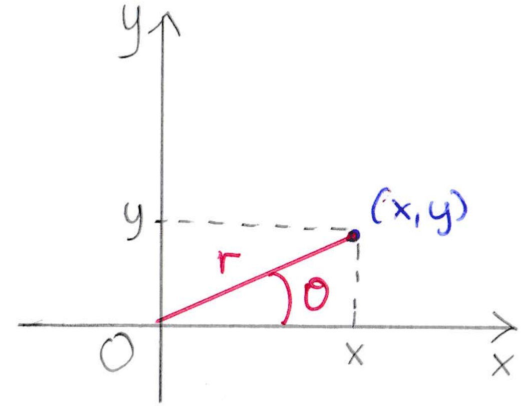
ΚΥΚΛΙΚΟΙ, ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΙ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Τα ΠΑΣΤ σε κυκλικούς τόπους αυτά λύνονται με αναγωγή από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες.



Έστω

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Τότε

$$r = (x^2+y^2)^{1/2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

Οπότε

$$r_x = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot 2x = \frac{x}{r}, \qquad \theta_x = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{r^2},$$

$$r_y = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot 2y = \frac{y}{r}, \qquad \theta_y = \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{r^2}.$$

Έστω, τώρα, η λαπλασιανή

$$\Delta u = \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} . \qquad (1)T$$

Θέλουμε να εκφράσουμε τη Δu σε μορφή πολικών συντεταγμένων r, θ αντί των καρτεσιανών x, y. Οπότε

$$u_x = u_r \cdot r_x + u_\theta \cdot \theta_x = \frac{x}{r} u_r - \frac{y}{r^2} u_\theta \quad \text{και}$$

$$u_{xx} = \frac{1}{r} u_r + x\left(-\frac{x}{r^3}\right) u_r + \frac{x}{r}\frac{x}{r} u_{rr} + \frac{x}{r}\left(\frac{-y}{r^2}\right) u_{r\theta}$$

$$-y\left(-\frac{2}{r^3}\frac{x}{r}\right) u_\theta - \frac{y}{r^2}\frac{x}{r} u_{\theta r} - \frac{y}{r^2}\left(\frac{-y}{r^2}\right) u_{\theta\theta}$$

$$= \frac{x^2}{r^2} u_{rr} - \frac{2xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{y^2}{r^3} u_r + \frac{2xy}{r^4} u_\theta .$$

Ομοίως

$$u_y = u_r \cdot r_y + u_\theta \cdot \theta_y = \frac{y}{r} u_r + \frac{x}{r^2} u_\theta$$

και

$$u_{yy} = \frac{1}{r} u_r + y\left(-\frac{y}{r^3}\right) u_r + \frac{y}{r}\frac{y}{r} u_{rr} + \frac{y}{r}\frac{x}{r^2} u_{r\theta}$$

$$+ x\left(-\frac{2y}{r^4}\right) u_\theta + \frac{x}{r^2}\frac{y}{r} u_{r\theta} + \frac{x}{r^2}\frac{x}{r^2} u_{\theta\theta}$$

$$= \frac{y^2}{r^2} u_{rr} + \frac{2xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{x^2}{r^3} u_r - \frac{2xy}{r^4} u_\theta$$

Άρα, αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{r^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{r^2}{r^3} u_r$$

$$= u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r \qquad (2)T$$

Κατά ανάλογο τρόπο πραγματοποιείται η αναγωγή σε κυλινδρικές συντεταγμένες r, θ, z μέσω των τύπων

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z.$$

Έτσι, για τη Λαπλασιανή στις τρεις διαστάσεις

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \qquad (3) \quad T$$

Βρίσκουμε

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} \qquad (4)$$

Για την αναγωγή σε σφαιρικές συν/νες r, θ, φ χρησιμοποιούμε τις

$$x = r\sin\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\varphi \qquad (5)\ T$$

και

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}, \quad \varphi = \cos^{-1}\frac{z}{r} = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (6)\ T$$

και τότε

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{\cot\varphi}{r^2}u_\varphi + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}u_{\theta\theta} \qquad (7)\ T$$

* Η αρχή της υπέρθεσης

Η γενική μορφή μιας γραμμικής ΔΕΜΠ $2^{ης}$ τάξης είναι

$$a_1 u_{xx} + a_2 u_{xy} + a_3 u_{yy} + a_4 u_x + a_5 u_y + a_6 u = f(x,y)$$

όπου οι a_i $(i=1,\dots,6)$ και η f είναι συναρτήσεις των x και y, σε πιο σύντομη μορφή

$$A[u] = f$$

Το σύμβολο A θα λέγεται (γραμμικός) τελεστής και θα ισούται με

$$A[u] = a_1(x,y)\cdot u_{xx} + \dots + a_6(x,y)\, u$$

Ισχύει ότι

$$A[c_1 u_1 + c_2 u_2] = c_1 A[u_1] + c_2 A[u_2]$$

όπου c_1, c_2 σταθερές και u_1, u_2 συναρτήσεις.

Αρχή της υπέρθεσης: Έστω $f_1, f_2, \ldots, f_m$ τυχούσες συναρτήσεις και $c_1, c_2, \ldots, c_m$ τυχούσες σταθερές. Αν A είναι ένας γραμμικός τελεστής και αν $u_1, u_2, \ldots, u_m$ είναι αντιστοίχως λύσεις των εξισώσεων $A[u_1] = f_1, \ldots, A[u_m] = f_m$ τότε η $c_1u_1 + \cdots + c_mu_m$ θα είναι λύση της εξίσ. $A[u] = c_1f_1 + \cdots + c_mf_m$.

Άμεση συνέπεια της εν λόγω αρχής είναι ότι αν $u_1, u_2, \ldots, u_m$ είναι λύσεις της $A[u] = 0$ τότε και η $c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_mu_m$ θα είναι επίσης λύση της $A[u] = 0$.