Ποιοτική Μελέτη των λύσεων Μη γραμμικών Εξισώσεων Διαφορών.

Ορισμός. Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και θεωρούμε την εξίσωση διαφορών

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad f \text{ συνεχής} \qquad (1)$$

Ένα σημείο $\bar{x}\in\mathbb{R}$ καλείται σημείο ισορροπίας για την (1) εάν ισχύει $\bar{x}=f(\bar{x})$.

Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, f συνεχής. Θεωρούμε την εξίσωση

$$x_{n+1}=f(x_n,x_{n-1}),\quad n=0,1,\ldots \qquad (2)$$

Ένα σημείο $\bar{x}\in\mathbb{R}$ καλείται σημείο ισορροπίας για την (2) εάν

$$\bar{x}=f(\bar{x},\bar{x}).$$

Παράδειγμα Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας για την εξίσωση $x_{n+1} = 2x_n(1-x_n)$, $n=0,1,\ldots$

Θέτουμε $\bar{x}=f(\bar{x})$, $f(x)=2x(1-x)$. Τότε

$$\bar{x} = 2\bar{x}(1-\bar{x}) \Rightarrow \bar{x}=0, \quad \bar{x}=\frac{1}{2}$$

Άρα η εξίσωση έχει 2 σημεία ισορροπίας τα $\bar{x}=0$, $\bar{x}=\frac{1}{2}$.

Πρόταση. Έστω $f:[a,b]\to[a,b]$. Θεωρούμε ότι η f συνεχής. Τότε η εξίσωση (1): $x_{n+1}=f(x_n)$ έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας $\bar{x}$.

Απόδειξη Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$. Η g είναι συνεχής, $g(a)=f(a)-a\geq 0$ Επίσης $g(b)=f(b)-b\leq 0$ Εφόσον η g είναι συνεχής συνάρτηση θα υπάρχει $\bar{x}\in[a,b]$ τέτοιο ώστε

$$g(\bar{x})=0 \Rightarrow f(\bar{x})=\bar{x}$$ δηλ. το $\bar{x}$ σημείο ισορροπίας.

Πρόταση. Έστω $I=[a,b]$. Θεωρούμε f μια συνεχή συνάρτηση τέτοια ώστε $f(I)\supseteq I$. Τότε η εξίσωση (1) έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας $\bar{x}$.

Απόδειξη. Εφόσον $[a,b]\subseteq f([a,b])$. Θα υπάρχουν αριθμοί $c,d\in[a,b]$ τέτοιο ώστε $f(c)=a$ και $f(d)=b$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$. Τότε $g(c)=f(c)-c=a-c\leq 0$. Επίσης $g(d)=f(d)-d=b-d\geq 0$. Άρα υπάρχει $\bar{x}$ τέτοιο ώστε $g(\bar{x})=0\Rightarrow f(\bar{x})=\bar{x}$, το $\bar{x}$ σημείο ισορροπίας για την (1).

Παρατήρηση: Εάν η f είναι αυστηρά φθίνουσα τότε το $\bar{x}$ θα είναι μοναδικό σημείο ισορροπίας

Ορισμός. Μια ακολουθία x_n καλείται φραγμένη εάν υπάρχει αριθμός $M>0$ τέτοιος ώστε

$$|x_n| \leq M, \quad n=1,2,\ldots$$

Ορισμός: Μια ακολουθία x_n καλείται φραγμένη από κάτω και από πάνω από θετικούς αριθμούς εάν υπάρχει αριθμοί $K>0$ και $M>0$ τέτοιοι ώστε

$$K \leq x_n \leq M, \quad n=1,2,\ldots$$ (bounded and perists).

Παράδειγμα: Έστω η ακολουθία $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n=1,2,\ldots$

Εδώ έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, άρα η x_n δεν είναι φραγμένη από κάτω από θετικό αριθμό.

Άσκηση. Έστω η εξίσωση

$$x_{n+1} = \frac{a}{c + d x_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

όπου a, c, d θετικοί αριθμοί, όπως και $x_0 > 0$.

Να δείξετε ότι κάθε λύση της εξίσωσης είναι φραγμένη από θετικούς αριθμούς.

Απόδειξη: $x_1 = \dfrac{a}{c + d x_0} < \dfrac{a}{c}$, $x_2 = \dfrac{a}{c + d x_1} < \dfrac{a}{c}$

Επομένως επαγωγικά ισχύει $x_n < \dfrac{a}{c}$, $n = 1, 2, \dots$

Έχουμε $x_n = \dfrac{a}{c + d x_{n-1}}$, $n = 2, 3 \dots$ $x_2 = \dfrac{a}{c + d x_1} > \dfrac{a}{c + d \frac{a}{c}}$

Ομοίως $x_n = \dfrac{a}{c + d x_{n-1}} > \dfrac{a}{c + d \frac{a}{c}}$, $n = 2, 3, \dots$

Άρα $x_n \geq \min\left\{ \dfrac{a}{c + d \frac{a}{c}}, x_1 \right\}$, $n = 1, 2, \dots$

Άσκηση. Έστω η εξίσωση δεύτερης τάξης:

$$x_{n+2} = A + \frac{x_n}{x_{n+1}}, \quad n=0,1,\ldots$$

Θεωρούμε ότι $A>1$. Τότε κάθε λύση της εξίσωσης είναι φραγμένη από θετικούς αριθμούς. (Θεωρούμε $x_0>0$, $x_1>0$).

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι κάθε λύση x_n είναι μεγαλύτερη του μηδενός $(x_n>0)$. Έχουμε

$$x_n = A + \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}}, \quad n=2,3,\ldots$$

Έχουμε $x_2 = A + \frac{x_0}{x_1} > A$, Ομοίως $x_3 = A + \frac{x_1}{x_2} > A$ και γενικά $x_n > A$, $n=2,3\ldots$ Άρα $x_n > \min\{A, x_0, x_1\}$, $n=0,1,\ldots$

Θα δείξουμε ότι κάθε λύση είναι φραγμένη από πάνω.

Έχουμε: $x_{n+2} = A + \frac{x_n}{x_{n+1}}$, $n=1,2,\ldots$

Γνωρίζουμε ότι $x_n > A$, $n=2,3,\ldots$ Τότε

$$x_{n+2} < A + \frac{x_n}{A}, \quad n=1,2,\ldots$$

Θεωρούμε την γραμμική εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης:

$$y_{n+2} = A + \frac{y_n}{A}, \quad n=1,2,\ldots \qquad (A)$$

με $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$. Η (A) είναι γραμμική δεύτερης τάξης μη ομογενής. Άρα

$$y_n^{\Gamma M O} = y_n^{(\Gamma O)} + y_n^{(MNO)}$$

Η ομογενής είναι η $y_{n+2} - \frac{1}{A} y_n = 0$: Χαρακτ. εξίσωση

$\lambda^2 - \frac{1}{A} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A}}$. Επομένως $y_n^{(\Gamma O)} = C\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n + D\left(-\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n$

C, D σταθερές.

Θα βρούμε και μια μερική λύση $y_n^{(ΜΜΟ)}$: Η $y_n^{(ΜΜΟ)}$ θα έχει τη μορφή $y_n^{(ΜΜΟ)} = M$ όπου M σταθερά που πρέπει να υπολογίσουμε : $M = A + \frac{M}{A} \Rightarrow M = \frac{A^2}{A-1}$

Άρα $y_n^{(ΜΜΟ)} = \frac{A^2}{A-1}$

Άρα $y_n^{(ΓΜΟ)} = C\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n + D\left(-\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n + \frac{A^2}{A-1}$

Θέλουμε $y_1^{(ΓΜΟ)} = C\frac{1}{\sqrt{A}} - \frac{D}{\sqrt{A}} + \frac{A^2}{A-1} = x_1$, $y_2^{(ΓΜΟ)} = C\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^2 + D\left(-\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^2 + \frac{A^2}{A-1} = x_2$.

Άρα υπολ. τις σταθερές C, D. Έστω $C = C(x_1, x_2)$ και $D = D(x_1, x_2)$

Άρα $y_n = C(x_1,x_2)\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n + D(x_1,x_2)\left(-\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n + \frac{A^2}{A-1}$

Εφόσον $A>1$ η y_n είναι φραγμένη από πάνω από θετικό αριθμό

Έχουμε $y_1 = x_1$ και $y_2 = x_2$. Τότε από την εξίσωση

$$x_{n+2} = A + \frac{x_n}{x_{n+1}} \quad \text{έχουμε} \quad x_3 = A + \frac{x_1}{x_2} < A + \frac{x_1}{A} = A + \frac{y_1}{A} = y_3$$

$$x_4 = A + \frac{x_2}{x_3} < A + \frac{x_2}{A} = A + \frac{y_2}{A} = y_4$$

$$x_5 = A + \frac{x_3}{x_4} < A + \frac{x_3}{A} < A + \frac{y_3}{A} = y_5$$

και εργαζόμενοι επαγωγικά $x_n < y_n$, $n = 3, 4, \ldots$

Εφόσον η y_n είναι φραγμένη από πάνω από θετικό αριθμό, τότε και η x_n είναι φραγμένη από πάνω από θετικό αριθμό.

Ορισμός. Έστω μια ακολουθία x_n. Επίσης θεωρούμε μια ακολουθία r_n φυσικών αριθμών, $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots$ Τότε η ακολουθία x_{r_n} είναι μια υπακολουθία της x_n.

Παράδειγμα. Έστω $x_n = \dfrac{n+3}{2+n}$, $n=1,2\ldots$ και $r_n = 2^n$, $n=1,2\ldots$

Τότε η $x_{r_n} = \dfrac{2^n+3}{2+2^n}$, $n=1,2,\ldots$ είναι μια υπακολουθία της x_n.

Ορισμός. Ένας αριθμός ℓ καλείται οριακός αριθμός για την ακολουθία x_n εάν υπάρχει υπακολουθία της x_n η οποία να συγκλίνει στο ℓ

Ορισμός. Έστω μια ακολουθία φραγμένη από πάνω και από κάτω. Τότε ο μικρότερος οριακός αριθμός της ακολουθίας λέγεται $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ και ο μεγαλύτερος οριακός αριθμός της x_n λέγεται $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$

Πρόταση Υποθέτουμε ότι σε μια ακολουθία x_n ισχύει $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = \ell$ Τότε υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$.

Πρόταση. Έστω x_n μια φραγμένη ακολουθία Τότε $\ell = \liminf_{n\to\infty} x_n$ εάν ισχύουν τα εξής:

a) $(\forall \epsilon>0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N}): \ \forall n \geq n_0 \quad \ell - \epsilon < x_n$.

b) $\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists m_0 \geq m : \quad x_{m_0} < \ell + \epsilon$.

Επίσης $L = \limsup_{n\to\infty} x_n$ εάν ισχύουν τα εξής:

a) $(\forall \epsilon>0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N}): \ \forall n \geq n_0: \quad x_n < L + \epsilon$

b) $\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists m_0 \geq m : \quad L - \epsilon < x_{m_0}$.

Άσκηση. Να δείξετε ότι κάθε θετική λύση της

$$x_{n+1} = \frac{a}{c + dx_n}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$a, c, d \in (0, \infty)$ συγκλίνει στο μοναδικό σημείο ισορροπίας της εξίσωσης.

Λύση. Θέτουμε $x = \dfrac{a}{c+dx} \Rightarrow dx^2 + cx - a = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{-c \pm \sqrt{c^2+4ad}}{2d}.$$ Άρα το $\bar{x} = \dfrac{-c + \sqrt{c^2+4ad}}{2d}$ είναι το

μοναδικό σημείο ισορροπίας το οποίο είναι θετικό.

Θα δείξουμε ότι κάθε θετική λύση x_n συγκλίνει στο $\bar{x}$.

Είχαμε δείξει ότι κάθε λύση x_n της εξίσωσης είναι φραγμένη.

Έστω $l = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ και $L = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$. Θα δείξουμε ότι $l = L$.

Εφόσον $\ell = \liminf_{n\to\infty} x_n$ τότε

$(\forall \epsilon>0)(\exists n_1 \in \mathbb{N})$: $\forall n \geq n_1$ $\ell-\epsilon < x_n$.

Εφόσον $L = \limsup_{n\to\infty} x_n$, τότε

$(\forall \epsilon>0)(\exists n_2 \in \mathbb{N})$: $\forall n \geq n_2$: $x_n < L+\epsilon$.

Άρα εάν $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε:

$(\forall \epsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$: $\forall n \geq n_0$: $\ell-\epsilon < x_n < L+\epsilon$

Παίρνουμε τώρα $m = n_0+1$. Τότε για το $m = n_0+1$ υπάρχει $k \geq m$ τέτοιο ώστε $x_k < \ell+\epsilon$

Επίσης για το $m = n_0+1$ υπάρχει $r \geq m$ τέτοιο ώστε $L-\epsilon < x_r$

Έχουμε ότι $x_k = \dfrac{a}{c+d\,x_{k-1}} < \ell+\epsilon$. Επίσης $k-1 \geq m-1 \geq n_0$

Άρα $x_{k-1} < L+\epsilon$. Επομένως $\dfrac{a}{c+d(L+\epsilon)} < \dfrac{a}{c+d\,x_{k-1}} < \ell+\epsilon$

Άρα $\dfrac{a}{c+d(L+\epsilon)} < \ell+\epsilon$ Για $\epsilon \to 0$ παίρνουμε

$$\boxed{\frac{a}{c+dL} \leq \ell}$$

Παίρνουμε $L-\epsilon < x_r = \dfrac{a}{c+d\,x_{r-1}}$. Επίσης $r \geq m \Rightarrow r-1 \geq m-1 \geq n_0$

άρα $r-1 \geq n_0$. Άρα $\ell-\epsilon < x_{r-1}$ Άρα

$L-\epsilon < \dfrac{a}{c+d\,x_{r-1}} < \dfrac{a}{c+d(\ell-\epsilon)}$. Επομένως $L-\epsilon < \dfrac{a}{c+d(\ell-\epsilon)}$

Για $\epsilon \to 0$ παίρνουμε $\boxed{L \leq \dfrac{a}{c+d\ell}}$.

$\dfrac{aL}{c+dL} \leq \ell L$, $L\ell \leq \dfrac{a\ell}{c+d\ell} \Rightarrow \dfrac{\cancel{a}L}{c+dL} \leq \dfrac{\cancel{a}\ell}{c+d\ell} \Rightarrow cL+\cancel{d\ell L} \leq c\ell+\cancel{dL\ell}$

$c(L-\ell) \leq 0 \Rightarrow L \leq \ell$ Αλλά εφόσον $\ell \leq L$ έχουμε $\ell = L$.

Αρα υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} x_n = \rho$.

Από τη σχέση $x_{n+1} = \dfrac{a}{c + d\,x_{n-1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \dfrac{a}{c + d \lim_{n\to\infty} x_{n-1}} \Rightarrow$

$\rho = \dfrac{a}{c + d\rho} \Rightarrow \rho = \bar{x}$. Επομένως $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.

Άσκηση. Έστω η εξίσωση δεύτερης τάξης

$$x_{n+2} = A + \frac{x_n}{x_{n+1}}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Να δείξετε ότι εάν $A > 1$ τότε κάθε θετική λύση της παραπάνω εξίσωσης συγκλίνει στο μοναδικό σημείο ισορροπίας όταν $n \to \infty$.

Απόδειξη. Είχαμε δείξει σε προηγούμενη άσκηση ότι κάθε λύση της εξίσωσης είναι φραγμένη από θετικούς αριθμούς. Θέτουμε $\ell = \liminf_{n\to\infty} x_n$ και $L = \limsup_{n\to\infty} x_n$.

Θα βρούμε τα σημεία ισορροπίας: Παίρνουμε την αλγεβρική εξίσωση: $x = A + \frac{x}{x} \Rightarrow x = A+1$. Άρα έχουμε μοναδικό σημείο ισορροπίας το $\bar{x} = A+1$.

Έστω x_n μια τυχούσα λύση της εξίσωσης. Θα δείξουμε ότι $\ell = L$. Ισχύει $\ell \leq L$.

Εφόσον $\ell = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ ισχύει:

$(\forall \epsilon>0)(\exists n_1\in\mathbb{N})\ (\forall n\geq n_1):\ \ell-\epsilon \leq x_n$

$(\forall m\in\mathbb{N})\ (\exists\ m_0\geq m):\ x_{m_0}<\ell+\epsilon.$

Εφόσον $L = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ ισχύει:

$(\forall \epsilon>0)(\exists n_2\in\mathbb{N})\ (\forall n\geq n_2):\ x_n < L+\epsilon$

$(\forall m\in\mathbb{N})(\exists\ m_0\geq m):\ x_{m_0} > L-\epsilon$

Έχουμε $(\forall\epsilon>0)\ (\exists n_0\in\mathbb{N}): n_0=\max\{n_1,n_2\}:\ \ell-\epsilon < x_n < L+\epsilon$ για $n\geq n_0$.

Για $m=n_0+2$ θα υπάρχει $m_0\geq n_0+2:\ x_{m_0}<\ell+\epsilon.$

Από την εξίσωση έχουμε $x_{m_0} = A+\dfrac{x_{m_0-2}}{x_{m_0-1}} < \ell+\epsilon.$

Εφόσον $m_0\geq n_0+2$, τότε $m_0-2\geq n_0$ και $m_0-1\geq n_0$. Επομένως

$\ell-\epsilon < x_{m_0-2}$ και $x_{m_0-1}<L+\epsilon$. Άρα $A+\dfrac{\ell-\epsilon}{L+\epsilon} < A+\dfrac{x_{m_0-2}}{x_{m_0-1}} < \ell+\epsilon$

Άρα $A + \frac{\ell-\epsilon}{L+\epsilon} < \ell+\epsilon$. Για $\epsilon \to 0$ παίρνουμε

$$A + \frac{\ell}{L} \leq \ell. \qquad (1)$$

Εφόσον $L = \limsup x_n$ παίρνουμε πάλι $m = n_0+2$. Τότε θα υπάρχει κάποιο $s \geq m = n_0+2$ έτσι ώστε $x_s > L-\epsilon$.

Είναι προφανές ότι $s-2 \geq n_0$, $s-1 \geq n_0$. Άρα

$$L-\epsilon < x_s = A + \frac{x_{s-2}}{x_{s-1}} < A + \frac{L+\epsilon}{\ell-\epsilon}.$$ Άρα

$$L-\epsilon \leq A + \frac{L+\epsilon}{\ell-\epsilon}.$$ Για $\epsilon \to 0$ παίρνουμε

$$L \leq A + \frac{L}{\ell} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε $LA+\ell \leq \ell L$, $\ell L \leq A\ell + L$

Άρα $LA+\ell \leq A\ell+L \Rightarrow A(L-\ell)-(L-\ell) \leq 0 \Rightarrow (A-1)(L-\ell) \leq 0$

Εφόσον $A>1$ τότε $L-\ell \leq 0 \Rightarrow L \leq \ell$. Επομένως $L=\ell$.

Άρα υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} x_n = K$. Θα δείξουμε ότι $K = \bar{x}$.

Από την εξίσωση $x_{n+2} = A + \frac{x_n}{x_{n-1}}$ παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+2} = A + \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} x_{n-1}} \Rightarrow K = A + \frac{K}{K} = A + 1 = \bar{x}.$$

Άσκηση. Έστω η εξίσωση

$$x_{n+1} = a x_n + (b + c x_n) e^{-x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

όπου a, b, c θετικοί αριθμοί, $x_0 > 0$ και $a < 1$, $c < 1$, $b > 1$.
Τότε η εξίσωση έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας $\bar{x}$

Λύση, Έστω $F(x) = ax + (b + cx) e^{-x}$ και την $G(x) = F(x) - x$.
Είναι προφανές ότι η F και η G είναι συνεχείς συναρτήσεις.
Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\bar{x} \in (0, \infty)$ τέτοιο ώστε $G(\bar{x}) = 0$

Παίρνουμε $G(0) = F(0) = b > 0$

$$G(x) = F(x) - x = (a-1)x + (b + cx) e^{-x} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} G(x) = (a-1) \lim_{x \to \infty} x + \lim_{x \to \infty} (b + cx) e^{-x}$$

$= (a-1) \cdot \infty + 0 = (a-1) \infty = -\infty$. Άρα υπάρχει $\bar{x} \in (0, \infty)$ τέτοιο ώστε

$G(\bar{x}) = 0 \Rightarrow F(\bar{x}) = \bar{x}$. Άρα η εξίσωση έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας.

Θα δείξουμε ότι το $\bar{x}$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας.

Παίρνουμε την παράγωγο της G: Ισχύει ότι

$$G'(x) = a-1-(b+cx)e^{-x}+ce^{-x} = a-1+\left(c(1-x)-b\right)e^{-x}.$$

Εάν $x \geq 1$ τότε $c(1-x)-b<0$, άρα $G'(x)<0$.

Εάν $x<1$ τότε $c(1-x)-b<0$ διότι $c<1$, $b>1$, άρα $G'(x)<0$.

Άρα $G(x)$ αυστηρά φθίνουσα. Άρα το $\bar{x}$ είναι μοναδικό σημείο ισορροπίας

Σύγκλιση των λύσεων σε μοναδικό σημείο ισορροπίας.

Ορισμός. Έστω η εξίσωση (1) $x_{n+1}=f(x_n)$, όπου η f συνεχής. Υποθέτουμε ότι η (1) έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας το $\bar{x}$. Θα λέμε ότι το $\bar{x}$ είναι ελκυστικό σημείο για την (1) εάν για κάθε λύση x_n της (1) έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.

Πρόταση Έστω $f: (0,\infty) \to (0,\infty)$. Θεωρούμε ένα διάστημα $[a,b]$, και $f: [a,b] \to [a,b]$, f συνεχής. Υποθέτουμε ότι η f γνησίως φθίνουσα. Θεωρούμε ότι το αλγεβρικό σύστημα $M = f(m)$, $m = f(M)$ έχει μοναδική λύση $m = M = \bar{x}$ όπου $\bar{x}$ το μοναδικό σημείο ισορροπίας της $x_{n+1} = f(x_n)$. Τότε κάθε λύση x_n της εξίσωσης με $x_{n_0} \in [a,b]$ συγκλίνει στο μοναδικό σημείο ισορροπίας όταν $n \to \infty$.

Απόδειξη. Παίρνουμε $a = m_0$ και $b = M_0$. Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων διαφορών: $m_{n+1} = f(M_n)$ και $M_{n+1} = f(m_n)$.

Πρώτα εφόσον $a < b$ ισχύει $m_0 < M_0$. Επίσης

$m_1 = f(M_0) < f(m_0) = M_1 \Rightarrow m_1 < M_1$. Εφόσον $f: [m_0, M_0] \to [m_0, M_0]$

* έχουμε ότι $m_0 \leq m_1 < M_1 \leq M_0$

Παίρνουμε $m_2 = f(M_1)$. Ισχύει ότι $m_1 < M_1$. Τότε $f(M_1) < f(m_1)$. Άρα $m_2 < f(m_1) = M_2 \Rightarrow m_2 < M_2$

Ισχύει $m_2 = f(M_1)$. Ισχύει $M_1 \leq M_0 \Rightarrow f(M_0) \leq f(M_1)$

Επομένως $m_2 = f(M_1) \geq f(M_0) = m_1$

Επίσης $M_2 = f(m_1)$. Ισχύει $m_0 \leq m_1$. Τότε $f(m_1) \leq f(m_0)$

Άρα $M_2 = f(m_1) < f(m_0) = M_1 \Rightarrow M_2 \leq M_1$. Άρα έχουμε τη διάταξη:

$$m_0 \leq m_1 \leq m_2 < M_2 \leq M_1 \leq M_0$$

Εργαζόμενοι επαγωγικά παίρνουμε τη διάταξη

$$m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_n < M_n \leq M_{n-1} \cdots \leq M_1 \leq M_0.$$

Εστω x_n ~~με~~ λύση τυχούσα της $x_{n+1}=f(x_n)$ με $x_{n_0}\in[a,b]=[m_0,M_0]$, $n_0\in\mathbb{N}$. Τότε

$$m_0\le x_{n_0}\le M_0.$$ Εφόσον η f φθίνουσα τότε

$$f(M_0)\le f(x_{n_0})\le f(m_0)\Rightarrow m_1\le x_{n_0+1}\le M_1\Rightarrow$$

$$f(M_1)\le f(x_{n_0+1})\le f(m_1)\Rightarrow m_2\le x_{n_0+2}\le M_2$$

και εργαζόμενοι επαγωγικά παίρνουμε: $m_n\le x_{n_0+n}\le M_n$, $n\ge 1$

Η ακολουθία m_n είναι αύξουσα ενώ η ακολουθία M_n φθίνουσα και $m_n\in[a,b]$ και $M_n\in[a,b]$ Άρα υπάρχουν τα $\lim\limits_{n\to\infty} m_n=\bar{m}$, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=\bar{M}$. Έχουμε τη σχέση $M_{n+1}=f(m_n)$ και $m_{n+1}=f(M_n)$

Εφόσον η f συνεχής έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} M_{n+1}=f(\lim\limits_{n\to\infty} m_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} m_{n+1}=f(\lim\limits_{n\to\infty} M_n)$

Τότε $\bar{M}=f(\bar{m})$, $\bar{m}=f(\bar{M})$. Από την υπόθεση $\bar{m}=\bar{M}=\bar{x}$

Αλλά ισχύει ότι $m_n \leq x_{n_0+n} \leq M_n$. Επομένως

$$\lim_{n\to\infty} m_n \leq \lim_{n\to\infty} x_{n_0+n} \leq \lim_{n\to\infty} M_n \Rightarrow \bar{x} \leq \lim_{n\to\infty} x_{n_0+n} \leq \bar{x}$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.

Άσκηση Έστω η εξίσωση $x_{n+1} = \dfrac{a e^{b-cx_n}}{1+e^{b-cx_n}}$, $n=0,1,\dots$

$a, c \in (0,\infty)$ και $0<ac<4$.

Να δείξετε ότι κάθε λύση της παραπάνω εξίσωσης συγκλίνει στο μοναδικό σημείο ισορροπίας της εξίσωσης.

Λύση. Θέτουμε $f(x) = \dfrac{a e^{b-cx}}{1+e^{b-cx}}$. Τότε $f'(x) = \dfrac{-ca e^{b-cx}}{(1+e^{b-cx})^2} < 0$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα. Θέλουμε να βρούμε ένα διάστημα $[a_1, b_1]$ τέτοιο ώστε $f: [a_1,b_1] \to [a_1,b_1]$

Έχουμε $f(x) = \dfrac{a e^{b-cx}}{1+e^{b-cx}} \leq \dfrac{a e^{b-cx}}{e^{b-cx}} = a$, $x \in (0,\infty)$

Άρα για κάθε $x \in (0,\infty)$ έχουμε ότι $f(x) \leq a$,

Για $x \leq a$, και εφόσον η f είναι αυστηρά φθίνουσα έχουμε

$f(a) \leq f(x) \Rightarrow \dfrac{a e^{b-ca}}{1+e^{b-ca}} \leq f(x)$,

Άρα $f: \left[\dfrac{a e^{b-ca}}{1+e^{b-ca}}, a\right] \rightarrow \left[\dfrac{a e^{b-ca}}{1+c e^{b-ca}}, a\right]$

Επίσης εφόσον η f αυστηρά φθίνουσα η εξίσωση έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας $\bar{x}$. Θεωρούμε το αλγεβρικό σύστημα

$m = f(M)$ και $M = f(m)$ δηλ.

$m = \dfrac{a e^{b-cM}}{1+e^{b-cM}}$, $M = \dfrac{a e^{b-cm}}{1+e^{b-cm}}$

Παίρνουμε $$M - m = \frac{ae^{b-cm}}{1+e^{b-cm}} - \frac{ae^{b-cM}}{1+e^{b-cM}}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής. Τότε θα υπάρχει κάποιο σημείο ξ μεταξύ του m και M τέτοιο ώστε

$$\frac{ae^{b-cm}}{1+e^{b-cm}} - \frac{ae^{b-cM}}{1+e^{b-cM}} = -\frac{cae^{b-c\xi}}{(1+e^{b-c\xi})^2}(m-M).$$

Άρα

$$M-m = -\frac{cae^{b-c\xi}}{(1+e^{b-c\xi})^2}(m-M) \Rightarrow |M-m| = \frac{cae^{b-c\xi}}{(1+e^{b-c\xi})^2}|M-m|$$

Θα δείξωμε ότι $\dfrac{e^{b-c\xi}}{(1+e^{b-c\xi})^2} \leq \dfrac{1}{4}$. Πράγματι:

$$4e^{b-c\xi} \leq e^{2(b-c\xi)} + 2e^{b-c\xi} + 1 \Rightarrow e^{2(b-c\xi)} - 2e^{b-c\xi} + 1 \geq 0 \Rightarrow (e^{b-c\xi} - 1)^2 \geq 0.$$

Επομένως $\dfrac{ace^{b-c\xi}}{(1+e^{b-c\xi})^2} \leq \dfrac{ac}{4} < 1$ λόγω της υπόθεσης.

Εφόσον $|M-m| = \frac{cae^{b-c\xi}}{(1+e^{b-c\xi})^2}|M-m|$ και $\frac{ace^{b-c\xi}}{(1+e^{b-c\xi})^2} < 1$

έχουμε $|M-m| = 0 \Rightarrow M=m$. Σύμφωνα με το προηγούμενο

Θεώρημα εάν για μια λύση x_n υπάρχει κάποιο n_0

τέτοιο ώστε $x_{n_0} \in \left[\frac{ae^{b-ca}}{1+e^{b-ca}}, a\right]$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.

Έστω x_n τυχούσα λύση της εξίσωσης διαφορών.

Τότε $x_{n+1} = \frac{ae^{b-cx_n}}{1+e^{b-cx_n}} \leq a, \; n=0,1,\ldots \Rightarrow x_n \leq a, \; n=1,2,\ldots$

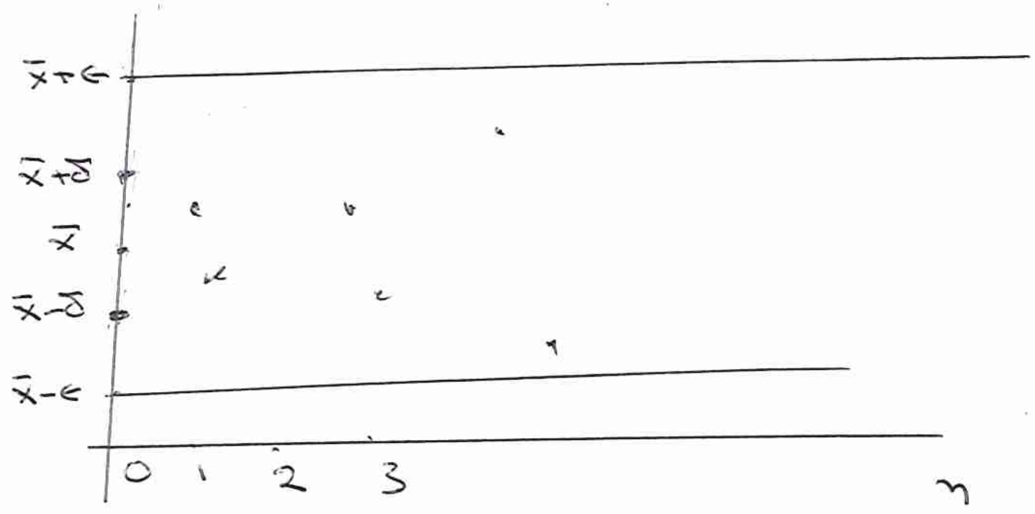
Επίσης $x_n = \frac{ae^{b-cx_{n-1}}}{1+e^{b-cx_{n-1}}} \geq \frac{ae^{b-ca}}{1+e^{b-ca}}, \; n=2,3,\ldots$

Άρα $x_n \in \left[\frac{ae^{b-ca}}{1+e^{b-ca}}, a\right]$ $n\geq 2$. Άρα $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.

Ευστάθεια Εξισώσεων Διαφορών Πρώτης Τάξης.

Ορισμός. Έστω η εξίσωση διαφορών $x_{n+1} = f(x_n)$, $n=0,1,\ldots$ και η f συνεχής. Θεωρούμε ότι η εξίσωση έχει ένα σημείο ισορροπίας $\bar{x}$, δηλ. $f(\bar{x})=\bar{x}$. Τότε το $\bar{x}$ καλείται ευσταθές για την παραπάνω εξίσωση διαφορών εάν

$$(\forall \epsilon>0)\ \exists \delta(\epsilon): \ \forall x_0 : |x_0-\bar{x}|<\delta(\epsilon) \text{ να έχουμε } |x_n-\bar{x}|<\epsilon,\ n\geq 0$$



Ορισμός. Το σημείο ισορροπίας $\bar{x}$ καλείται τοπικά ελκυστικό σημείο εάν υπάρχει κάποιο $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall x_0 : |x_0 - \bar{x}| < m$ τότε $\lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$.

Ορισμός. Το $\bar{x}$ καλείται τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές εάν είναι ευσταθές και τοπικά ελκυστικό σημείο.

Ορισμός. Το $\bar{x}$ καλείται ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές εάν είναι ευσταθές και κάθε λύση της εξίσωσης συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας όταν $n \to \infty$

Πρόταση: Έστω $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ όπου η f παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο. Θεωρούμε ότι η εξίσωση

$$x_{n+1}=f(x_n)$$

έχει ένα σημείο ισορροπίας $\bar{x}$, δηλ. $\bar{x}=f(\bar{x})$. Τότε το $\bar{x}$ είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές εάν ισχύει

$$|f'(\bar{x})|<1.$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει αριθμός $M<1$ τέτοιος ώστε $|f'(\bar{x})|<M<1$. Αλλά η f' είναι συνεχής συνάρτηση. Άρα υπάρχει διάστημα $I=(\bar{x}-c,\bar{x}+c)$, $c>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in I$ να έχουμε $|f'(x)|<M<1$.
Έστω x_n τυχούσα λύση $\overset{\text{με } x_0\in I}{\overline{\text{της}}}$ $x_{n+1}=f(x_n)$. Τότε από το θεώρημα μέσης τιμής

$x_1-\bar{x}=f(x_0)-\bar{x}=f(x_0)-f(\bar{x})=f'(\xi_1)(x_0-\bar{x})$ όπου ξ_1 μεταξύ του x_0 και $\bar{x}$.

Άρα $x_1-\bar{x}=f'(\xi_1)(x_0-\bar{x})\Rightarrow |x_1-\bar{x}|=|f'(\xi_1)|\,|x_0-\bar{x}|<M|x_0-\bar{x}|.$

Επίσης

$$x_2-\bar{x}= f(x_1)-f(\bar{x})=f'(\xi_2)(x_1-\bar{x})$$ όπου ξ_2 μεταξύ του x_1 και $\bar{x}$

Άρα $|x_2-\bar{x}|=|f'(\xi_2)|\,|x_1-\bar{x}|$. Εφόσον ξ_2 μεταξύ του x_1 και $\bar{x}$

$\xi_2\in \underline{I}$. Άρα $|x_2-\bar{x}|<M|x_1-\bar{x}|$ Αλλά εφόσον $|x_1-\bar{x}|<M|x_0-\bar{x}|$

έχουμε $|x_2-\bar{x}|<M^2|x_0-\bar{x}|$. Εργαζόμενοι επαγωγικά έχουμε

$$|x_n-\bar{x}|<M^n|x_0-\bar{x}|.$$ Άρα $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-\bar{x}|\leq |x_0-\bar{x}|\lim\limits_{n\to\infty}M^n=0$

Επομένως για $x_0\in \underline{I}=(\bar{x}-c,\bar{x}+c)$ έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\bar{x}$

Άρα δείξαμε ότι το $\bar{x}$ είναι τοπικά ελκυστικό σημείο.

Τέλος θα δείξουμε και την ευστάθεια του $\bar{x}$.

Έστω ένα τυχαίο $\epsilon>0$. Τότε παίρνουμε $\delta=\min\{\epsilon,c\}$.

Τότε

$$|x_n-\bar{x}|<M^n|x_0-\bar{x}|<|x_0-\bar{x}|.$$ Τότε εάν $|x_0-\bar{x}|<\delta$ έχουμε

$|x_n-\bar{x}|<\delta<\epsilon$ για κάθε $n>0$. Άρα $\bar{x}$ και ευσταθές

Άρα $\bar{x}$ τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές

Το σημείο ισορροπίας $\bar{x}$ της εξίσωσης $x_{n+1}=f(x_n)$ είναι ευσταθές εάν $\forall \epsilon>0,\ \exists\, \delta(\epsilon): \forall x_0: |x_0-\bar{x}|<\delta$ να έχουμε $|x_n-\bar{x}|<\epsilon,\ n\geq 0$

Ορισμός: Το σημείο ισορροπίας $\bar{x}$ είναι ασταθές εάν.
$(\exists\, \epsilon>0): \forall \delta: \exists\, x_0: |x_0-\bar{x}|<\delta$ έτσι ώστε $|x_n-\bar{x}|\geq \epsilon$ για κάποιο $n>0$.

Πρόταση Έστω $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $x_{n+1}=f(x_n)$ έχει ένα σημείο ισορροπίας $\bar{x}$. Τότε εάν

$$|f'(\bar{x})|>1$$

το $\bar{x}$ είναι ασταθές

Απόδειξη Από την υπόθεση η f' είναι συνεχής συνάρτηση. Εφόσον $|f'(\bar{x})|>1$ θα υπάρχει ένα διάστημα $I=(\bar{x}-c,\ \bar{x}+c),\ c>0$ έτσι ώστε για κάθε $x\in I$ να έχουμε.

$$|f'(x)|>M>1.$$

Εφόσον $M>1$ τότε $\lim_{n\to\infty} M^n = \infty$. Εδώ θα δείξουμε ~~για~~ για τον ορισμό της αστάθειας ότι το $\epsilon = c$. Παίρνουμε ένα $x_0 \in I = (\bar{x}-c, \bar{x}+c)$

Εφόσον $\lim_{n\to\infty} M^n = \infty$, υπάρχει φυσικός αριθμός k τέτοιος ώστε

$$M^k |x_0 - \bar{x}| > c.$$

Θεωρούμε τώρα τη λύση x_n με το x_0 που ορίσαμε να ανήκει στο I. Έστω πρώτα ότι κάποιο από τα $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ δεν ανήκει στο I. Έστω ότι αυτό είναι το x_j, $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$

Τότε

$$|x_j - \bar{x}| \geq c.$$

Τότε έχουμε αποδείξει την αστάθεια του $\bar{x}$

Υποθέτουμε τώρα ότι τα $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1} \in I$. Παίρνουμε:

$x_1 - \bar{x} = f(x_0) - f(\bar{x}) = f'(\xi_1)(x_0 - \bar{x})$, ξ_1 ανάμεσα στο $\bar{x}$ και x_0. Άρα $\xi_1 \in I$

Επομένως

$$|x_1 - \bar{x}| = |f'(\xi_1)||x_0 - \bar{x}| > M|x_0 - \bar{x}| \Rightarrow |x_1 - \bar{x}| > M|x_0 - \bar{x}|.$$

Παίρνουμε

$x_2 - \bar{x} = f(x_1) - f(\bar{x}) = f'(\xi_2)(x_1 - \bar{x})$, όπου ξ_2 μεταξύ του x_1 και $\bar{x}$

Άρα $|x_2 - \bar{x}| = |f'(\xi_2)|\,|x_1 - \bar{x}| > M\,|x_1 - \bar{x}| \Rightarrow |x_2 - \bar{x}| > M|x_1 - \bar{x}| > M^2|x_0 - \bar{x}|$.

Επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι:

$$|x_k - \bar{x}| > M^k\,|x_0 - \bar{x}| > C.$$

Άρα το $\bar{x}$ είναι ασταθές.

Άσκηση. Έστω η εξίσωση:

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad \lambda \in (0, 2].$$

Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας και να εξετάσετε την ευστάθειά τους.

Λύση: Πρώτα θα βρούμε τα σημεία ισορροπίας: Θέτουμε $x_n = \bar{x}$, $n = 0, 1, \ldots$ Τότε $\bar{x} = 1 - \lambda \bar{x}^2 \Rightarrow \lambda \bar{x}^2 + \bar{x} - 1 = 0$. Άρα έχουμε 2 σημεία ισορροπίας τα $\bar{x}_1 = \dfrac{-1-\sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$, $\bar{x}_2 = \dfrac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$

Παίρνουμε πρώτα το $\bar{x}_1$. Έχουμε $f(x) = 1 - \lambda x^2 \Rightarrow f'(x) = -2\lambda x$.

Άρα $f'(\bar{x}_1) = -2\lambda \bar{x}_1 = 1 + \sqrt{1+4\lambda} \Rightarrow |f'(\bar{x}_1)| = 1 + \sqrt{1+4\lambda} > 1$

Άρα το $\bar{x}_1$ είναι ασταθές.

Παίρνουμε το $\bar{x}_2$. Έχουμε $f'(\bar{x}_2) = 1 - \sqrt{1+4\lambda}$. Για να είναι το $\bar{x}_2$ ευσταθές θα πρέπει $|f'(\bar{x}_2)| < 1$ δηλ. $|1 - \sqrt{1+4\lambda}| < 1 \Rightarrow -1 < 1 - \sqrt{1+4\lambda} < 1$ δηλ. $-2 < -\sqrt{1+4\lambda} \Rightarrow \sqrt{1+4\lambda} < 2 \Rightarrow 1 + 4\lambda < 4 \Rightarrow \lambda \in (0, \frac{3}{4})$

Άρα για $\lambda \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$ έχουμε ευστάθεια και για $\lambda \in \left(\frac{3}{4}, 2\right]$ έχουμε αστάθεια.

Πρόταση. Έστω η εξίσωση $x_{n+1} = f(x_n)$, με ένα σημείο ισορροπίας το $\bar{x}$. Υποθέτουμε υπάρχουν οι f', f'', f''' και είναι και συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι:

$$f'(\bar{x}) = 1.$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

a) Εάν $f''(\bar{x}) \neq 0$, το $\bar{x}$ είναι ασταθές.

b) Εάν $f''(\bar{x}) = 0$ και $f'''(\bar{x}) < 0$ τότε το $\bar{x}$ ευσταθές.

c). Εάν $f''(\bar{x}) = 0$ και $f'''(\bar{x}) > 0$ » » » ασταθές.

Τέλος θα εξετάσουμε την ευστάθεια του $\bar{x}$ όταν $f'(\bar{x}) = -1$.

Ορισμός. Έστω $f: (0,\infty) \to (0,\infty)$, όπου υπάρχουν οι f', f'' και f''' και είναι και συνεχείς συναρτήσεις. Τότε ορίζουμε την παράγωγο του Schwarz ως εξής:

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2,$$ θεωρούμε ότι $f'(x) \neq 0$.

Εάν σε ένα σημείο $\bar{x}$ έχουμε $f'(\bar{x}) = -1$, τότε

$$Sf(\bar{x}) = -f'''(\bar{x}) - \frac{3}{2}\left(f''(\bar{x})\right)^2$$

Παρατήρηση: Έστω η εξίσωση $x_{n+1} = f(x_n)$. Παίρνουμε το αρχικό δεδομένο x_0. Τότε $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^{(2)}(x_0)$, $x_3 = f(x_2) = f(f^{(2)}(x_0)) = f^{(3)}(x_0)$ και επαγωγικά $x_n = f^{(n)}(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$

Πρόταση. Έστω $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι f', f'' και f''' και είναι και συνεχείς συναρτήσεις. Έστω $\bar{x}$ ένα σημείο ισορροπίας της $x_{n+1}=f(x_n)$. Υποθέτουμε ότι

$$f'(\bar{x})=-1$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

α) Εάν $Sf(\bar{x})<0$, το $\bar{x}$ τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

β) Εάν $Sf(\bar{x})>0$ το $\bar{x}$ ασταθές.

Χρειαζόμαστε το εξής λήμμα:

Λήμμα. Έστω η εξίσωση $x_{n+1}=f(x_n)$ με σημείο ισορροπίας το $\bar{x}$. Θεωρούμε την εξίσωση

$$x_{n+1}=g(x_n) \quad \text{όπου} \quad g=f(f)=f^{(2)}.$$

Ισχύουν τα εξής:

α) Εάν το $\bar{x}$ είναι σημείο ισορροπίας για την $x_{n+1}=f(x_n)$ τότε το $\bar{x}$ είναι σημείο ισορροπίας και για την $x_{n+1}=g(x_n)$.

b) Εάν το $\bar{x}$ είναι ευσταθές για την $x_{n+1}=g(x_n)$ τότε το $\bar{x}$ είναι ευσταθές για την $x_{n+1}=f(x_n)$.

Απόδειξη. Εφόσον το $\bar{x}$ είναι σημείο ισορροπίας για την $x_{n+1}=f(x_n)$ έχουμε $\bar{x}=f(\bar{x})$. Ισχύει $g(\bar{x})=f^{(2)}(\bar{x})=f(f(\bar{x}))=f(\bar{x})=\bar{x}$

Επομένως το $\bar{x}$ είναι σημείο ισορροπίας για την $x_{n+1}=g(x_n)$.

Υποθέτουμε τώρα ότι το $\bar{x}$ είναι ευσταθές για την $x_{n+1}=g(x_n)$.

$(\forall \epsilon>0)\ (\exists\, \delta(\epsilon)):\ \forall\, x_0:\ |x_0-\bar{x}|<\delta$ να έχουμε $|x_n-\bar{x}|<\epsilon,\ n\geq 0$

ή $|g^{(n)}(x_0)-\bar{x}|<\epsilon$ ή $|f^{(2n)}(x_0)-\bar{x}|<\epsilon,\ n\geq 0$

Έχουμε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση. Παίρνουμε σαν $\epsilon=\delta$. Τότε από τον ορισμό της συνέχειας έχουμε:

Για το αριθμό δ υπάρχει ένας αριθμός η τέτοιος ώστε για κάθε x_0: $|x_0-\bar{x}|<\eta$ να έχουμε $|f(\bar{x})-f(x_0)|<\delta \Rightarrow$
$|\bar{x}-f(x_0)|<\delta$

Παίρνουμε $\theta(\varepsilon) = \min\{\delta, n\}$. Άρα έχουμε

$(\forall \epsilon > 0): \exists\ \theta(\varepsilon)): |x_0 - \bar{x}| < \theta(\varepsilon): \quad |f^{(2n)}(f(x_0)) - \bar{x}| < \epsilon; \quad n > 0$

Άρα

$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists\ \theta(\varepsilon)): \ |x_0 - \bar{x}| < \theta(\varepsilon): \quad |f^{(2n+1)}(x_0) - \bar{x}| < \epsilon, \quad n > 0$

Άρα το $\bar{x}$ είναι ευσταθές για την $x_{n+1} = f(x_n)$.

Απόδειξη της Πρότασης. Θεωρούμε ότι $f'(\bar{x}) = -1$. Παίρνουμε τη συνάρτηση $g(x) = f^{(2)}(x) = f(f(x))$. Θα δείξουμε ότι το $\bar{x}$ είναι ευσταθές για την $x_{n+1} = g(x_n)$.

Παίρνουμε την $g'(x) = (f(f(x)))' = f'(f(x)) \cdot f'(x) \Rightarrow g'(\bar{x}) = f'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x}) =$

$= f'(\bar{x}) \cdot f'(\bar{x}) = (-1)^2 = 1 \Rightarrow g'(\bar{x}) = 1$

Παίρνουμε την $g''(x) = f''(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f'(x) + f'(f(x)) \cdot f''(x) \Rightarrow$

$g''(\bar{x}) = f''(f(\bar{x}))\,(f'(\bar{x}))^2 + f'(f(\bar{x}))\,f''(\bar{x}) = f''(\bar{x})\,(-1)^2 + f'(\bar{x})\,f''(\bar{x}) = f''(\bar{x}) - f''(\bar{x}) = 0$

Έχουμε $g''(x) = f''(f(x))\cdot(f'(x))^2 + f'(f(x))\,f''(x)$. Άρα

$$g'''(x) = f'''(f(x))\cdot f'(x)\,(f'(x))^2 + 2f''(f(x))\,f'(x)\,f''(x) + f''(f(x))\,f'(x)\cdot f''(x)$$
$$+\ f'(f(x))\cdot f'''(x)$$

Άρα

$$g'''(\bar{x}) = f'''(f(\bar{x}))\,(f'(\bar{x}))^3 + 2f''(f(\bar{x}))\,f'(\bar{x})\cdot f''(\bar{x}) + f''(f(\bar{x}))\,f'(\bar{x})\cdot f''(\bar{x})$$
$$+\ f'(f(\bar{x}))\,f'''(\bar{x}) = -f'''(\bar{x}) + 2f''(\bar{x})\,(-1)\cdot f''(\bar{x}) +$$
$$+\ f''(\bar{x})\,(-1)\,f''(\bar{x}) + f'(\bar{x})\,f'''(\bar{x}) = -f'''(\bar{x}) - 2(f''(\bar{x}))^2 - (f''(\bar{x}))^2 - f'''(\bar{x})$$
$$= -2f'''(\bar{x}) - 3(f''(\bar{x}))^2 = 2\left(-f'''(\bar{x}) - \frac{3}{2}(f''(\bar{x}))^2\right) = 2\,Sf(\bar{x}) < 0$$

Άρα το $\bar{x}$ είναι ευσταθές για την εξίσωση $x_{n+1} = g(x_n)$

Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα το $\bar{x}$ είναι ευσταθές για την $x_{n+1} = f(x_n)$.

Ομοίως εάν $Sf(\bar{x}) > 0$ μπορούμε να δείξουμε ότι το $\bar{x}$ είναι ασταθές για την $x_{n+1} = g(x_n)$, επομένως και για την $x_{n+1} = f(x_n)$.

Άσκηση. Δίνεται η εξίσωση $x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n$, $n = 0, 1, \ldots$ Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας και να εξετάσετε την ευστάθειά τους.

Λύση. Εδώ $f(x) = x^2 + 3x$. Για να βρούμε τα σημεία ισορροπίας παίρνουμε την αλγεβρική εξίσωση $x = x^2 + 3x$. Έχουμε 2 σημεία ισορροπίας το $\bar{x}_1 = 0$ και το $\bar{x}_2 = -2$.

Θα εξετάσουμε πρώτα την ευστάθεια του $\bar{x}_1 = 0$. Παίρνουμε την $f'(x) = 2x + 3$. Άρα $f'(\bar{x}_1) = 3$. Άρα $|f'(\bar{x}_1)| = 3 > 1$. Επομένως το $\bar{x}_1 = 0$ είναι ασταθές

Παίρνουμε τώρα το $\bar{x}_2 = -2$. Έχουμε $f'(\bar{x}_2) = f'(-2) = -1$.

$Sf(\bar{x}) = -f'''(\bar{x}) - \frac{3}{2}(f''(\bar{x}))^2$. Έχουμε $f''(x) = 2 \Rightarrow f''(\bar{x}) = 2$, $f'''(\bar{x}) = 0$.

Άρα $Sf(-2) = -\frac{3}{2}4 = -6 < 0$. Επομένως το $\bar{x}_2 = -2$ ευσταθές

Άσκηση: Να εξετάσετε την ευστάθεια του $\bar{x}=0$ της εξίσωσης

$$x_{n+1} = -1 + e^{-x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Λύση. Εδώ $f(x) = -1 + e^{-x}$. Παίρνουμε την $f'(x) = -e^{-x}$

Άρα $f'(\bar{x}) = f'(0) = -1$. Παίρνουμε την

$Sf(\bar{x}) = -f'''(\bar{x}) - \frac{3}{2}\left(f''(\bar{x})\right)^2$. Έχουμε $f''(x) = e^{-x}$ και $f'''(x) = -e^{-x}$.

Άρα $f''(0) = 1$ και $f'''(0) = -1$. Επομένως

$Sf(0) = 1 - \frac{3}{2} 1^2 = -\frac{1}{2} < 0$. Άρα το $\bar{x}=0$ είναι ευσταθές

Άσκηση. Έστω η εξίσωση

$$x_{n+1} = x_n - x_n^3 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας και να εξετάσετε την ευστάθειά τους.

Λύση: Εδώ $f(x) = x - x^3$. Για να πάρουμε τα σημεία ισορροπίας παίρνουμε την αλγεβρική εξίσωση $\bar{x} = \bar{x} - \bar{x}^3$. Άρα έχουμε ένα μοναδικό σημείο ισορροπίας το $\bar{x} = 0$. Θα εξετάσουμε την ευστάθεια του $\bar{x}$. Παίρνουμε $f'(x) = 1 - 3x^2 \Rightarrow f'(\bar{x}) = f'(0) = 1$. Παίρνουμε την $f''(x) = -6x \Rightarrow f''(\bar{x}) = f''(0) = 0$. Παίρνουμε $f'''(x) = -6 \Rightarrow f'''(\bar{x}) = f'''(0) = -6 < 0$. Άρα το $\bar{x} = 0$ ευσταθές.