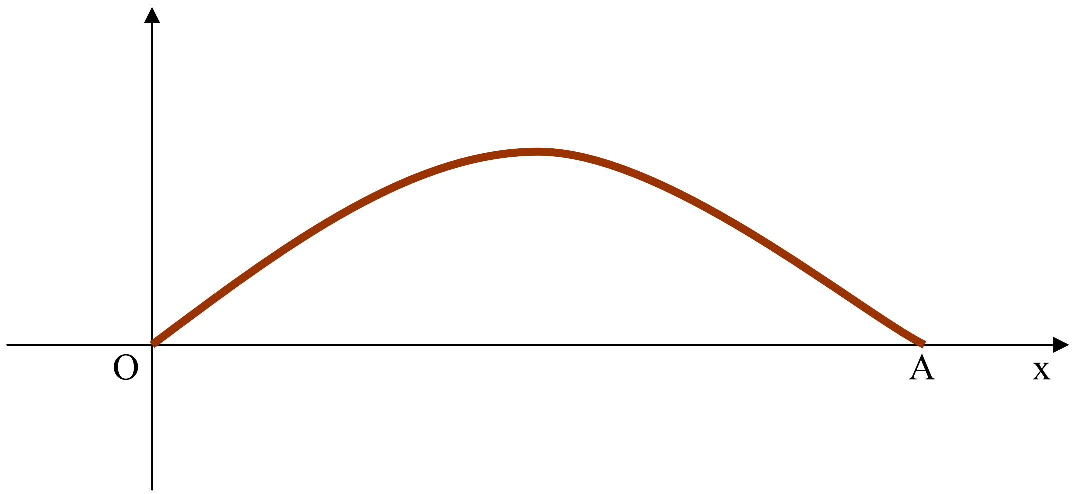
Η κυματική εξίσωση: $\boxed{u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0}$.

Θεωρούμε μία τεντωμένη χορδή που τα άκρα της στηρίζονται ακλόνητα σε δύο σημεία Ο και Α, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Προκαλούμε στη χορδή μία κατακόρυφη απομάκρυνση. Η εγκάρσια κίνηση θα είναι μικρή και στην πραγματικότητα πολύ μικρότερη από ότι στο σχήμα όπου τη μεγεθύναμε για λόγους παραστατικότητας.



Θεωρούμε το *πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών* για την **κυματική εξίσωση**:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \;\; t > 0 \tag{1}$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad 0 < x < l, \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = g_2(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0, \tag{4}$$

$$u(l,t) = 0, \quad t > 0. \tag{5}$$

Τότε η λύση του προβλήματος αυτού είναι:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi c}{l} t + b_n \sin\frac{n\pi c}{l} t \right) \sin\frac{n\pi x}{l}}. \tag{14}$$

όπου

$$\boxed{a_n = \frac{2}{l} \int_0^l g_1(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx} \quad \text{και} \quad \boxed{b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g_2(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx}. \tag{13}$$