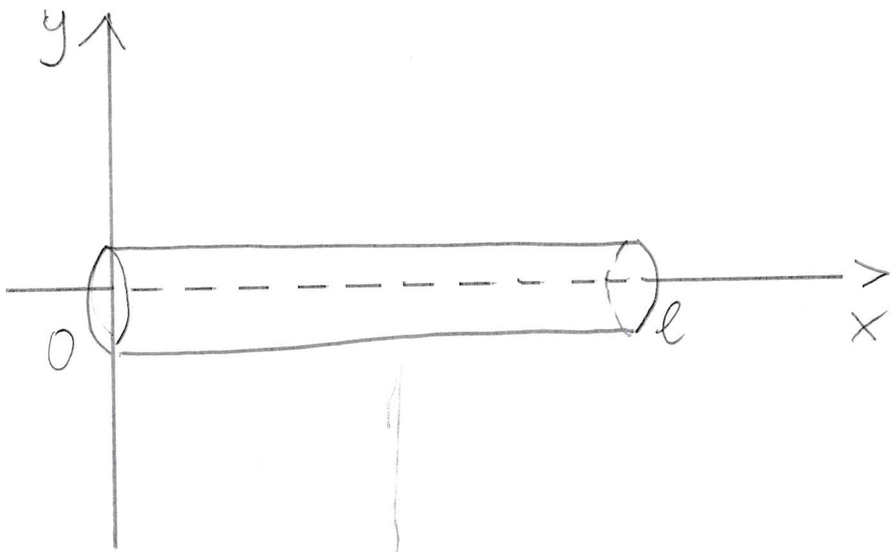
Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Θεωρούμε μια ράβδο μήκους ℓ με σταθερή διατομή. Η ράβδος τοποθετείται παράλληλα με τον άξονα Ox και στην ίδια διεύθυνση με τη ροή της θερμότητας.



Τα άκρα της ράβδου αντιστοιχούν στα σημεία $x=0$, $x=\ell$. Έστω $u(x,t)$ η θερμοκρασία της ράβδου στη διατομή σε απόσταση x από το σημείο $x=0$ και τη χρονική στιγμή $t\geq 0$. Αν υποτεθεί ότι τα άκρα της ράβδου διατηρούνται σε σταθερή θερμοκρασία 0 και η αρχική

Θερμοκρασία για $t=0$ ισούται με $g(x)$, τότε η θερμοκρασία $u(x,t)$ πληρεί το παρακάτω ΠΑΣΤ

$$u_t - c u_{xx} = 0, \qquad 0<x<\ell, \; t>0 \quad (1)$$

$$u(x,0) = g(x), \qquad 0<x<\ell, \quad (2)$$

$$u(0,t) = 0, \qquad t>0 \quad (3)$$

$$u(\ell,t) = 0, \qquad t>0 \quad (4)$$

όπου c σταθερά, εξαρτώμενη από το υλικό της ράβδου.

Θεωρούμε ότι η λύση $u(x,t)$ του ΠΑΣΤ γράφεται ως

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

Τότε η ΔΕΜΠ (1) γίνεται

$$XT' - cX''T = 0$$

ή

$$\frac{T'}{T} - c\frac{X''}{X} = 0$$

ή

$$c\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \lambda$$

όπου λ σταθερά.

Έτσι καταλήγουμε στις ΔΕ

$$c\frac{X''}{X} = \lambda \qquad (5)$$

και

$$\frac{T'}{T} = \lambda . \qquad (6)$$

Από τις (3) και (4) προκύπτουν οι συνοριακές συνθήκες

$$X(0) = X(\ell) = 0$$

Η ΔΕ (5) και οι παραπάνω συνθήκες συνθέτουν το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$X'' - \frac{\lambda}{c} X = 0,$$

$$X(0) = X(\ell) = 0,$$

το οποίο έχει λύση

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\frac{-\lambda}{c}}\, x + c_2 \sin\sqrt{\frac{-\lambda}{c}}\, x \quad (7)$$

όπου οι αυθαίρετες σταθερές c_1 και c_2 προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

και

$$X(\ell)=0 \Rightarrow c_2 \sin\sqrt{\frac{-\lambda}{c}}\,\ell=0$$

$$\Rightarrow \sin\sqrt{\frac{-\lambda}{c}}\,\ell=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{-\lambda}{c}}\,\ell=n\pi$$

$$\Rightarrow \lambda=-\frac{n^2\pi^2 c}{\ell^2}. \quad (8)$$

Οπότε

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad n=1,2,\ldots \quad (9)$$

Επίσης, λόγω της (8) η ΔΕ (6) παίρνει τη μορφή

$$T'+\frac{n^2\pi^2 c}{\ell^2}T=0$$

και έτσι γενική λύση

$$T_n(t)=c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 c}{\ell^2}t}, \quad n=1,2,\ldots \quad (10)$$

Από τις (9) και (10) βρίσκουμε ότι η λύση της ΔΕΜΠ (1), λόγω γραμμικότητας,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\cdot T_n(t)$$

Η λύση αυτή ικανοποιεί επιπλέον και την αρχική συνθήκη (2), επομένως

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} = g(x).$$

Οπότε, οι σταθερές c_n είναι συντελεστές της ημιτονικής σειράς Fourier της $g(x)$ και κατά συνέπεια υπολογίζονται από τη σχέση

$$c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g(x) \sin\frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$

Εν κατακλείδι η λύση του ΠΑΣΤ (1)-(4) είναι

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 c}{\ell^2} t} \cdot \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad (11)$$

όπου

$$c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g(x)\cdot \sin\frac{n\pi x}{\ell}\, dx. \quad (12)$$

Παραδ. Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$u_t - u_{xx} = 0$$
$$u(x,0) = 1-x$$
$$u(0,t) = 0$$
$$u(1,t) = 0.$$

Απ. Θέτουμε

$$c = 1$$
$$g(x) = 1-x$$
$$\ell = 1$$

στη σχέση (12), και βρίσκουμε

$$c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell g(x)\cdot \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= 2\int_0^1 (1-x)\cdot \sin n\pi x\,dx = -\frac{1}{n\pi}\int_0^1 (1-x)(\cos n\pi x)'dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\Big[(1-x)\cos n\pi x\Big]_{x=0}^{1} + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (-1)\cos n\pi x\,dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\big[0-1\big] - \frac{2}{n^2\pi^2}\Big[\sin n\pi x\Big]_{x=0}^{1} = \frac{2}{n\pi}$$

Συνεπώς, από την (11), προκύπτει η λύση

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 c}{\ell^2}t}\cdot \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x.$$

$\square$

Έστω τώρα, ότι οι συνοριακές συνθήκες (3) και (4) είναι μη ομογενείς. Τότε για να βρούμε τη λύση ενός τέτοιου προβλήματος χρησιμοποιούμε το ακόλουθο θεώρημα.

<u>Θεώρ.</u> Έστω u λύση του ΠΑΣΤ με μη ομογενείς συνθήκες

$$u_t - c u_{xx} = 0, \quad (1)$$
$$u(x,0) = g(x), \quad (2)$$
$$u(0,t) = A, \quad (3')$$
$$u(\ell,t) = B. \quad (4')$$

Αν

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{x-\ell}{\ell}A - \frac{x}{\ell}B \quad (13)$$

τότε η v είναι λύση του ΠΑΣΤ

$$v_t - c\, v_{xx} = 0, \quad (14)$$
$$v(x,0) = g(x) + \frac{x-\ell}{\ell}A - \frac{x}{\ell}B, \quad (15)$$
$$v(0,t) = 0, \quad (16)$$
$$v(\ell,t) = 0. \quad (17)$$

Παραδ. Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$u_t - u_{xx} = 0$$
$$u(x,0) = 3-3x$$
$$u(0,t) = 3$$
$$u(1,t) = 1$$

Απ. Υπολογίζουμε τη λύση v του ΠΑΣΤ (14), (15), (16), (17) - Οπότε οι συντελεστές c_n θα είναι

$$c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\left[g(x) + \frac{x-\ell}{\ell}A - \frac{x}{\ell}B\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

$$= 2\int_0^1 [3-3x+(x-1)3 - x]\sin n\pi x\,dx$$

$$= 2\int_0^1 (-x)\sin n\pi x\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x(\cos n\pi x)'dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[x\cos n\pi x\right]_{x=0}^{1} - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\cos n\pi - 0\right] - \frac{2}{n^2\pi^2}\left[\sin n\pi x\right]_{x=0}^{1} = \frac{2(-1)^n}{n\pi}.$$

Επομένως, από την (11) βρίσκουμε

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n\pi}e^{-n^2\pi^2 t}\cdot\sin n\pi x$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-n^2\pi^2 t}\cdot\sin n\pi x$$

Άρα, λόγω της (13) η λύση u είναι

$$u(x,t) = v(x,t) - \frac{x-\ell}{\ell}A + \frac{x}{\ell}B$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-n^2\pi^2 t}\cdot\sin n\pi x - 2x + 3. \quad \square$$

Άσκ. Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$\overbrace{u_t - u_{xx}}^{c=1} = 0$$

$$u(x,0) = \sin x = g(x)$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(\underset{\ell}{\underset{\parallel}{\pi}},t) = 0$$

Απ. Από την (1) και την αρχική συνθήκη $u(x,0) = \sin x$, προκύπτει

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = \sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

Οπότε καταλήγουμε στη λύση

$$u(x,t) = e^{-t} \cdot \sin x.$$

$\square$

Ασκ. Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$u_t - u_{xx} = 0$$

$$u(x,0) = x - x^2$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(1,t) = 0$$

Απ Εχουμε

$$c_n = 2\int_0^1 (x-x^2)\sin n\pi x \, dx = -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 (x-x^2)(\cos n\pi x)' dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\Big[(x-x^2)\cos n\pi x\Big]_{x=0}^{1} + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (1-2x)\cos n\pi x \, dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 (1-2x)(\sin n\pi x)'$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\Big[(1-2x)\sin n\pi x\Big]_{x=0}^{1} - \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 (-2)\sin n\pi x \, dx$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin n\pi x \, dx = -\frac{4}{n^3\pi^3}\Big[\cos n\pi x\Big]_{x=0}^{1} = -\frac{4}{n^3\pi^3}\Big[(-1)^n - 1\Big] = \begin{cases} \dfrac{8}{n^3\pi^3}, & n \text{ περιττός} \\ 0, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Άρα

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^3\pi^3} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t} \sin(2n-1)\pi x . \qquad \square$$