n = f_n$$

όπου $a_i(n)$, $f_n$ δοθείσες ακολουθίες.

Παραδείγματα: Θεωρούμε την εξίσωση:

$$y_{n+2} - 2^n \cdot y_{n+2} + y_n^2 = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης. Εφόσον υπάρχει ο όρος $y_n^2$ δεν είναι γραμμική

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$(\cos n)\, y_{n+5} + \frac{1+\sin(n)}{\cos n}\, y_{n+3} + \frac{1}{1+n^2}\, y_{n+2} + y_n = n^2 + 1$$

γραμμική πέμπτης τάξης.

Θεωρούμε την εξίσωση

$$y_{n+2} + \frac{1}{n+1} y_{n+1} + \cos(y_n) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Δεν είναι γραμμική διότι υπάρχει ο όρος $\cos(y_n)$.

## Εξισώσεις Διαφορών Γραμμικές Πρώτης Τάξης.

Θεωρούμε την εξίσωση διαφορών:

$$y_{n+1} = p(n) y_n + q(n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

$p(n)$, $q(n)$ δοσμένες ακολουθίες. Εδώ θα θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{n+1} = p(n) y_n + q(n), \quad y_{n_0} = c, \quad n_0 \in \mathbb{N}, \quad c \in \mathbb{R} \qquad (3).$$

Θα υπολογίζουμε την λύση $y_n$, $n \geq n_0$.

Εάν $q(n)=0$, $n\in\mathbb{N}$, τότε έχουμε την εξίσωση

$$y_{n+1} = p(n)y_n, \quad n=0,1,\ldots \qquad (4).$$

Η εξίσωση αυτή καλείται γραμμική ομογενής

Εάν $q(n)\neq 0$, τότε η εξίσωση $y_{n+1} = p(n)y_n + q(n)$ καλείται μη ομογενής

Από την (4) για $n=n_0$ παίρνουμε:

$$y_{n_0+1} = p(n_0)y_{n_0}$$

Από την (4) για $n=n_0+1$ παίρνουμε

$$y_{n_0+2} = p(n_0+1)y_{n_0+1} = p(n_0+1)p(n_0)y_{n_0}.$$

Ομοίως

$$y_{n_0+3} = p(n_0+2)p(n_0+1)p(n_0)y_{n_0}$$

Γενικά για $n \geq n_0$ παίρνουμε:

$$y_n = p(n-1)\cdot p(n-2)\cdots\cdots p(n_0+1)p(n_0)y_{n_0} \Rightarrow$$

Άρα $$y_n = \left(\prod_{j=n_0}^{n-1} P(j)\right) y_{n_0}, \quad n \geq n_0 \quad \left(\text{Συμβ. } P_n = P(n)\right)$$

$\left(\text{Για } n=n_0 \text{ έχουμε } y_{n_0} = \left(\prod_{j=n_0}^{n_0-1} P(j)\right) y_{n_0} \Rightarrow y_{n_0} = y_{n_0}\right).$

Παράδειγμα: Να λύσετε το πρόβλημα:

$$y_{n+1} = 2\,y_n, \quad y_5 = 7$$

Έχουμε $$y_n = \left(\prod_{j=n_0}^{n-1} P(j)\right) y_{n_0}, \quad P(n) = 2,\ n \geq 0,\ n_0 = 5,\ y_{n_0} = 7.$$

Άρα $$y_n = \left(\prod_{j=5}^{n-1} 2\right) 7 = 7 \cdot 2^{n-1-5+1} = 7 \cdot 2^{n-5}, \quad n \geq 5.$$

Θεωρούμε τώρα την εξίσωση διαφορών:

$$y_{n+1} - y_n = z_n, \quad n = n_0, n_0+1, \dots$$

όπου $z_n$ γνωστή ακολουθία. Υποθέτουμε ότι $y_{n_0} = C$.

Θέτουμε στην εξίσωση $n = n_0$ και έχουμε

$$y_{n_0+1} - y_{n_0} = z_{n_0}$$

Επίσης θέτουμε $n = n_0+1$:

$$y_{n_0+2} - y_{n_0+1} = z_{n_0+1} \quad \Rightarrow$$

Επίσης θέτουμε $n = n_0+2$:

$$y_{n_0+3} - y_{n_0+2} = z_{n_0+2}$$

και γενικά για $n \geq n_0$

$$y_n - y_{n-1} = z_{n-1}$$

$$y_{n_0+1} - y_{n_0} = z_{n_0}$$

$$y_{n_0+2} - y_{n_0+1} = z_{n_0+1}$$

$$y_{n_0+3} - y_{n_0+2} = z_{n_0+2}$$

$$\vdots$$

$$y_n - y_{n-1} = z_{n-1}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$y_n - y_{n_0} = \sum_{k=n_0}^{n-1} z_k \Rightarrow y_n = c + \sum_{k=n_0}^{n-1} z_k, \quad n \geq n_0$$

(Για $n=n_0$ έχουμε $y_{n_0} = c + \sum_{k=n_0}^{n_0-1} z_k = c \Rightarrow y_{n_0} = c$).

Παράδειγμα. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad y_{n_0} = c.$$

Λύση Εδώ $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Έχουμε

$$y_n = y_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = c + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1}, \quad n \geq n_0.$$

Επίλυση του αρχικού προβλήματος αρχικών τιμών (3):

$$y_{n+1} = p(n)y_n + q_n, \quad y_{n_0} = C, \quad p(n) \neq 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Παίρνουμε τον αντίστροφο $\prod_{j=n_0}^{n} p(j)^{-1} = \prod_{j=n_0}^{n} \frac{1}{p(j)}$.

Πολ/ζουμε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης με τον όρο $\prod_{j=n_0}^{n} p(j)^{-1}$ και έχουμε:

$$y_{n+1} \prod_{j=n_0}^{n} p(j)^{-1} = p(n)y_n \prod_{j=n_0}^{n} p(j)^{-1} + q_n \prod_{j=n_0}^{n} p(j)^{-1}$$

Άρα

$$y_{n+1} \prod_{j=n_0}^{n} p(j)^{-1} = y_n \prod_{j=n_0}^{n-1} p(j)^{-1} + q_n \prod_{j=n_0}^{n} p(j)^{-1}$$

Θέτουμε $v_n = y_n \prod_{j=n_0}^{n-1} p(j)^{-1}$. Τότε $v_{n+1} = y_{n+1} \prod_{j=n_0}^{n} p(j)^{-1}$.

Θέτουμε $$Z_n = q_n \prod_{j=n_0}^{n} P(j)^{-1}.$$

Τότε παίρνουμε:

$$V_{n+1} = V_n + Z_n, \quad n \geq n_0$$

Από το προηγούμενο πρόβλημα έχουμε:

$$V_n = V_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} Z_k, \quad n \geq n_0$$

$$V_{n_0} = y_{n_0} \prod_{j=n_0}^{n_0-1} P(j)^{-1} = y_{n_0} = C. \quad \text{Άρα}$$

$$y_n \prod_{j=n_0}^{n-1} P(j)^{-1} = C + \sum_{k=n_0}^{n-1} q_k \prod_{j=n_0}^{k} P(j)^{-1}, \quad n \geq n_0$$

Άρα

$$y_n = C \prod_{j=n_0}^{n-1} P(j) + \prod_{j=n_0}^{n-1} P(j) \cdot \sum_{k=n_0}^{n-1} q_k \prod_{j=n_0}^{k} P(j)^{-1}, \quad n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \quad y_n = C \prod_{j=n_0}^{n-1} P(j) + \sum_{k=n_0}^{n-1} q_k \prod_{j=n_0}^{n-1} P(j) \cdot \prod_{j=n_0}^{k} P(j)^{-1}, \quad n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \quad y_n = C \prod_{j=n_0}^{n-1} P(j) + \sum_{k=n_0}^{n-1} q_k \cancel{\prod_{j=n_0}^{k} P(j)} \cdot \prod_{j=k+1}^{n-1} P(j) \cancel{\prod_{j=n_0}^{k} P(j)^{-1}}, \quad n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \quad y_n = C \prod_{j=n_0}^{n-1} P(j) + \sum_{k=n_0}^{n-1} q_k \prod_{j=k+1}^{n-1} P(j), \quad n \geq n_0 \quad (q_k = q(k))$$

Σημείωση: Γενική λύση της $M_n$ Ομογενούς =

Γενική λύση της Ομογενούς + μια μερική λύση της

μη Ομογενούς. Εδώ η $c \prod_{j=n_0}^{n-1} P(j)$ είναι η γενική

λύση της Ομογενούς. Επίσης η $\sum_{k=n_0}^{n-1} q_k \prod_{j=k+1}^{n-1} P(j)$

είναι μια μερική λύση της μη ομογενούς:

$y_{n+1} = P(n) y_n + q(n), \quad n = 0, 1, \ldots$

Άσκηση. Να λύσετε το πρόβλημα:

$$y_{n+1} = 2y_n + 3^n, \quad y_0 = c$$

όπου $c$ σταθερά.

Λύση. Εδώ $p(n) = 2$, $n = 0, 1, \dots$, $q(n) = 3^n$, $n = 0, 1, \dots$, $n_0 = 0$.

Θεωρούμε τον όρο $\prod_{j=0}^{n} p(j)^{-1} = \prod_{j=0}^{n} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Πολλαπλασιάζουμε αριστερά τα μέλη της εξίσωσης με τον όρο $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ και έχουμε:

$$y_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} y_n + 3^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Rightarrow y_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n y_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Θέτουμε $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n y_n \Rightarrow y_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = v_{n+1}$. Επίσης θέτουμε $z_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Τότε $$v_{n+1} = v_n + z_n \Rightarrow v_n = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} z_k.$$ Έχουμε $v_0 = y_0 = c$

Άρα $\left(\frac{1}{2}\right)^n y_n = c + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^k = c + \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2}-1} \Rightarrow$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n y_n = c + \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\,,\ n \geq 0 \Rightarrow y_n = c\,2^n + \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right)2^n$

$\Rightarrow y_n = c\cdot 2^n + 3^n - 2^n\,,\ n \geq 0$

Άσκηση. Να λύσετε το πρόβλημα:

$$y_{n+1} = \frac{n}{n+1} y_n + n, \quad y_1 = c, \quad c \text{ σταθερά}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Λύση. Εδώ $p_n = p(n) = \frac{n}{n+1}$, $q_n = q(n) = n$. Παίρνουμε τον όρο

$$\prod_{j=1}^{n} (p(j))^{-1} = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{j+1}\right)^{-1} = \prod_{j=1}^{n} \frac{j+1}{j} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{n+1}{n} = n+1$$

Πολ/ζουμε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης με τον όρο $n+1$:

$$(n+1) y_{n+1} = (n+1) \frac{n}{n+1} y_n + n(n+1) \Rightarrow (n+1) y_{n+1} = n y_n + n(n+1).$$

Θέτουμε $V_n = n y_n$. Τότε $(n+1) y_{n+1} = V_{n+1}$. Άρα παίρνουμε την εξίσωση

$$V_{n+1} = V_n + n(n+1) \Rightarrow V_n = V_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1).$$

Αλλά $V_1 = y_1 = c$. Παίρνουμε

$$V_n = c + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k.$$

Ισχύουν: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(1+n)}{2}$ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Άρα $V_n = c + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2}$, $n \geq 1$

Ισχύει ότι $V_n = n y_n \Rightarrow$

$$n y_n = c + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2}, \quad n \geq 1$$

Τότε

$$y_n = \frac{c}{n} + \frac{(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n-1}{2}, \quad n \geq 1$$

Παρατήρηση Η ακολουθία $\frac{c}{n}$ είναι λύση της ομογενούς δηλ. της $y_{n+1} = \frac{n}{n+1} y_n$. Επίσης η ακολουθία $\frac{(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n-1}{2}$ είναι για μερική λύση της μη ομογενής

$$y_{n+1} = \frac{n}{n+1} y_n + n.$$

# Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών δεύτερης Τάξης.

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = f_n, \quad n=0,1,\ldots \qquad (1).$$

όπου οι ακολουθίες $p_n, q_n, f_n$ είναι γνωστές.

Η (1) καλείται μη Ομογενής δεύτερης τάξης. Η εξίσωση

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0, \quad n=0,1,\ldots \qquad (2)$$

καλείται ομογενής δεύτερης τάξης. Θα μελετήσουμε την εύρεση της γενικής λύσης της Ομογενούς (2).

Ορισμός: Έστω 2 ακολουθίες $x_n, y_n$, $n=0,1,\ldots$ Θα λέμε ότι οι $x_n, y_n$ είναι <u>γραμμικά ανεξάρτητες</u> εάν από τη σχέση

$$\lambda x_n + \mu y_n = 0, \quad n=0,1,\ldots$$

παίρνουμε ότι $\lambda=\mu=0$.

Ορισμός: Θα λέμε ότι οι $x_n, y_n$ είναι <u>γραμμικά εξαρτημένες</u> εάν υπάρχουν αριθμοί $\lambda, \mu$ διάφοροι του μηδενός τέτοιοι ώστε

$$\lambda x_n + \mu y_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Παράδειγμα: Έστω οι ακολουθίες $x_n = 3n + \frac{12}{5}$ και $y_n = 5n + 4$

Παίρνουμε $\lambda = 5$, $\mu = -3$. Τότε

$$\lambda x_n + \mu y_n = 5\left(3n + \frac{12}{5}\right) - 3(5n+4) = 15n + 12 - 15n - 12 = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Άρα οι $x_n, y_n$ εξαρτημένες

Παράδειγμα. Έστω οι $x_n = 2^n$, $y_n = 3^n$, $n = 0, 1, \ldots$

Να εξετάσετε εάν είναι γραμμικά εξαρτημένες

Παίρνουμε τη σχέση $\lambda x_n + \mu y_n = 0 \Rightarrow \lambda 2^n + \mu 3^n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$

Για $n=0$ έχουμε $\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\mu$

Για $n=1$ έχουμε $2\lambda + 3\mu = 0 \Rightarrow -2\mu + 3\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

Άρα οι ακολουθίες $x_n = 2^n$, $y_n = 3^n$ γραμμικά ανεξάρτητες.

Θεωρούμε την ομογενή εξίσωση δεύτερης τάξης

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0 \qquad (2)$$

Θέλουμε να βρούμε 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $y_n, z_n$ της (2). Τότε η γενική λύση της ομογενούς $y_n^{(το)}$ δίνεται

$$y_n^{(το)} = c_1 y_n + c_2 z_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$c_1, c_2$ σταθερές

Ορισμός. Έστω $x_n, y_n$ 2 λύσεις της ομογενούς (2). Τότε η ορίζουσα

$$C(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{vmatrix}$$

καλείται ορίζουσα Cassorati

Πρόταση. Θεωρούμε την Ομογενή Εξίσωση (2) όπου $q_n \neq 0$, $n=0,1,\dots$ Έστω 2 λύσεις $x_n, y_n$ της (2). Η ορίζουσα $C(x_n, y_n)$, $n=0,1,\dots$ διάφορη από το μηδέν εάν και μόνο εάν $C(x_0, y_0) \neq 0$.

Απόδειξη. Έστω $u_n = C(x_n, y_n)$. Τότε

$$u_{n+1} = C(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{vmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_{n+2} & y_{n+2} \end{vmatrix} = x_{n+1}y_{n+2} - x_{n+2}y_{n+1}$$

Εφόσον οι $x_n, y_n$ είναι λύσεις της ομογενούς (2) έχουμε:

$$x_{n+2} + p_n x_{n+1} + q_n x_n = 0 \Rightarrow x_{n+2} = -p_n x_{n+1} - q_n x_n$$

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0 \Rightarrow y_{n+2} = -p_n y_{n+1} - q_n y_n$$

Τότε $u_{n+1} = x_{n+1}(-p_n y_{n+1} - q_n y_n) - (-p_n x_{n+1} - q_n x_n) y_{n+1} = -p_n x_{n+1} y_{n+1} - q_n x_{n+1} y_n + p_n x_{n+1} y_{n+1} + q_n x_n y_{n+1} = q_n(x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n) = q_n C(x_n, y_n) = q_n u_n$.

Άρα παίρνουμε την εξίσωση:

$$u_{n+1} = q_n u_n, \quad n=0,1,\ldots \qquad u_n = C(x_n, y_n).$$

Έχουμε

$$u_n = \left(\prod_{s=0}^{n-1} q_s\right) u_0 \Rightarrow C(x_n, y_n) = \left(\prod_{s=0}^{n-1} q_s\right) C(x_0, y_0).$$

Από την υπόθεση έχουμε $q_n \neq 0$, $n=0,1,\ldots$, άρα $\prod_{s=0}^{n} q_s \neq 0$, $n=0,1,\ldots$

Άρα $C(x_n, y_n)=0$, $n=0,1,\ldots$ εάν $C(x_0, y_0)=0$ και

$C(x_n, y_n)\neq 0$, $n=0,1,\ldots$ εάν $C(x_0, y_0)\neq 0$.

Πρόταση. Έστω $y_n, z_n$ 2 λύσεις της ομογενούς (2).
Τότε αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες εάν και μόνο εάν
$C(z_n, y_n)\neq 0$, $n=0,1,\ldots$

Απόδειξη: Έστω ότι $C(z_n, y_n) \neq 0$, $n=0,1..$ Θα δείξουμε ότι οι $z_n$ και $y_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Έστω αντίθετα ότι είναι γραμμικά εξαρτημένες. Τότε υπάρχουν αριθμοί $\lambda, \mu$ διάφοροι του μηδενός τέτοιοι ώστε:

$\lambda y_n + \mu z_n = 0$, $n=0,1...$ Τότε $y_n = -\frac{\mu}{\lambda} z_n$, $n=0,1..$

Παίρνουμε $C(z_n, y_n) = \begin{vmatrix} z_n & y_n \\ z_{n+1} & y_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_n & -\frac{\mu}{\lambda} z_n \\ z_{n+1} & -\frac{\mu}{\lambda} z_{n+1} \end{vmatrix} =$

$= -\frac{\mu}{\lambda} z_n z_{n+1} + \frac{\mu}{\lambda} z_n z_{n+1} = 0$, $n=0,1..$ άτοπο διότι υποθέσαμε ότι $C(z_n, y_n) \neq 0$. Άρα $z_n, y_n$ γραμμικά ανεξάρτητες.

Υποθέτουμε ότι ~~$z_n$~~ $y_n, z_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Θα δείξουμε ότι $C(z_n, y_n) \neq 0$. Υποθέτουμε ότι $C(z_0, y_0) = 0$

Θεωρούμε το γραμμικό ομογενές σύστημα: (αλγεβρικό)

$$\lambda_1 y_0 + \lambda_2 z_0 = 0$$
$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1 = 0$$

Θέλουμε να εξετάσουμε εάν υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2$ διάφοροι του μηδενός που να ικανοποιούν το παραπάνω αλγεβρικό σύστημα

Εφόσον η ορίζουσα $C(y_0, z_0) = \begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0$ τότε το παραπάνω σύστημα έχει άπειρες λύσεις $(\lambda_1, \lambda_2)$. Παίρνουμε την

$\lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2$. Οι $y_n, z_n$ λύσεις της $y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0$

Άρα $y_2 = -p_0 y_1 - q_0 y_0$. Ομοίως $z_2 = -p_0 z_1 - q_0 z_0$. Τότε

$$\lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2 = \lambda_1(-p_0 y_1 - q_0 y_0) + \lambda_2(-p_0 z_1 - q_0 z_0) = -p_0(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1) - q_0(\lambda_1 y_0 + \lambda_2 z_0) =$$
$$= 0.$$

Άρα

$$\lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2 = 0$$

Επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι

$$\lambda_1 y_n + \lambda_2 z_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Άρα οι $y_n, z_n$ γραμμικά εξαρτημένες, άτοπο διότι υποθέσαμε ότι οι $y_n, z_n$ γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα $C(y_0, z_0) \neq 0 \Rightarrow$ $C(y_n, z_n) \neq 0$, $n = 0, 1, \ldots$

Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών Δεύτερης Τάξης Ομογενείς με σταθερούς συντελεστές Θεωρούμε την εξίσωση

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, a_2 \neq 0 \qquad (3)$$

όπου $a_1, a_2$ σταθερές

Εδώ ψάχνουμε λύσεις της μορφής $\lambda^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Από την (3) παίρνουμε: $\lambda^{n+2} + a_1 \lambda^{n+1} + a_2 \lambda^n = 0 \Rightarrow$

$\lambda^n (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) = 0$. Θέλουμε $\lambda \neq 0$. Άρα $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$

Άρα για να είναι η $y_n = \lambda^n$ λύση της (3) θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \qquad (4)$$

Η (4) καλείται χαρακτηριστική εξίσωση της (3).

Έχουμε τρεις περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Έστω ότι η (4) έχει 2 πραγματικές λύσεις $\lambda_1, \lambda_2$ διάφορες μεταξύ τους. Τότε η (3) έχει 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις τις: $y_n = \lambda_1^n$, $z_n = \lambda_2^n$. Θα δείξουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες: Παίρνουμε την $C(y_n, z_n) =$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} \end{vmatrix} = \lambda_1^n \lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1}\lambda_2^n = \lambda_1^n \lambda_2^n (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

διότι υποθέσαμε ότι $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$. Άρα $y_n = \lambda_1^n$, $z_n = \lambda_2^n$ είναι λύσεις της (3) γραμμικά ανεξάρτητες

2η περίπτωση: Έστω ότι η αλγεβρική εξίσωση (4) έχει για διπλή λύση την $\lambda \in \mathbb{R}$. Η μια λύση της ομογενούς (3) είναι $y_n = \lambda^n$. Πρέπει να βρούμε και μια άλλη λύση $z_n$ τέτοια ώστε οι $y_n, z_n$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Παίρνουμε την ακολουθία $z_n = n\lambda^n$. Θα εξετάσουμε εάν η $z_n$ είναι λύση της ομογενούς (3). Παίρνουμε:

$$z_{n+2} + a_1 z_{n+1} + a_2 z_n = (n+2)\lambda^{n+2} + a_1(n+1)\lambda^{n+1} + a_2 n\lambda^n =$$

$$= \lambda^n\left[(n+2)\lambda^2 + a_1(n+1)\lambda + a_2 n\right] = \lambda^n\left[n(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) + 2\lambda^2 + a_1\lambda\right] =$$

$$= \lambda^n(2\lambda^2 + a_1\lambda) = \lambda^{n+1}(2\lambda + a_1) \quad \text{εφόσον } \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

Εφόσον $\lambda$ είναι διπλή ρίζα της $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ έχουμε

$$\lambda + \lambda = -a_1 \Rightarrow 2\lambda = -a_1 \Rightarrow 2\lambda + a_1 = 0 \quad \text{Τότε}$$

$$z_{n+2} + a_1 z_{n+1} + a_2 z_n = \lambda^{n+1}(2\lambda + a_1) = 0. \quad \text{Άρα } z_n \text{ λύση της (3).}$$

Θα πρέπει να δείξουμε ότι οι $y_n = \lambda^n$ και $z_n = n\lambda^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Παίρνουμε την $C(y_n, z_n)$.

$$C(y_n, z_n) = \begin{vmatrix} \lambda^n & n\lambda^n \\ \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^{n+1} \end{vmatrix} = (n+1)\lambda^{n+1}\lambda^n - n\lambda^n\lambda^{n+1} =$$

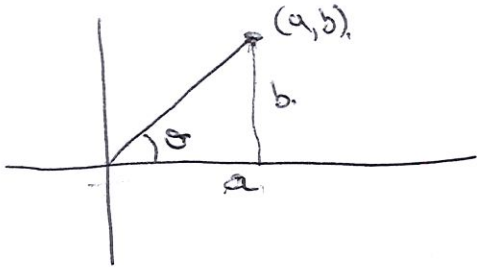
$$= n\lambda^{n+1}\lambda^n + \lambda^{n+1}\lambda^n - n\lambda^n\lambda^{n+1} = \lambda^{2n+1} \neq 0.$$ Επομένως οι $y_n = \lambda^n$, $z_n = n\lambda^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες της σχέσεως (3).

3η περίπτωση: Θεωρούμε ότι η αλγ. εξίσωση (4) έχει 2 μιγαδικές ρίζες τις $a+bi$ και $a-bi$. Οι 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της σχέσεως θα είναι οι $(a+bi)^n$ και $(a-bi)^n$, $n=0,1,\ldots$.

Παίρνουμε την λύση $(a+bi)^n$ της ομογενούς

Γράφουμε τον μιγαδικό αριθμό σε τριγωνομετρική μορφή:

$$a+bi = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$




$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Επομένως $a+bi = \sqrt{a^2+b^2}\,[\cos\theta + i\sin\theta] \Rightarrow (a+bi)^n = (a^2+b^2)^{n/2}(\cos\theta+i\sin\theta)^n$

$$\Rightarrow (a+bi)^n = (a^2+b^2)^{n/2}\,[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

Αποδεικνύουμε ότι οι $y_n = (a^2+b^2)^{n/2}\cos(n\theta)$, $z_n = (a^2+b^2)^{n/2}\sin(n\theta)$ είναι λύσεις της ομογενούς (3). Επίσης $C(y_n, z_n) \neq 0$, $n=0,1,\ldots$

Άρα $y_n, z_n$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (3).

Άσκηση: Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 12y_n = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 2.$$

Λύση. Πρώτα θα βρούμε τη γενική λύση $y_n^{(\Gamma\Omega)}$. Παίρνουμε την χαρακτ. εξίσωση: $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 4$

Άρα έχουμε 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης: οι $y_n = (-3)^n$ και $z_n = 4^n$. Επομένως η γενική λύση δίνεται:

$$y_n^{(\Gamma\Omega)} = c_1(-3)^n + c_2 4^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Για $n=0$ θέλουμε: $\left.\begin{array}{l} c_1(-3)^0 + c_2 4^0 = 1 \\ c_1(-3)^1 + c_2 4^1 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 1 \\ -3c_1 + 4c_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = \frac{2}{7} \\ c_2 = \frac{5}{7} \end{array}$

Άρα $$y_n = \frac{2}{7}(-3)^n + \frac{5}{7}4^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Άσκηση. Να βρείτε τη γενική λύση της

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0.$$

Λύση. Παίρνουμε την χαρακτ. εξίσωση:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

Εδώ έχουμε την $\lambda = 3$ διπλή ρίζα. Άρα έχουμε 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις τις $y_n = 3^n$ και $z_n = n3^n$. Επομένως η γενική της ομογενούς δίνεται:

$$y_n^{(\text{γο})} = c_1 3^n + c_2 n 3^n, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad c_1, c_2 \text{ σταθερές}$$

Άσκηση. Να βρείτε την γενική λύση της

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} + 2y_n = 0 \,, \quad n=0,1,\dots$$

Λύση: Παίρνουμε την Χαρακτ. Εξίσωση:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

Έχουμε 2 μιγαδικές ρίζες τις $\lambda_1 = -1+i$ και $\lambda_2 = -1-i$

Θα γράψουμε σε τριγωνομετρική μορφή την $\lambda_1 = -1+i$

$$-1+i = \sqrt{(-1)^2+1^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Παίρνουμε το $\theta$: $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Έχουμε $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Άρα $-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$. Επομένως οι 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι οι

$$y_n = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) \,, \quad z_n = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right), \quad n=0,1,\dots$$

Άρα η γενική λύση δίνεται:

$$y_n^{(\Gamma\Omega)} = c_1 (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) + c_2 (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right), \quad n=0,1,\ldots$$

και $c_1, c_2$ σταθερές.

Μη Ομογενείς Γραμμικές Εξισώσεις

Μη ομογενείς γραμμικές εξισώσεις διαφορών, δεύτερης τάξης.

Παίρνουμε την εξίσωση:

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = f_n, \quad n=0,1,\ldots \qquad (1).$$

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ και η $f_n$ μια γνωστή ακολουθία. Ισχύει ότι

Γενική λύση της μη ομογενούς (1) $y_n^{(\mu\text{Ο})}$ = Γενική λύση ομογενούς $y_n^{(\Gamma\text{Ο})}$ + μια μερική λύση της μη ομογενούς (1) $y_n^{(\mu\text{Ν})}$.

Ζητούμε μια μερική λύση της (1): Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο προσδιορισμένων συντελεστών: Η ακολουθία $f_n$ πρέπει να έχει την μορφή:

$$f_n = P(n)\, e^{\gamma n}\left(A\cos(\gamma n) + B\sin(\gamma n)\right)$$

όπου $P(n)$ πολυώνυμος, $e$; $A, \gamma, B$ σταθερές.

Τότε η μερική λύση $y_n^{(\text{μη ομ})}$ της μη ομογενούς θα έχει την μορφή

$$y_n^{(\text{μη ομ})} = n^p \beta^n \left( C(n)\cos(\gamma n) + D(n)\sin(\gamma n) \right)$$

όπου $C(n)$, $D(n)$ πολυώνυμα στη γενική τους μορφή ίδιου βαθμού με το πολυώνυμο $p(n)$. Υπολογισμός του $p$:

Θεωρούμε τον αριθμό $\beta(\cos\gamma + i\sin\gamma) = \lambda$

Τότε $p=0$ εάν ο αριθμός $\lambda$ δεν είναι ρίζα της χαρακτ. εξίσωσης της ομογενούς: $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$. Επίσης $p=1$ εάν ο $\lambda$ είναι απλή ρίζα της χαρακτ. εξίσωσης και τέλος $p=2$ εάν ο $\lambda$ είναι διπλή ρίζα της χαρακτ. εξίσωσης.

Άσκηση Να βρείτε τη γενική λύση της

$$y_{n+2} - 10y_{n+1} + 25y_n = 4 \cdot 5^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Λύση: Ισχύει $y_n^{(\Gamma\Mu\Omicron)} = y_n^{(\Gamma\Omicron)} + y_n^{(\mu\Mu\Omicron)}$.

Θα υπολ. πρώτα την $y_n^{(\Gamma\Omicron)}$ : Ομογενής: $y_{n+2} - 10y_{n+1} + 25y_n = 0$

Χαραχτ. Εξίσωση: $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0 \Rightarrow \lambda = 5$ διπλή ρίζα.

Άρα έχουμε 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της Ομογενούς: $5^n$ και $n5^n$. Τότε

$$y_n^{(\Gamma\Omicron)} = c_1 5^n + c_2 n 5^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Θα υπολ. και την $y_n^{(\mu\Mu\Omicron)}$. Έχουμε $f_n = 4 \cdot 5^n$. Άρα $P(n) = 4$, $n = 0, 1, \ldots$ $\beta = 5$, $A = 1$, $\gamma = 0$. Άρα

$$y_n^{(\mu\Mu\Omicron)} = n^p 5^n C, \quad C \text{ σταθερά.}$$

Θα υπολ. το ρ: Παίρνουμε τον αριθμό $\lambda = 5(\cos\gamma + i\sin\gamma) =$ 5 διπλή ρίζα της Χαρακτ. Εξίσωσης. Άρα $\rho = 2$. Επομένως

$$y_n^{(\text{ΜΜΟ})} = n^2 5^n C.$$ Θα υπολ. τη σταθερά $C$:

Από την Εξίσωση έχουμε:

$$y_{n+2}^{(\text{ΜΜΟ})} - 10\, y_{n+1}^{(\text{ΜΜΟ})} + 25\, y_n^{(\text{ΜΜΟ})} = 4\cdot 5^n \Rightarrow (n+2)^2 5^{n+2} C - 10(n+1)^2 5^{n+1} C +$$

$$+ 25 n^2 5^n C = 4\cdot 5^n \Rightarrow 25(n^2+4n+4)C - 50(n^2+2n+1)C + 25n^2 C = 4$$

$$\Rightarrow [(25n^2 + 100n + 100) + (50n^2 - 100n - 50)]C + 25n^2 C = 4$$

$$\Rightarrow 100C - 50C = 4 \Rightarrow C = \frac{4}{50} \Rightarrow C = \frac{2}{25},$$ Τότε $y_n^{(\text{ΜΜΟ})} = \frac{2}{25} n^2 5^n$

Άρα

$$y_n^{(\text{ΓΜΟ})} = c_1 5^n + c_2 n 5^n + \frac{2}{25} n^2 5^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Παρατήρηση: Έστω ότι στο πρόβλημα θέλουμε τη λύση $y_n$ τέτοια ώστε $y_0 = 1$, $y_1 = 2$.

$$y_0 = c_1 5^0 + c_2 0 \cdot 5^0 + \frac{2}{25} 0^2 5^0 = 1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$y_1 = 5c_1 + 5c_2 + \frac{2}{25} 5 = 2 \Rightarrow 5c_2 = -3 - \frac{2}{5} = -\frac{17}{5} \Rightarrow c_2 = -\frac{17}{25}$$

Άρα $$y_n = 5^n - \frac{17}{25} n 5^n + \frac{2}{25} n^2 5^n.$$

Άσκηση: Να βρείτε την γενική λύση της

$$y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 3\cdot 2^n, \quad n=0,1,\ldots$$

Λύση. $y_n^{(ΓΜΟ)} = y_n^{(ΓΟ)} + y_n^{(ΜΜΟ)}$

$y_n^{(ΓΟ)}$: Χαραχτ. Εξίσωση: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$. Άρα

$$y_n^{(ΓΟ)} = c_1 2^n + c_2 \cdot 5^n, \quad n=0,1,\ldots$$

$y_n^{(ΜΜΟ)}$: $f_n = 3\cdot 2^n$. Άρα $P(n)=3$, $\beta=2$, $A=1$, $r=0$

Επομένως $y_n^{(ΜΜΟ)} = n^p C 2^n$. Θα υπολ. τη σταθερά $p$:

Παίρνουμε τον αριθμό $\lambda = \beta(\cos\gamma + i\sin\gamma) = 2$. απλή ρίζα της Χαραχτ. Εξίσωσης. Άρα $p=1$. Επομένως $y_n^{(ΜΜΟ)} = Cn2^n$. Άρα

$C(n+2)2^{n+2} - 7C(n+1)2^{n+1} + 10Cn2^n = 3\cdot 2^n \Rightarrow 4C(n+2) - 14C(n+1) + 10Cn = 3$

$8C - 14C = 3 \Rightarrow C = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$. Άρα $y_n^{(ΜΜΟ)} = -\frac{1}{2} n 2^n$.

Άρα $y_n^{(\Gamma\Mu\Omega)} = c_1 2^n + c_2 5^n - \frac{1}{2} n 2^n$, $n=0,1,\ldots$

Παρατήρηση: Έστω ότι έχουμε την εξίσωση:

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = f_n^{(1)} + f_n^{(2)} + \cdots + f_n^{(K)}$$

όπου $f_n^{(i)} = p^{(i)}(n)\, \theta_i^n \left( A_i \cos(\gamma_i n) + B_i \sin(\gamma_i n) \right)$, $i=1,2,\ldots,K$.

Ζητούμε τη μερική λύση $y_n^{(\Mu\Mu\Omega)}$. Θεωρούμε τις εξισώσεις

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = f_n^{(i)}, \quad i=1,2,\ldots,K.$$

Με τη μέθοδο προσδιοριστέων συντελεστών υπολ. τις μερικές λύσεις $y_n^{(i,\Mu\Mu\Omega)}$, $i=1,2,\ldots,K$. Τότε $y_n^{(\Mu\Mu\Omega)} = y_n^{(1,\Mu\Mu\Omega)} + y_n^{(2,\Mu\Mu\Omega)} + \cdots + y_n^{(K,\Mu\Mu\Omega)}$.

Άσκηση Να βρείτε τη γενική λύση της.

$$y_{n+2} + 6y_{n+1} + 9y_n = 2 - 4\cdot 3^n, \quad n=0,1,\ldots$$

Λύση: $f_n = 2 - 4\cdot 3^n$. Παίρνουμε $f_n^{(1)} = 2$, $f_n^{(2)} = -4\cdot 3^n$. Θεωρούμε τις εξισώσεις

$$y_{n+2} + 6y_{n+1} + 9y_n = 2 \qquad (A).$$

$$y_{n+2} + 6y_{n+1} + 9y_n = -4\cdot 3^n \qquad (B).$$

Ισχύει $y_n^{(ΓΜΟ)} = y_n^{(ΓΟ)} + y_n^{(ΜΟ)}$

$y_n^{(ΓΟ)}$: Χαρακτ. εξίσωση: $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = -3$ διπλή. Άρα

$$y_n^{(ΓΟ)} = c_1(-3)^n + c_2 n(-3)^n, \quad n=0,1,\ldots$$

Θα υπολ. την $y_n^{(ΜΟ)} = y_n^{(Α,ΜΟ)} + y_n^{(Β,ΜΟ)}$.

$y_n^{(A,\text{ΜΟ})}$ : $f_n^{(1)} = 2$. Άρα $y_n^{(A,\text{ΜΟ})} = n^{p_A} C$

Θα υπολ. την $p_A$: Παίρνουμε τον αριθμό: $6_A(\cos\gamma + i\sin\gamma) = 1$

δεν είναι ρίζα της χαρακτ. εξίσωσης, άρα $p_A = 0$. Επομένως

$y_n^{(A,\text{ΜΟ})} = C$. Από την (Α) έχουμε $C + 6C + 9C = 2 \Rightarrow$

$C = \frac{2}{16} \Rightarrow C = \frac{1}{8}$. Επομένως $y_n^{(A,\text{ΜΟ})} = \frac{1}{8}$, $n = 0, 1, \ldots$

Θα υπολ και την $y_n^{(B,\text{ΜΟ})}$ : Εδώ $f_n^{(2)} = -4 \cdot 3^n$, $6 = 3$, $p(n) = -4$

Η $y_n^{(B,\text{ΜΟ})} = D \cdot n^{p_B} \cdot 3^n$ Υπολ. του $p_B$: Παίρνουμε τον αριθμό $6(\cos\gamma + i\sin\gamma) =$

3 δεν είναι ρίζα της χαρακτ. εξίσωσης, άρα $p_B = 0$. Επομένως

$y_n^{(B,\text{ΜΟ})} = D \cdot 3^n$. Από την (Β) έχουμε: $D3^{n+2} + 6D3^{n+1} + 9D3^n = -4 \cdot 3^n$

Άρα $9D + 18D + 9D = -4 \Rightarrow D = -\frac{4}{36} = -\frac{1}{9}$. Επομένως $y_n^{(B,\text{ΜΟ})} = -\frac{1}{9} 3^n$.

Άρα $y_n^{(\text{ΜΟ})} = \frac{1}{8} - \frac{1}{9} 3^n$ Άρα $y_n^{(\text{ΓΜΟ})} = c_1(-3)^n + c_2 n(-3)^n + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} 3^n$, $n = 0, 1, \ldots$

Άσκηση. Να βρείτε την γενική λύση της

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 6n$$

Λύση. $y_n^{(\text{ΓΜΟ})} = y_n^{(\text{ΓΟ})} + y_n^{(\text{ΜΟ})}$.

$y_n^{(\text{ΓΟ})}$: Χαραχτ. Εξίσωση: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ διπλή.

Άρα $y_n^{(\text{ΓΟ})} = c_1 1^n + c_2 n 1^n \Rightarrow y_n^{(\text{ΓΟ})} = c_1 + c_2 n$, $n = 0, 1, \ldots$

$y_n^{(\text{ΜΟ})}$: $f_n = 6 \cdot n$ Έχουμε $P(n) = 6n$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $A = 1$

Άρα $y_n^{(\text{ΜΟ})} = n^p \cdot 1^n \cdot C(n)$, $\deg C(n) = \deg P(n) = 1$. Επομένως

$C(n) = Dn + B$. Θα υπολ. το p: Παίρνουμε τον αριθμό $\beta(\cos\gamma + i\sin\gamma) = 1$

διπλή ρίζα της χαραχτ. Εξίσωσης Άρα $y_n^{(\text{ΜΟ})} = n^2 \cdot (Dn + B) = Dn^3 + Bn^2$.

Από την αρχική Εξίσωση:

$$D(n+2)^3 + B(n+2)^2 - 2D(n+1)^3 - 2B(n+1)^2 + Dn^3 + Bn^2 = 6n \Rightarrow D(n^3 + 3n^2 \cdot 2 + 3n \cdot 2^2 + 2^3)$$

$$+ B(n^2 + 4n + 4) - 2D(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 2B(n^2 + 2n + 1) + Dn^3 + Bn^2 = 6n \Rightarrow 6Dn + 6D + 2B = 6n$$

Άρα $6D = 6 \Rightarrow D = 1$ και $6D + 2B = 0 \Rightarrow 2B = -6 \Rightarrow B = -3$.

Επομένως $y_n^{(\mu\mu o)} = n^3 - 3n^2$

Άρα $y_n^{(\gamma\mu o)} = c_1 + c_2 n + n^3 - 3n^2$, $n = 0, 1, \ldots$

Άσκηση. Να βρείτε την γενική λύση της

$$y_{n+2} + y_n = -2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Λύση: $y_n^{(\gamma\mu o)} = y_n^{(\gamma o)} + y_n^{(\mu\mu o)}$.

$y_n^{(\gamma o)}$: Χαρακτ. Εξίσωση: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$

Παίρνουμε την $\lambda_1 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. Άρα οι 2 γραμμικά ανεξάρτητες

λύσεις της ομογενούς είναι οι: $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $n = 0, 1, \ldots$

$$y_n^{(\gamma o)} = c_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad c_1, c_2 \text{ σταθερές}$$

$y_n^{(\mu\text{Μ}\Theta)}$ : Εδώ $f_n = -2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Έχουμε $p(n)=-2$, $\beta=1$, $A=1$, $\gamma=\frac{\pi}{2}$, $B=0$.

Επομένως $y_n^{(\mu\text{Μ}\Theta)} = n^p\, 1^n \left(C\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + D\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$

C, D πολυώνυμα μηδενικού βαθμού διότι και το $p(n)=-2$ είναι μηδενικού βαθμού. Υπολ του p: Παίρνουμε τον αριθμό $\beta(\cos\gamma + i\sin\gamma) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ είναι απλή ρίζα της Χαρακτ Εξίσωσης, άρα $p=1$. Επομένως

$y_n^{(\mu\text{Μ}\Theta)} = Cn\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + Dn\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Από την $y_{n+2} + y_n = -2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

έχουμε: $C(n+2)\cos\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + D((n+2)\sin\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + Cn\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + Dn\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow -C(n+2)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - D(n+2)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + Cn\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + Dn\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$-Cn\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2C\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - Dn\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2D\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + Cn\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + Dn\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow -2C\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2D\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow -2C=-2\,;\ -2D=0 \Rightarrow C=1,\ D=0.$

Άρα $y_n^{(\text{ΜΟ})} = n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Τελικά

$$y_n^{(\text{ΓΜΟ})} = c_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n=0,1,\ldots$$

## Μη γραμμικές εξισώσεις Διαφορών:

Θεωρούμε την εξίσωση $y_{n+1} = \frac{a y_n + b}{c y_n + d}$, $n=0,1,\ldots$

με τον περιορισμό $ad - cb \neq 0$. Θεωρούμε την αλγ. εξίσωση:

$$\lambda = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} \Rightarrow c\lambda^2 + d\lambda = a\lambda + b \Rightarrow c\lambda^2 + (d-a)\lambda - b = 0$$

Θεωρούμε ότι η αλγ. εξίσωση έχει 2 πραγμ. ρίζες $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Παίρνουμε: $$\frac{y_{n+1}-\lambda_1}{y_{n+1}-\lambda_2} = \frac{\frac{ay_n+b}{cy_n+d}-\frac{a\lambda_1+b}{c\lambda_1+d}}{\frac{ay_n+b}{cy_n+d}-\frac{a\lambda_2+b}{c\lambda_2+d}} =$$

$$= \frac{(ay_n+b)(c\lambda_1+d)-(a\lambda_1+b)(cy_n+d)}{(cy_n+d)(c\lambda_1+d)} = \frac{c\lambda_2+d}{c\lambda_1+d}\cdot\frac{y_n-\lambda_1}{y_n-\lambda_2}$$
$$\frac{(ay_n+b)(c\lambda_2+d)-(a\lambda_2+b)(cy_n+d)}{(cy_n+d)(c\lambda_2+d)}$$

Επομένως $$\frac{y_{n+1}-\lambda_1}{y_{n+1}-\lambda_2} = \frac{c\lambda_2+d}{c\lambda_1+d}\cdot\frac{y_n-\lambda_1}{y_n-\lambda_2}$$

Θέτουμε $u_n = \frac{y_n-\lambda_1}{y_n-\lambda_2} \Rightarrow \frac{y_{n+1}-\lambda_1}{y_{n+1}-\lambda_2} = u_{n+1}$. Άρα $u_{n+1} = \frac{c\lambda_2+d}{c\lambda_1+d}u_n$.

$\Rightarrow u_n = \left(\frac{c\lambda_2+d}{c\lambda_1+d}\right)^n u_0 \Rightarrow \frac{y_n-\lambda_1}{y_n-\lambda_2} = \left(\frac{c\lambda_2+d}{c\lambda_1+d}\right)^n \cdot \left(\frac{y_0-\lambda_1}{y_0-\lambda_2}\right)$, $n=0,1,\dots$

Άσκηση: Να λύσετε την $y_{n+1} = \frac{12y_n - 2}{9y_n + 3}$.

Λύση: Παίρνουμε την αλγ. εξίσωση $\lambda = \frac{12\lambda - 2}{9\lambda + 3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9\lambda^2 - 9\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{2}{3}$. Παίρνουμε τον λόγο

$$\frac{y_{n+1} - \lambda_1}{y_{n+1} - \lambda_2} = \frac{y_{n+1} - \frac{1}{3}}{y_{n+1} - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{12y_n - 2}{9y_n + 3} - \frac{1}{3}}{\frac{12y_n - 2}{9y_n + 3} - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{36y_n - 6 - 9y_n - 3}{3(9y_n + 3)}}{\frac{36y_n - 6 - 18y_n - 6}{3(9y_n + 3)}} =$$

$$\frac{27y_n - 9}{18y_n - 12} = \frac{9}{6}\frac{3y_n - 1}{3y_n - 2} = \frac{3}{2}\frac{3y_n - 1}{3y_n - 2} =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{y_n - \frac{1}{3}}{y_n - \frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{y_{n+1} - \frac{1}{3}}{y_{n+1} - \frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\frac{y_n - \frac{1}{3}}{y_n - \frac{2}{3}}.$$ Θέτουμε $u_n = \frac{y_n - \frac{1}{3}}{y_n - \frac{2}{3}}$

Άρα $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n \Rightarrow u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n u_0 \Rightarrow \frac{y_n - \frac{1}{3}}{y_n - \frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{y_0 - \frac{1}{3}}{y_0 - \frac{2}{3}}\right)$

Θεωρούμε την εξίσωση διαφορών $x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}$, $n = 0, 1, \ldots$

όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ και $ad - cb \neq 0$.

Παίρνουμε την αλγ. εξίσωση: $\lambda = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} \Rightarrow$

$$c\lambda^2 + (d-a)\lambda - b = 0$$

Θεωρούμε ότι η αλγ. εξίσωση έχει μια πραγματική ρίζα διπλή.

Έστω $\lambda$ η διπλή ρίζα. Από την εξίσωση παίρνουμε:

$$c\lambda^2 + d\lambda - a\lambda - b = 0 \Rightarrow \lambda(c\lambda - a) = b - d\lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{b - d\lambda}{c\lambda - a}}$$

Επίσης ισχύει: $2\lambda = -\left(\frac{d-a}{c}\right) \Rightarrow \boxed{2\lambda = \frac{a-d}{c}}$

Έστω $x_n$ λύση της εξίσωσης διαφορών με $x_0 \in \mathbb{R}$. Παίρνουμε:

$$\frac{1}{x_{n+1} - \lambda} = \frac{1}{\frac{ax_n + b}{cx_n + d} - \lambda} = \frac{cx_n + d}{ax_n + b - \lambda cx_n - \lambda d} = \frac{cx_n + d}{x_n(a - \lambda c) + b - \lambda d} =$$

$$= \frac{1}{a - \lambda c} \frac{cx_n + d}{x_n + \frac{b - \lambda d}{a - \lambda c}} = \frac{1}{a - \lambda c} \frac{cx_n + d}{x_n - \lambda} = \frac{a - \lambda c - a + \lambda c + cx_n + d}{(a - \lambda c)(x_n - \lambda)} =$$

$$= \frac{a-\lambda c}{(a-\lambda c)(x_n-\lambda)} + \frac{-a+\lambda c+cx_n+d}{(a-\lambda c)(x_n-\lambda)} = \frac{1}{x_n-\lambda} + \frac{-a+\lambda c+cx_n+d}{(a-\lambda c)(x_n-\lambda)}$$

$$= \frac{1}{x_n-\lambda} + \frac{-\lambda c+\lambda c+cx_n}{(a-\lambda c)(x_n-\lambda)} = \frac{1}{x_n-\lambda} + \frac{-\lambda c+cx_n}{(a-\lambda c)(x_n-\lambda)} =$$

$$= \frac{1}{x_n-\lambda} + \frac{c(x_n-\lambda)}{(a-\lambda c)(x_n-\lambda)}$$

Τελικά καταλήξαμε στην εξίσωση:

$$\frac{1}{x_{n+1}-\lambda} = \frac{c}{a-\lambda c} + \frac{1}{x_n-\lambda}, \quad n=0,1,\ldots$$

Θέτουμε $v_n = \frac{1}{x_n-\lambda}$. Τότε $v_{n+1} = \frac{c}{a-\lambda c} + v_n$, $n=0,1,\ldots$

$$v_n = v_0 + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{c}{a-\lambda c} \Rightarrow v_n = v_0 + \frac{nc}{a-\lambda c} \Rightarrow \frac{1}{x_n-\lambda} = \frac{1}{x_0-\lambda} + \frac{nc}{a-\lambda c}, \quad n=0,1,\ldots$$

Άσκηση. Να λύσετε την εξίσωση:

$$y_{n+1} = \frac{6y_n - 4}{y_n + 2}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

Λύση. Παίρνουμε την αλγ. εξίσωση: $\lambda = \frac{6\lambda - 4}{\lambda + 2} \Rightarrow$

$\lambda^2 + 2\lambda = 6\lambda - 4 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ διπλή.

Παίρνουμε τον εξής:

$$\frac{1}{y_{n+1} - 2} = \frac{1}{\frac{6y_n - 4}{y_n + 2} - 2} = \frac{y_n + 2}{6y_n - 4 - 2y_n - 4} = \frac{y_n + 2}{4y_n - 8} =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{y_n + 2}{y_n - 2} = \frac{1}{4} \frac{y_n - 2 + 4}{y_n - 2} = \frac{1}{4} \frac{y_n - 2}{y_n - 2} + \frac{1}{4} \frac{4}{y_n - 2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y_{n+1} - 2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{y_n - 2}.$$ Θέτουμε $v_n = \frac{1}{y_n - 2}$. Τότε

$$v_{n+1} = \frac{1}{4} + v_n \Rightarrow v_n = v_0 + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{4} \Rightarrow v_n = v_0 + \frac{n}{4} \Rightarrow \frac{1}{y_n - 2} = \frac{1}{y_0 - 2} + \frac{n}{4},$$

$n = 0, 1, \ldots$

## Ποιοτική Μελέτη των λύσεων των Εξισώσεων Διαφορών.

### Σημεία Ισορροπίας:

**Ορισμός:** Θεωρούμε την εξίσωση πρώτης τάξης

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n=0,1,\ldots \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ συνεχής.} \qquad (1)$$

Ένα σημείο $\bar{x}\in\mathbb{R}$ καλείται σημείο ισορροπίας για την (1) εάν ισχύει $\bar{x}=f(\bar{x})$. Αυτό σημαίνει ότι η $x_n=\bar{x}$, $n=0,1,\ldots$ είναι μια σταθερή λύση της (1)

**Παράδειγμα.** Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της εξίσωσης

$$x_{n+1} = 2x_n(1-x_n), \quad n=0,1,\ldots$$

**Λύση:** Εδώ $f(x)=2x(1-x)$. Θέτουμε $x=f(x)$ δηλ. $x=2x(1-x)$

$\Rightarrow \bar{x}_1=0$, $\bar{x}_2=\frac{1}{2}$ είναι τα σημεία ισορροπίας για την (1).

Πρόταση. Έστω $f:[a,b]\to[a,b]$ και $f$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε η εξίσωση διαφορών (1) έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας.

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$. Η $g$ είναι προφανές ότι είναι συνεχής στο $[a,b]$. Παίρνουμε: $g(a)=f(a)-a\geq 0$. Επίσης $g(b)=f(b)-b\leq 0$. Άρα υπάρχει $c\in[a,b]$ τέτοιο ώστε $g(c)=0\Rightarrow f(c)=c$. Επομένως η (1) έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας.

Πρόταση. Έστω $I=[a,b]$ και $f$ μια συνεχής συνάρτηση στο $I$. Υποθέτουμε ότι: $I \subseteq f(I)$. Τότε η (1) έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας.

Απόδειξη. Εφόσον $I \subseteq f(I)$ θα υπάρχει $c \in [a,b]$ τέτοιος ώστε $a=f(c)$ Ομοίως θα υπάρχει $d \in [a,b]$ τέτοιος ώστε $b=f(d)$ Παίρνουμε τη συνάρτηση $f(x)-x=g(x)$ η οποία είναι προφανές ότι είναι συνεχής. Παίρνουμε $g(c)=f(c)-c=a-c \leq 0$ $g(d)=f(d)-d=b-d \geq 0$. Άρα υπάρχει αριθμός $\bar{x} \in I$ τέτοιος ώστε $g(\bar{x})=0 \Rightarrow f(\bar{x})=\bar{x}$. Άρα το $\bar{x}$ σημείο ισορροπίας για την (1).

Άσκηση. Έστω η εξίσωση διαφορών (διακριτή εξίσωση)

$$x_{n+1} = ax_n + (b+cx_n)e^{-x_n}, \quad n=0,1,\dots$$

Θεωρούμε ότι $0<a,c<1$, $b>1$. Τότε η εξίσωση έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας.

Λύση Θέτουμε $F(x) = ax + (b+cx)e^{-x}$ και $G(x) = F(x) - x$. Εφόσον η $F$ είναι συνεχής είναι προφανές ότι και η $G$ είναι συνεχής. Παίρνουμε:

$G(0) = F(0) = b > 0$. Επίσης $G(x) = ax + (b+cx)e^{-x} - x =$

$= (a-1)x + (b+cx)e^{-x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} G(x) = -\infty$. Άρα υπάρχει κάποιο $\bar{x}$:

$G(\bar{x}) = 0 \Rightarrow F(\bar{x}) = \bar{x}$. Άρα η εξίσωση έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας $\bar{x}$.

Παίρνουμε την $G'(x) = a-1 - e^{-x}(b+cx) + ce^{-x}$

$\Rightarrow G'(x) = a-1 + e^{-x}(c-b-cx) = a-1 + (c(1-x)-b)e^{-x}$

Εάν $x>1$ τότε είναι προφανές ότι $G'(x)<0$

Έστω $x \leq 1$, τότε $c(1-x)-b \leq 0$, άρα πάλι $G'(x)<0$ Επομένως η $G$ είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα το $\bar{x}$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας.

## Μελέτη της Περατότητας των λύσεων.

Ορισμός: Μια ακολουθία $x_n$ είναι φραγμένη από πάνω και από κάτω από θετικούς αριθμούς εάν υπάρχουν $K, M > 0$ τέτοιοι ώστε

$$K \leq x_n \leq M, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Άσκηση. Θεωρούμε την

$$x_{n+1} = \frac{a}{c + dx_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

όπου $a, c, d$ θετικοί αριθμοί όπως και η αρχική τιμή $x_0$.

Να δείξετε ότι κάθε λύση $x_n$ είναι φραγμένη από πάνω και από κάτω από θετικούς αριθμούς.

Λύση: Έστω $x_n$ τυχούσα λύση της εξίσωσης με $x_0$ θετικό.

$$x_n = \frac{a}{c + dx_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots \text{ ισχύει } x_n = \frac{a}{c + dx_{n-1}} < \frac{a}{c}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Επομένως η $x_n$ είναι φραγμένη από πάνω από θετικό αριθμό, το $\frac{a}{c} = M$.

Θα δείξουμε ότι η $x_n$ είναι και κάτω φραγμένη από θετικό αριθμό. Έχουμε:

$$x_n = \frac{a}{c + d x_{n-1}} \quad \text{και} \quad x_n < \frac{a}{c}, \; n = 1, 2, \ldots$$

Για $n \geq 2$ είναι προφανές ότι $x_n \geq \dfrac{a}{c + d\frac{a}{c}}$, $n \geq 2$

Επομένως $x_n \geq \min\left\{x_1, \dfrac{a}{c + d\frac{a}{c}}\right\}$, $n = 1, 2, \ldots$

Άρα παίρνουμε $k = \min\left\{x_1, \dfrac{a}{c + d\frac{a}{c}}\right\}$.

## Σύγκλιση των ακολουθιών σε σημείο ισορροπίας.

Ορισμός: Έστω $x_n$ μια ακολουθία, $x_n \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε μια αύξουσα ακολουθία $r_n$, $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$. Τότε η $x_{r_n}$ καλείται υπακολουθία της $x_n$.

Παράδειγμα. Έστω η ακολουθία $x_n = \frac{3+n}{2+n}$, $n=1,2,\dots$.

Θεωρούμε την $r_n = 2^n$, $n=1,2,\dots$. Τότε η

$x_{r_n} = \frac{3+2^n}{2+2^n}$, $n=1,2,\dots$ είναι υπακολουθία της $x_n$.

Ορισμός. Ένας αριθμός $l$ καλείται οριακός αριθμός για την $x_n$ εάν υπάρχει υπακολουθία της $x_n$ που να συγκλίνει στο $l$.

Πρόταση: Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια υπακολουθία συγκλίνουσα

Παράδειγμα: Έστω $x_n$

$$x_n = \begin{cases} 2 + \frac{1}{n} & n = 2k \\ 3 + \frac{n}{n+1} & n = 2k+1 \end{cases}$$

Η ακολουθία $x_n$ δεν συγκλίνει. Έχει 2 υπακολουθίες

τις $x_{2k} = 2 + \frac{1}{2k}$, $k=1,2,\ldots$ όπου $\lim_{k\to\infty} x_{2k} = 2$

και την υπακολουθία $x_{2k+1} = 3 + \frac{2k+1}{2k+2}$ όπου $\lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = 4$.

Εδώ υπάρχουν 2 οριακοί αριθμοί το 2 και το 4.

Η ακολουθία $x_n$ δεν έχει όριο διότι $\lim_{n\to\infty} \inf x_n = 2$ και

$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = 4$

Ορισμός: Θεωρούμε μια φραγμένη ακολουθία $x_n$. Τότε

- ο μικρότερος οριακός αριθμός καλείται $\liminf_{n\to\infty} x_n$,
- ο μεγαλύτερος οριακός αριθμός καλείται $\limsup_{n\to\infty} x_n$.

Πρόταση. Υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} x_n$ εάν και μόνο εάν $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$.

Πρόταση Έστω $x_n$ μια φραγμένη ακολουθία. Τότε $\ell = \liminf_{n\to\infty} x_n$ εάν ισχύουν:

a) $\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \ell - \epsilon \leq x_n$

b) $\forall m \in \mathbb{N} \ \exists \ m_0 \geq m$ τέτοιο ώστε: $x_{m_0} \leq \ell + \epsilon$.

Επίσης $L = \limsup_{n\to\infty} x_n$ εάν ισχύουν:

a) $\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad x_n \leq L + \epsilon$.

b) $\forall m \in \mathbb{N} \ \exists \ m_0 \geq m$ τέτοιο ώστε $L - \epsilon \leq x_{m_0}$

Άσκηση: Να δείξετε ότι κάθε θετική λύση της

$$x_{n+1} = \frac{a}{b + d x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$a, b, d \in (0, \infty)$ συγκλίνει στο μοναδικό σημείο ισορροπίας της εξίσωσης.

Λύση: Θα δείξουμε ότι η εξίσωση έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας

Παίρνουμε $x = \frac{a}{b + dx} \Rightarrow dx^2 + bx - a = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ad}}{2d}$

Η εξίσωση έχει μοναδικό θετικό σημείο ισορροπίας το $\bar{x} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ad}}{2d}$.

Έστω $x_n$ τυχούσα λύση της εξίσωσης με $x_0 > 0$.

Θα δείξουμε ότι $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$. Θεωρούμε

$L = \limsup_{n\to\infty} x_n$ και $\ell = \liminf_{n\to\infty} x_n$

Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε:

$(\forall \epsilon>0)\ \exists n_1 \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq n_1:\ \ell-\epsilon \leq x_n$

$(\forall \epsilon>0)\ \exists n_2 \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq n_2:\ x_n \leq L+\epsilon$

Άρα $(\forall \epsilon>0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N}):\ \forall n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}:\ \ell-\epsilon \leq x_n \leq L+\epsilon$

Παίρνουμε ένα $m = n_0+1$, τότε θα υπάρχει $k \geq m$:

$$x_k \leq \ell+\epsilon \Rightarrow \frac{a}{b+dx_{k-1}} \leq \ell+\epsilon \quad \text{Αλλά } k \geq n_0+1 \Rightarrow k-1 \geq n_0$$

Άρα $x_{k-1} \leq L+\epsilon \Rightarrow \dfrac{a}{b+d(L+\epsilon)} \leq \dfrac{a}{b+dx_{k-1}} \leq \ell+\epsilon \Rightarrow \dfrac{a}{b+d(L+\epsilon)} \leq \ell+\epsilon$

$\Rightarrow$ όταν $\epsilon \to 0$ έχουμε: $\boxed{\dfrac{a}{b+dL} \leq \ell}$

Παίρνουμε ότι $m = n_0+1$ τότε θα υπάρχει $s \geq m$ τέτοιο ώστε

$L-\epsilon \leq x_s = \dfrac{a}{b+dx_{s-1}} \leq \dfrac{a}{b+d(\ell-\epsilon)}$ Τότε $\epsilon \to 0$ έχουμε $\boxed{L \leq \dfrac{a}{b+d\ell}}$

Πήραμε τις σχέσεις $\frac{a}{b+dL} \le \ell$ και $L \le \frac{a}{b+d\ell}$

Έχουμε: $\frac{aL}{b+dL} \le \ell L$ και $L\ell \le \frac{a\ell}{b+d\ell}$. Τότε

$$\frac{aL}{b+dL} \le \frac{a\ell}{b+d\ell} \Rightarrow bL + d\ell L \le b\ell + d\ell L \Rightarrow b(L-\ell) \le 0$$

Εφόσον $b>0$ παίρνουμε $L-\ell \le 0 \Rightarrow L=\ell \Rightarrow$ υπάρχει το

$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$. Από την $x_{n+1} = \frac{a}{b+dx_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{a}{b+d\lim_{n\to\infty} x_n}$

$\Rightarrow \bar{x} = \frac{a}{b+d\bar{x}}$. Άρα η $x_n$ συγκλίνει στο μοναδικό θετικό

σταθερό ισορροπίας $\bar{x}$.

Άσκηση Έστω η εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης

$$x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}, \quad n=0,1,\ldots \qquad (1)$$

όπου $a,b,c,d \in (0,\infty)$ και $0 < \frac{a}{d} < 1$, $ad - cb > 0$

Να δείξετε ότι κάθε λύση της εξίσωσης είναι φραγμένη από θετικούς αριθμούς

Λύση Έχουμε $x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d} < \frac{ax_n + b}{d}$, $n=0,1,\ldots$

Άρα έχουμε ότι

$$x_{n+1} < \frac{a}{d} x_n + \frac{b}{d}, \quad n=0,1,\ldots$$

Παίρνουμε την γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης:

$$y_{n+1} = \frac{a}{d} y_n + \frac{b}{d}, \quad n=0,1,\ldots \qquad (2)$$

Θέλουμε τη λύση $y_n$ της (2) τέτοια ώστε $y_0 = x_0$.

Θεωρούμε την ομογενή της (2): $y_{n+1} = \frac{a}{d} y_n$, $n = 0, 1 \ldots$

Τότε η γενική λύση της ομογενούς $y_n^{(ΟΜ)} = \left(\frac{a}{d}\right)^n K$, K σταθερά

Θα βρούμε και μια μερική λύση $y_n^{(ΜΜ)}$: Θέτουμε $y_n = D$

Από την (2) παίρνουμε: $D = \frac{a}{d} D + \frac{b}{d} \Rightarrow D\left(1 - \frac{a}{d}\right) = \frac{b}{d} \Rightarrow$

$D = \frac{b}{d-a}$. Τότε

$$y_n = \left(\frac{a}{d}\right)^n K + \frac{b}{d-a}$$

Υπολογίζουμε τη σταθερά K από τη σχέση $y_0 = x_0$.

Εφόσον $0 < \frac{a}{d} < 1$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{d}\right)^n = 0$. Επομένως $y_n$ φραγμένη

από θετικό αριθμό, έχουμε

$$x_1 < \frac{a}{d} x_0 + \frac{b}{d} = \frac{a}{d} y_0 + \frac{b}{d} = y_1$$

$$x_2 < \frac{a}{d} x_1 + \frac{b}{d} < \frac{a}{d} y_1 + \frac{b}{d} = y_2$$

$x_n < y_n$. Άρα και η $x_n$ είναι φραγμένη από πάνω από θετικό αριθμό

Επομένως υπάρχει θετικός αριθμός $M$ τέτοιος ώστε $x_n \leq M$, $n \in \mathbb{N}$.

Έχουμε $x_{n+1} = \dfrac{ax_n + b}{cx_n + d} > \dfrac{b}{cx_n + d} > \dfrac{b}{cM + d}$

Άρα η $x_n$ φραγμ. από κάτω από θετικό αριθμό.

**Άσκηση.** Έστω η εξίσωση δεύτερης τάξης

$$x_{n+2} = A + \frac{x_n}{x_{n+1}}, \quad n=0,1,\dots \qquad (1)$$

Θεωρούμε ότι $A>1$. Υποθέτουμε ότι $x_0, x_1 > 0$. Να δείξετε ότι κάθε θετική λύση της εξίσωσης είναι φραγμένη από θετικούς αριθμούς.

**Λύση.** Πρώτα θα δείξουμε ότι η τυχαία λύση $x_n$ είναι φραγμένη από κάτω από θετικό αριθμό. Από την (1) είναι προφανές ότι

$x_n > A$, $n \geq 2$. Άρα $x_n > \min\{A, x_1, x_0\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι είναι φραγμένη και από πάνω.

Εφόσον $x_n > A$, $n \geq 2$ έχουμε ότι

$$x_{n+2} < A + \frac{x_n}{A}$$

Θεωρούμε την γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$y_{n+2} = \frac{y_n}{A} + A \qquad (2).$$

Θεωρούμε τη λύση $y_n$ της (2) τέτοια ώστε $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$.

Έχουμε

$$x_3 < A + \frac{x_1}{A} = A + \frac{y_1}{A} = y_3.$$

$$x_4 < A + \frac{x_2}{A} = A + \frac{y_2}{A} = y_4$$

$$x_5 < A + \frac{x_3}{A} < A + \frac{y_3}{A} = y_5$$

Εργαζόμενοι επαγωγικά έχουμε $x_n \le y_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Θα υπολ. τη λύση $y_n$ της (2). Έχουμε

$$y_{n+2} - \frac{1}{A} y_n = A$$

Θα βρούμε την γενική λύση της ομογενούς: $y_{n+2} - \frac{1}{A} y_n = 0$

Παίρνουμε χαρακτ. εξίσωση: $\lambda^2 - \frac{1}{A} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{A}}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{A}}$

Άρα η γενική λύση της ομογενούς: $y_n^{(\text{ΓΟ})} = c_1 \left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n$

Θα βρούμε και μια μερική λύση $y_n^{(\text{ΜΜΟ})}$.

Θέτουμε $y_n^{(\mu M O)} = C$. Τότε $C - \frac{1}{A}C = A \Rightarrow$

$$C\left(1 - \frac{1}{A}\right) = A \Rightarrow C = \frac{A^2}{A-1}$$

Επομένως η γενική λύση $y_n$ της (2) δίνεται

$$y_n = c_1\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n + c_2\left(-\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n + \frac{A^2}{A-1}$$

Τα $c_1$ και $c_2$ υπολογίζονται από τις $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$.

Εφόσον $A > 1$ έχουμε $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n = 0$ και $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n = 0$

Άρα η $y_n$ είναι φραγμένη από πάνω από θετικό αριθμό

Επομένως εφόσον $x_n \le y_n$ και η $x_n$ είναι φραγμένη από πάνω από θετικό αριθμό.

Άσκηση Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς αριθμούς να δείξετε ότι κάθε λύση της εξίσωσης

$$x_{n+2} = A + \frac{x_n}{x_{n+1}}, \quad n=0,1,\dots, \quad A>1, \quad x_0>0. \qquad (1)$$

συγκλίνει στο μοναδικό σημείο ισορροπίας της εξίσωσης.

Λύση. Έστω $x_n$ τυχούσα λύση της (1). Θεωρούμε

$L = \limsup_{n\to\infty} x_n$ και $\ell = \liminf_{n\to\infty} x_n$. Θα δείξουμε ότι $L=\ell$.

Εφόσον $L = \limsup_{n\to\infty} x_n$ έχουμε:

$(\forall \epsilon>0)(\exists n_1\in\mathbb{N})$: $\forall n\geq n_1$ $x_n < L+\epsilon$.

$(\forall m\in\mathbb{N})(\exists s\in\mathbb{N})$: $s\geq m$ : $L-\epsilon < x_s$.

επίσης $\ell = \liminf_{n\to\infty} x_n$. Τότε:

$(\forall \epsilon>0)(\exists n_2\in\mathbb{N})$: $\forall n\geq n_2$ $\ell-\epsilon \leq x_n$

$(\forall m\in\mathbb{N})(\exists s\in\mathbb{N})$: $s\geq m$ : $x_s < \ell+\epsilon$.

Παίρνουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε ισχύει ότι

$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists\, n_0 \in \mathbb{N}):\ \forall n \geq n_0:\quad \ell - \epsilon < x_n < L + \epsilon.$

Θεωρούμε $m = n_0 + 2 \in \mathbb{N}$. Για τον $m = n_0 + 2$ υπάρχει αριθμός $S \geq n_0 + 2$ τέτοιος ώστε $x_S < \ell + \epsilon$

Έχουμε

$$x_S = A + \frac{x_{S-2}}{x_{S-1}} < \ell + \epsilon$$

Ισχύει $S - 2 \geq n_0$ και $S - 1 \geq n_0$.

Άρα $A + \dfrac{\ell - \epsilon}{L + \epsilon} < A + \dfrac{x_{S-2}}{x_{S-1}} < \ell + \epsilon \Rightarrow A + \dfrac{\ell - \epsilon}{L + \epsilon} < \ell + \epsilon$

Για $\epsilon \to 0$ παίρνουμε $\boxed{A + \dfrac{\ell}{L} < \ell}$

Πάλι θεωρούμε το $m = n_0 + 2$. Για το $m = n_0 + 2$ υπάρχει ένας αριθμός $k \geq m = n_0 + 2$ τέτοιος ώστε

$$L - \epsilon \leq x_k$$

Αλλά $x_k = A + \frac{x_{k-2}}{x_{k-1}}$, έχουμε $k-2 \geq n_0 \Rightarrow k-1 \geq n_0$

Επομένως:

$$L - \epsilon \leq A + \frac{x_{k-2}}{x_{k-1}} \leq A + \frac{L+\epsilon}{\ell - \epsilon} \Rightarrow L - \epsilon \leq A + \frac{L+\epsilon}{\ell - \epsilon}$$

Για $\epsilon \to 0$ παίρνουμε:

$$\boxed{L \leq A + \frac{L}{\ell}}$$

Έχουμε τις σχέσεις: $A + \frac{\ell}{L} \leq \ell$ και $L \leq A + \frac{L}{\ell}$

$\Rightarrow AL + \ell \leq \ell L$ και $L\ell \leq A\ell + L$. Άρα $AL + \ell \leq A\ell + L$

$\Rightarrow A(L-\ell) \leq L - \ell \Rightarrow (A-1)(L-\ell) \leq 0 \Rightarrow L = \ell$. Επομένως υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} x_n$. Θεωρούμε $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.

Από την (1) έχουμε $\lim_{n\to\infty} x_{n+2} = A + \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} x_{n+1}} \Rightarrow \bar{x} = A + \frac{\bar{x}}{\bar{x}} \Rightarrow$

$\bar{x} = A + 1,$

επομένως κάθε θετική λύση της (1) συγκλίνει στο μοναδικό σημείο ισορροπίας $\bar{x} = A+1$ της (1)

Πρόταση Έστω $f: (0,\infty) \to (0,\infty)$. Θεωρούμε ότι η $f$ είναι φθίνουσα και συνεχής. Θεωρούμε επίσης ότι το αλγεβρικό σύστημα $M = f(m)$ και $m = f(M)$ έχει μοναδική λύση $m = M = \bar{x}$ όπου $\bar{x}$ είναι σημείο ισορροπίας για την εξίσωση διαφορών

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Έστω ένα διάστημα $[a,b]$ τέτοιο ώστε $f: [a,b] \to [a,b]$

Τότε κάθε λύση $x_n$ με $x_{n_0} \in [a,b]$ συγκλίνει στο $\bar{x}$ όταν $n \to \infty$.

Απόδειξη: Παίρνουμε $a=m_0$, $b=M_0$ Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων διαφορών: $m_{n+1}=f(M_n)$, $M_{n+1}=f(m_n)$, $n=0,1,\dots$

Έτσι έχουμε $m_0=a$, $M_0=b$. Οι λύσεις του συστήματος θα είναι: $m_n$ $M_n$. Έχουμε $f:[m_0,M_0]\to[m_0,M_0]$.

Παίρνουμε τη πρώτη σχέση

$$m_0\le M_0$$

$m_1=f(M_0)$ και $M_1=f(m_0)$. Από την $m_0\le M_0$ και επειδή η $f$ φθίνουσα έχουμε $f(M_0)\le f(m_0)\Rightarrow m_1\le M_1$ Τα $m_1, M_1\in[m_0,M_0]$.

Άρα έχουμε

$$m_0\le m_1\le M_1\le M_0$$

Ισχύει $m_2=f(M_1)$ και $M_2=f(m_1)$. $m_1\le M_1\Rightarrow f(M_1)\le f(m_1)\Rightarrow m_2\le M_2$

Από την $m_0\le m_1$ παίρνουμε $f(m_1)\le f(m_0)\Rightarrow M_2\le M_1$.

Από την $M_1\le M_0$ παίρνουμε $f(M_0)\le f(M_1)\Rightarrow m_1\le m_2$

Άρα:

$$m_0\le m_1\le m_2\le M_2\le M_1\le M_0$$

Εργαζόμενοι επαγωγικά παίρνουμε:

$$m_0 \le m_1 \le m_2 \le \cdots \le m_n \le M_n \le M_{n-1} \le \cdots \le M_1 \le M_0,$$

Άρα η ακολουθία $m_n$ είναι αύξουσα και η $M_n$ είναι φθίνουσα

Επίσης $m_n \in [a,b]$, $M_n \in [a,b]$ Άρα υπάρχουν τα $\lim_{n\to\infty} m_n$ και $\lim_{n\to\infty} M_n$

Έστω $m = \lim_{n\to\infty} m_n$ και $M = \lim_{n\to\infty} M_n$. Έχουμε το ζητούμενο

$M_{n+1} = f(m_n)$ και $m_{n+1} = f(M_n)$. Άρα $\lim_{n\to\infty} M_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(m_n) \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} M_{n+1} = f\left(\lim_{n\to\infty} m_n\right)$ εφόσον η $f$ συνεχής. Άρα $m = f(M)$

Ομοία $M = f(m)$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $m = M = \overline{x}$.

Έστω μια λύση $x_n$ της (1) με κάποιο $n_0$: $x_{n_0} \in [a,b] = [m_0, M_0]$

Έχουμε $m_0 \le x_{n_0} \le M_0 \Rightarrow f(M_0) \le f(x_{n_0}) \le f(m_0)$

$m_1 \le x_{n_0+1} \le M_1 \Rightarrow f(M_1) \le f(x_{n_0+1}) \le f(m_1) \Rightarrow m_2 \le x_{n_0+2} \le M_2$

και γενικά παίρνουμε $m_n \le x_{n_0+n} \le M_n$, $n \in \mathbb{N}$. Εφόσον

$\lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} M_n = \bar{x}$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} x_{n_0+n} = \bar{x} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.

Άσκηση. Έστω η εξίσωση διαφορών

$$x_{n+1} = \frac{a e^{b-cx_n}}{1+e^{b-cx_n}}, \quad n=0,1,\dots \quad a,b,c \in (0,\infty).$$

Θεωρούμε ότι $0<a-c<4$. Να δείξετε ότι κάθε λύση της εξίσωσης συγκλίνει στο μοναδικό σημείο ισορροπίας της εξίσωσης

Λύση. Θεωρούμε την $f(x) = \frac{a e^{b-cx}}{1+e^{b-cx}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{ac e^{b-cx}}{(1+e^{b-cx})^2} < 0$

Επομένως η f φθίνουσα

Θα βρούμε ένα διάστημα $[K, M]$ τέτοιο ώστε $f: [K,M] \to [K,M]$

$f(x) = \frac{a e^{b-cx}}{1+e^{b-cx}} \leq a$. Εφόσον η f φθίνουσα για κάθε $x \leq a$ έχουμε

$f(a) \leq f(x)$. Άρα αν $K = \frac{a e^{b-ca}}{1+e^{b-ca}}$ και $M=a$ έχουμε $f: [K,M] \to [K,M]$

Επομένως εάν $x_n$ λύση της (1) με $x_{n_0} \in [K, M]$ τότε

$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$,

Εφόσον $x_n$ λύση της (1) έχουμε $x_{n+1} = \frac{a e^{b-cx_n}}{1+e^{b-cx_n}} \leq a$, $n=0,1,\dots$

$\Rightarrow x_n \leq a$, $n=1,2,\dots$.

Η f φθίνουσα, άρα $f(a) \leq f(x_n) \Rightarrow \frac{a e^{b-ca}}{1+e^{b-ca}} \leq x_{n+1} \leq a$. Άρα

για $n \geq 2$ $x_n \in [K, M]$ Άρα $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.

Θεωρούμε το αλγ. ενδεχόμενα $m=f(M)$ και $M=f(m)$. Θα δείξουμε ότι η μοναδική λύση του συστήματος θα είναι $m=M=\bar{x}$ όπου $\bar{x}$ το μοναδικό σημείο ισορροπίας της εξίσωσης $x_{n+1}=f(x_n)$, Έχουμε

$$M=f(m)=\frac{ae^{b-cm}}{1+e^{b-cm}} \quad \text{και} \quad m=\frac{ae^{b-cM}}{1+e^{b-cM}}$$

Τότε $M-m=\frac{ae^{b-cm}}{1+e^{b-cm}}-\frac{ae^{b-cM}}{1+e^{b-cM}}=-\frac{cae^{b-c\xi}}{(1+e^{b-c\xi})^2}(m-M)$. (Θεώρημα μέσης τιμής με $\xi$ είναι ανάμεσα στους αριθμούς $m$ και $M$)

Τότε $|M-m|=\frac{cae^{b-c\xi}}{(1+e^{b-c\xi})^2}|M-m|$.

Θα δείξουμε ότι $\frac{e^{b-c\xi}}{(1+e^{b-c\xi})^2}<\frac{1}{4} \Rightarrow 4e^{b-c\xi}<(1+e^{b-c\xi})^2=1+2e^{b-c\xi}+e^{2(b-c\xi)}$

Άρα $1-2e^{b-c\xi}+e^{2(b-c\xi)}>0$ ισχύει. Άρα $\frac{ace^{b-c\xi}}{(1+e^{b-c\xi})^2}<4\cdot\frac{1}{4}<1$

Επομένως $m=M$. Επομένως $m=M=\bar{x}$

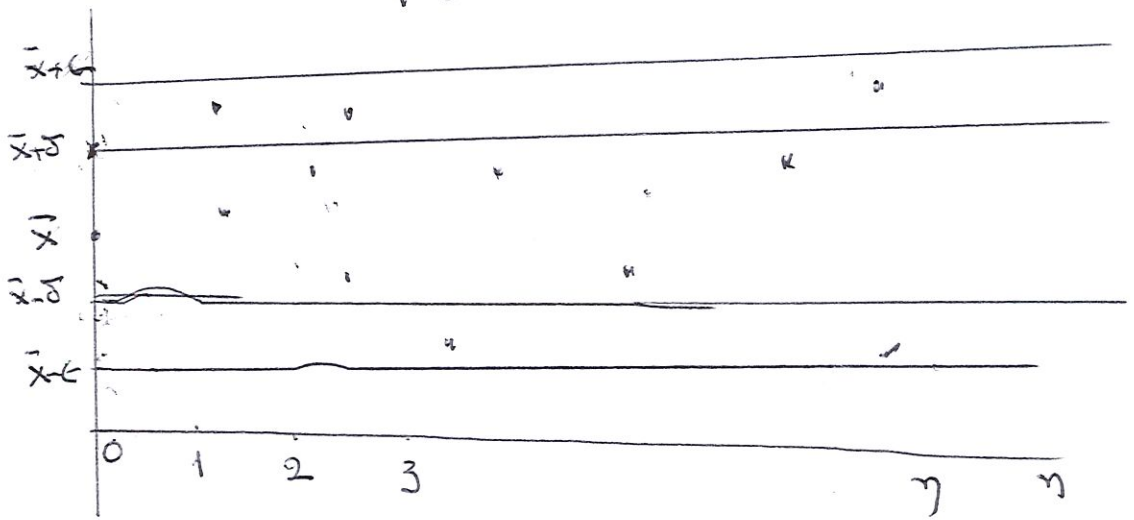
# Ευστάθεια Εξισώσεων Διαφορών Πρώτης Τάξης.

Ορισμός: Θεωρούμε την εξίσωση πρώτης τάξης $x_{n+1} = f(x_n)$, $n=0,1,\dots$

Έστω ότι η εξίσωση έχει ένα σημείο ισορροπίας $\bar{x}$: $(\bar{x} = f(\bar{x}))$. Τότε θα λέμε ότι το $\bar{x}$ είναι ευσταθές: εάν:

$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists \delta(\epsilon))$: $\forall x_0$: $|x_0 - \bar{x}| < \delta$ να έχουμε $|x_n - \bar{x}| < \epsilon$, $n \geq 0$

Σχήμα:



Παρατήρηση: Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Έχουμε την ακολουθία $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$

Έχουμε $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^{(2)}(x_0)$, $\ldots$ $x_n = f^{(n)}(x_0)$.

Έχουμε $\bar{x}$, το σταθερό ισορροπίας της $x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow \bar{x} = f(\bar{x})$. Είναι προφανές

ότι $f^{(n)}(\bar{x}) = \bar{x}$ $\left( x_1 = f(x_0) \underset{x_0 = \bar{x}}{\Rightarrow} x_1 = f(\bar{x}) = \bar{x}, \quad x_2 = f(x_1) = f(\bar{x}), \ldots x_n = f(\bar{x}) = \bar{x} \right)$.

Τότε εάν το $\bar{x}$ είναι ευσταθές έχουμε:

$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta(\epsilon))$: $\forall x_0$: $|x_0 - \bar{x}| < \delta$ να έχουμε $|f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(\bar{x})| < \epsilon$, $n > 0$

Άρα η $f^{(n)}(x)$ είναι συνεχής στο $\bar{x}$, για κάθε $n$.

Ορισμός. Το $\bar{x}$ καλείται τοπικά ελκυστικό σημείο εάν υπάρχει κάποιος αριθμός $m>0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x_0$: $|x_0-\bar{x}|<m$ να έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0) = \bar{x}.$$

Ορισμός: Το $\bar{x}$ λέγεται τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές εάν το $\bar{x}$ είναι ευσταθές και είναι τοπικά ελκυστικό σημείο.

Ορισμός: Το $\bar{x}$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές εάν είναι ευσταθές και κάθε λύση $x_n$ της εξίσωσης $x_{n+1}=f(x_n)$ συγκλίνει στο $\bar{x}$ όταν $n\to\infty$.

**Πρόταση.** Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Θεωρούμε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο. Έστω επίσης $\bar{x}$ ένα σημείο ισορροπίας της

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots \qquad (1).$$

1) Τότε εάν

$$|f'(\bar{x})| < 1 \qquad (2).$$

τότε το $\bar{x}$ είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές για την (1).

2) Εάν $|f'(\bar{x})| > 1$

τότε το $\bar{x}$ είναι ασταθές για την (1).

Απόδειξη του πρώτου μέρους. Θεωρούμε ότι ισχύει η (2).

Είναι προφανές ότι υπάρχει αριθμός $M$:

$$|f'(\bar{x})| < M < 1$$

Από την υπόθεση η $f'$ είναι συνεχής. Τότε υπάρχει μια περιοχή

$I=(\bar{x}-c,\ \bar{x}+\epsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in I$ να έχουμε:

$$|f'(x)|<M<1.$$

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα της μέσης τιμής:

$x_1-\bar{x}=f(x_0)-f(\bar{x})=f'(\xi_1)(x_0-\bar{x})$, $\xi_1$ ανάμεσα στο $x_0$ και $\bar{x}$.

Επομένως $|x_1-\bar{x}|=|f'(\xi_1)|\,|x_0-\bar{x}|$. Εφόσον το $\xi_1$ είναι ανάμεσα στο $x_0$ και $\bar{x}$, τότε $\xi_1\in I$. Άρα $|f'(\xi_1)|<M$. Επομένως

$$|x_1-\bar{x}|<M|x_0-\bar{x}|$$

Επίσης

$x_2-\bar{x}=f(x_1)-f(\bar{x})=f'(\xi_2)(x_1-\bar{x})$, $\xi_2$ ανάμεσα στα $x_1$ και $\bar{x}$, άρα $\xi_2\in I$

Επομένως

$$|x_2-\bar{x}|=|f'(\xi_2)|\cdot|x_1-\bar{x}|<M|x_1-\bar{x}|<M^2|x_0-\bar{x}|.$$

Εργαζόμενοι επαγωγικά παίρνουμε

$$|x_n-\bar{x}|<M^n|x_0-\bar{x}|$$

Εφόσον $M<1$ τότε $\lim_{n\to\infty} M^n = 0$. Άρα

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - \bar{x}| = 0 \quad \text{όταν} \quad |x_0 - \bar{x}| < c.$$

Άρα το $\bar{x}$ είναι τοπικά ελκυστικό σημείο. Θα δείξουμε ότι το $\bar{x}$ είναι και ευσταθές. Θεωρούμε ένα τυχαίο $\epsilon > 0$.

Παίρνουμε $\delta = \min\{\epsilon, c\}$. Τότε παίρνουμε $x_0$: $|x_0 - \bar{x}| < \delta$

$$|x_n - \bar{x}| < M^n |x_0 - \bar{x}| < |x_0 - \bar{x}| < \delta < \epsilon$$

Άρα από τον ορισμό το $\bar{x}$ ευσταθές

Άσκηση. Έστω η εξίσωση

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad \lambda \in (0, 2].$$

Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας και να εξετάσετε την ευστάθεια τους.

Λύση: Πρώτα θα βρούμε τα σημεία ισορροπίας: Θέτουμε

$x = f(x)$, $f(x) = 1 - \lambda x^2$. Άρα παίρνουμε την αλγ. εξίσωση

$$x = 1 - \lambda x^2 \Rightarrow \lambda x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}.$$

Έχουμε 2 σημεία ισορροπίας: $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$ και $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$.

$x_1$: Παίρνουμε $f'(x) = -2\lambda x \Rightarrow f'(x_1) = -2\lambda\left(\frac{-1-\sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}\right) = 1 + \sqrt{1+4\lambda} > 1 \Rightarrow$

$|f'(x_1)| > 1$, άρα το $x_1$ ασταθές.

$x_2$: $f'(x_2) = -2\lambda\left(\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}\right) = 1 - \sqrt{1+4\lambda} \Rightarrow |f'(x_2)| = |1 - \sqrt{1+4\lambda}|$.

Τοπικά ασυμπτωτικά

Για να είναι ευσταθές το $x_2$ θα πρέπει $|f'(x_2)|<1$ δηλ.

$$|1-\sqrt{1+4\lambda}|<1 \Rightarrow -1<1-\sqrt{1+4\lambda}<1 \Rightarrow -2<-\sqrt{1+4\lambda}<0$$

$$\Rightarrow 0<\sqrt{1+4\lambda}<2. \quad \text{Θα πρέπει} \quad \sqrt{1+4\lambda}<2 \Rightarrow 1+4\lambda<4 \rightarrow \lambda<\frac{3}{4}.$$

Άρα εάν $\lambda \in (0, \frac{3}{4})$ τότε το $x_2$ ευσταθές, ενώ εάν $\frac{3}{4}<\lambda \leq 2$

τότε το $x_2$ ασταθές.

Παρατήρηση:

Ευστάθεια: $(\forall \epsilon>0)(\exists \delta(\epsilon)): \forall x_0: |x_0-\bar{x}|<\delta$ να έχουμε $|x_n-\bar{x}|<\epsilon$, $n \geq 0$

Αστάθεια: $(\exists \epsilon>0): (\forall \delta(\epsilon)): \exists x_0: |x_0-\bar{x}|<\delta$ έτσι ώστε $|x_n-\bar{x}| \geq \epsilon$, $n \geq 0$

Πρόταση: Θεωρούμε την (1). Υποθέτουμε ότι $\bar{x}$ είναι ένα σημείο ισορροπίας της (1). Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχουν οι $f'$, $f''$, $f'''$ και είναι και συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι

$$f'(\bar{x}) = 1.$$

Τότε εάν

1) $f''(\bar{x}) \neq 0$, τότε το $\bar{x}$ ασταθές

2) $f''(\bar{x}) = 0$ και $f'''(\bar{x}) < 0$ τότε το $\bar{x}$ ευσταθές

3) $f''(\bar{x}) = 0$ και $f'''(\bar{x}) > 0$ τότε το $\bar{x}$ ασταθές.

Άσκηση: Έστω η εξίσωση

$$x_{n+1} = x_n - x_n^3$$

Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας και να εξετάσετε την ευστάθεια τους

Λύση. $f(x)=x-x^3$. Θα βρούμε τα σημεία ισορροπίας: $x=f(x)$.

Θέτουμε $x=x-x^3 \Rightarrow \bar{x}=0$ μοναδικό σημείο ισορροπίας. Παίρνουμε

$f'(x)=1-3x^2 \Rightarrow f'(\bar{x})=f'(0)=1$, Παίρνουμε $f''(x)=-6x \Rightarrow f''(0)=0$.

Παίρνουμε $f'''(x)=-6 \Rightarrow f'''(0)=-6<0$. Άρα το $\bar{x}=0$ ευσταθές.

Πρόταση. Έστω η (1), και $\bar{x}$ ένα σημείο ισορροπίας της (1).

Θεωρούμε ότι $f'$, $f''$, $f'''$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι

$$f'(\bar{x})=-1$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

α) Εάν $Sf(\bar{x})<0$, το $\bar{x}$ τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

β) Εάν $Sf(\bar{x})>0$ το $\bar{x}$ ασταθές

$$Sf(x)=\frac{f'''(x)}{f'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 \quad \text{εδώ} \quad Sf(\bar{x})=-f'''(\bar{x})-\frac{3}{2}(f''(\bar{x}))^2$$

Λήμμα Θεωρούμε την εξίσωση (1), όπου η $f$ συνεχής, έστω ότι υπάρχει η $fof = f^{(2)} = g$. Θεωρούμε και την εξίσωση

$$x_{n+1} = g(x_n),\ n=0,1. \qquad (B),$$

Εάν το $\bar{x}$ είναι σημείο ισορροπίας για την (1), τότε είναι και σημείο ισορροπίας για την (B).

Επίσης εάν το $\bar{x}$ είναι ευσταθές για την (B), θα είναι ευσταθές για την (1) διά της $x_{n+1} = f(x_n)$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι το $\bar{x}$ είναι σημείο ισορροπίας για την (1). Τότε $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Άρα $g(\bar{x}) = fof(\bar{x}) = f(f(\bar{x})) = f(\bar{x}) = \bar{x}$, άρα το $\bar{x}$ σημείο ισορροπίας για την (B).

Υποθέτουμε ότι το $\bar{x}$ ευσταθές για την (B). Άρα

$(\forall \epsilon>0)\,(\exists\, \delta(\epsilon))$: $\forall\, x_0$: $|x_0-\bar{x}|<\delta(\epsilon)$ να έχουμε $|f^{(2n)}(x_0)-\bar{x}|<\epsilon$, $n\geq 0$

Θα πρέπει να αποδείξουμε και μια ανάλογη σχέση για τις περιττές συνθέσεις της $f$: Από την υπόθεση η $f$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Άρα για το $\delta$ υπάρχει κάποιο $\eta>0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x_0$:

$|x_0-\bar{x}|<\eta$ να έχουμε $|f(\bar{x})-f(x_0)|<\delta$

Θεωρούμε $\theta=\min\{\delta,\eta\}$. Τότε

$(\forall \epsilon>0)\ \exists\ \theta=\min\{\delta,\eta\}$: $|x_0-\bar{x}|<\theta$ να έχουμε $|f^{(2n)}(f(x_0))-\bar{x}|<\epsilon$, $n\geq 0$

$\Rightarrow (\forall\epsilon>0)(\exists\ \theta=\min\{\delta,\eta\}$: $|x_0-\bar{x}|<\theta$ $\;\;\Rightarrow\;\;$ $|f^{(2n+1)}(x_0)-\bar{x}|<\epsilon$, $n\geq 0$

Άρα το $\bar{x}$ είναι ευσταθές και για την (1): $x_{n+1}=f(x_n)$

Απόδειξη της Πρότασης: Παίρνουμε την επίλυση (B) από την

$$x_{n+1} = g(x_n) = f^{(2)}(x_n), \quad n=0,1,\ldots$$

Θα δείξουμε ότι αν $f(\bar{x}) < 0$. τότε το $\bar{x}$ ευσταθές για την (B), άρα το $\bar{x}$ θα είναι ευσταθές για την (1) σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα. Παίρνουμε:

$$g'(x) = \left(f(f(x))\right)' = f'(f(x)) \cdot f'(x) \Rightarrow g'(\bar{x}) = f'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) \cdot f'(\bar{x}) = \left(f'(\bar{x})\right)^2 =$$

$$= (-1)^2 = 1 \Rightarrow g'(\bar{x}) = 1.$$ Παίρνουμε την

$$g''(x) = \left(f'(f(x)) \cdot f'(x)\right)' = f''(f(x)) f'(x) f'(x) + f'(f(x)) \cdot f''(x) \Rightarrow$$

$$g''(\bar{x}) = f''(f(\bar{x}))\left(f'(\bar{x})\right)^2 + f'(f(\bar{x})) \cdot f''(\bar{x}) = f''(\bar{x}) \cdot (-1)^2 + f'(\bar{x}) \cdot f''(\bar{x}) =$$

$$= f''(\bar{x}) - f''(\bar{x}) = 0.$$

$$g'''(x) = \left(f''(f(x))\left(f'(x)\right)^2 + f'(f(x)) f''(x)\right)' = f'''(f(x))\left(f'(x)\right)^3 + 2f''(f(x)) f''(x) f'(x) + f''(f(x)) f'(x) \cdot f''(x)$$

$$+ f'(f(x)) f'''(x) \Rightarrow g'''(\bar{x}) = f'''(\bar{x}) \cdot \left(f'(\bar{x})\right)^3 + 2f''(\bar{x}) f''(\bar{x}) f'(\bar{x}) + f''(\bar{x}) \cdot f'(\bar{x}) f''(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot f'''(\bar{x}) =$$

$$= f'''(\bar{x})\cdot(-1)^3 + 2(f''(\bar{x}))^2(-1) + (f''(\bar{x}))^2(-1) - f'''(\bar{x}) = -2f'''(\bar{x}) - 3(f''(\bar{x}))^2$$

$$= 2\left(-f'''(\bar{x}) - \frac{3}{2}(f''(\bar{x}))^2\right) = 2\,Sf(\bar{x}). \quad \text{Άρα } g'''(\bar{x}) = 2\,Sf(\bar{x}).$$

Εάν $Sf(\bar{x}) < 0$ τότε $g'''(\bar{x}) < 0$. Επομένως σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση το $\bar{x}$ είναι ευσταθές για την (B), και σύμφωνα με το πόρισμα το $\bar{x}$ ευσταθές και για την (1).

Άσκηση. Δίνεται η εξίσωση

$$x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας και να εξετάσετε την ευστάθεια τους.

Λύση: Παίρνουμε $x = f(x) = x^2 + 3x \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = 0,\ \bar{x}_1 = -2$ τα σημεία ισορροπίας.

$\bar{x}_1 = 0$: $f'(x) = 2x + 3 \Rightarrow f'(\bar{x}_1) = 3 \Rightarrow |f'(\bar{x}_1)| = 3 > 1 \Rightarrow \bar{x}_1 = 0$ ασταθές.

$\bar{x}_1 = -2$: $f'(x) = 2x + 3 \Rightarrow f'(\bar{x}_2) = -1$. Παίρνουμε $Sf(\bar{x}) = -f'''(\bar{x}) - \frac{3}{2}(f''(\bar{x}))^2$

$f''(x) = 2,\ f'''(x) = 0 \Rightarrow Sf(-2) = -\frac{3}{2}\,2^2 < 0 \Rightarrow \bar{x}_2$ τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Άσκηση: Έστω η εξίσωση

$$x_{n+1} = -1 + e^{-x_n}.$$

Να εξετάσετε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $\bar{x}=0$.

Λύση. Παίρνουμε $x = -1 + e^{-x}$, ισχύει $0 = -1 + e^{-0} = 0$, άρα πράγματι το $\bar{x}=0$ είναι σημείο ισορροπίας της εξίσωσης.

Εδώ $f(x) = -1 + e^{-x} \Rightarrow f'(x) = -e^{-x} \Rightarrow f'(\bar{x}) = f'(0) = -e^{-0} = -1$.

Παίρνουμε την $Sf(x) = -f'''(x) - \frac{3}{2}(f''(x))^2$, έχουμε $f''(x) = e^{-x} \Rightarrow f'''(x) = -e^{-x}$

Άρα $Sf(0) = -e^{-0} - \frac{3}{2}(e^{-0})^2 = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} < 0$. Άρα $\bar{x}=0$ ευσταθές.